

УДК 533.6.011.72:537.84

© 2001 г. Е.А. ПУШКАРЬ

ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ В ЗАДАЧАХ НАКЛОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МГД УДАРНЫХ ВОЛН

Для наклонного взаимодействия МГД ударных волн (встречного и догонного) построены газодинамические аналогии взаимодействия, достаточно адекватно описывающие сложные зависимости газодинамических параметров среды от напряженности и наклона магнитного поля. Полная газодинамическая аналогия, в которой МГД-взаимодействие моделируется взаимодействием двух газодинамических ударных волн с числами Маха, вычисленными по быстрым магнитозвуковым скоростям, хорошо описывает состояние среды при слабых и умеренных магнитных полях. В более сильном поле удовлетворительные результаты дает "гибридная" модель, в которой состояние за взаимодействующими ударными волнами рассчитывается по МГД-соотношениям на разрывах и далее используется газодинамическая аналогия.

В проводящей среде с вмороженным магнитным полем \mathbf{H} волновая картина течения, возникающего при взаимодействии МГД ударных волн S_1 и S'_1 , распространяющихся навстречу друг другу [1, 2] или догоняющих одна другую [3] (S_2 догоняет S_1) под некоторым углом θ , содержит до шести МГД-волн (быстрые, вращательные, медленные) и контактный или тангенциальный разрыв. При $|\mathbf{H}| \rightarrow 0$ быстрые МГД-волны переходят в газодинамические ударные волны (или волны разрежения), тогда как медленные волны и вращательные разрывы не имеют газодинамических аналогов.

Взаимодействие зависит от давления и плотности среды перед ударными волнами, вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} , скоростей ударных волн и угла θ между ними. Согласно теории размерности [4], в плоскополяризованной постановке [1–3], когда вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H} лежит в одной плоскости со скоростями ударных волн и ортогонален линии их пересечения, задача зависит от шести безразмерных параметров.

Безразмерные определяющие параметры можно ввести по-разному, например движение S_1 и S'_1 (или S_2) задать их числами Маха, вычисленными по газодинамической скорости звука. Тогда при повороте вектора \mathbf{H} и фиксированных числах Маха скорости ударных волн остаются неизменными, однако их интенсивности меняются довольно сложным образом из-за анизотропии среды, обусловленной наличием магнитного поля. Волновая картина взаимодействия и, как следствие, результирующее состояние среды также меняются. Например, газодинамическое давление на контактном разрыве может различаться в 5–6 раз при разных наклонах \mathbf{H} к фронтам ударных волн [1, 2].

Наличие шести определяющих параметров даже в двумерном случае существенно усложняет решение задачи и исследование основных свойств взаимодействия, которые представляют значительный интерес для приложений [5–11]. В связи с приближением космических аппаратов "Пионер" и "Вояджер" к гелиопаузе были предприняты попытки моделировать взаимодействие ударного возмущения солнечного ветра с внутренней предельной ударной волной в рамках газодинамического

приближения [8, 9]. Однако влияние магнитного поля на ударные взаимодействия имеет принципиальный характер: на орбите Земли магнитное давление равно или несколько превосходит газодинамическое давление и остается одного порядка с газодинамическим давлением вблизи гелиопаузы, поэтому результаты исследования в газодинамическом приближении не могут дать адекватной картины взаимодействия. В то же время точные магнитогидродинамические решения в сложной геометрии с учетом произвольно ориентированного магнитного поля [12] дают только локальную картину взаимодействия и достаточно трудоемки для воспроизведения. Поэтому построение приближенного описания взаимодействия ударных возмущений, позволяющего учесть эффекты влияния магнитного поля, весьма своевременно.

В настоящей работе на основании сложных зависимостей [1–3], полученных в магнитогидродинамическом приближении, построена газодинамическая аналогия взаимодействия, достаточно адекватно описывающая рассматриваемый процесс с учетом магнитного поля. Рассмотрено наклонное взаимодействие двух газодинамических ударных волн в непроводящей среде с числами Маха, вычисленными по быстрой магнитозвуковой скорости для соответствующей магнитогидродинамической задачи, которые являются МГД-аналогом чисел Маха ударных волн. Решение строится классическими методами в плоскости поворот потока – давление и состоит только из газодинамических волн (ударных и центрированных) и тангенциального разрыва. В слабых и умеренных магнитных полях ряд магнитогидродинамических эффектов, например зависимости давления и скорости от наклона вектора \mathbf{H} , удовлетворительно описываются в рамках газодинамической модели при варьировании эффективных чисел Маха газодинамических аналогов МГД ударных волн: для догонного взаимодействия при магнитном давлении, не превосходящем газодинамического давления, погрешность не превосходит 7–10%, для встречного взаимодействия при магнитном давлении, вдвое меньшем газодинамического, погрешность не более 5–6%.

1. Постановка магнитогидродинамической задачи. Рассмотрим вначале взаимодействие ударных волн в рамках модели идеальной магнитной гидродинамики [13], которая самосогласованно учитывает взаимное влияние движения проводящей среды и магнитного поля. В бесконечно проводящей среде силовые линии магнитного поля заморожены в среду, которая по этой причине может рассматриваться как анизотропный композит – сжимаемый газ, несущий в себе упругие нити (силовые линии магнитного поля).

Стационарные МГД-течения невязкого нетеплопроводного бесконечно проводящего газа описываются системой уравнений [13]

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \rho \mathbf{V} &= 0, \quad \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad}(p / \rho^\gamma) = 0 \\ (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi\rho} \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H} \\ \operatorname{div} \dot{\mathbf{H}} &= 0, \quad \operatorname{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

со следующими соотношениями на сильных разрывах:

$$\begin{aligned} [\rho V_n] &= 0, \quad [p + \rho V_n + H_\tau^2 / 8\pi] = 0 \\ [\rho V_n V_\tau - H_n H_\tau / 4\pi] &= 0 \\ \left[\rho \left(\frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{V^2}{2} \right) V_n + \rho V_n + \frac{1}{4\pi} H_\tau^2 V_n - \frac{H_n}{4\pi} (\mathbf{H}_\tau \cdot \mathbf{V}_\tau) \right] &= 0 \\ [H_n] &= 0, \quad H_n [\mathbf{V}_\tau] = [\mathbf{H}_\tau \cdot \mathbf{V}_n] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь ρ – плотность, p – давление, \mathbf{V} – скорость газа, \mathbf{H} – напряженность магнитного поля. Квадратные скобки обозначают скачок величин на разрыве, индексы n и τ – нормальные и тангенциальные компоненты.

Система уравнений магнитной гидродинамики имеет семь характеристик и является нестрого гиперболической – различные характеристики могут сливаться друг с другом. Это приводит к отсутствию непрерывной зависимости от параметров. Наиболее рельефно это демонстрируют задачи о взаимодействии сильных разрывов [1–3], в которых при непрерывном изменении определяющих параметров происходят "катастрофические" (скачкообразные) изменения решений.

В общем случае конечное плоское возмущение приводит к образованию трех авто-модельных волн или сильных разрывов (быстрых, медленных и альфвеновского), распространяющихся с каждой стороны от исходного возмущения, и покоящейся энтропийной волны, т.е. общее число волн равно семи. Несмотря на то что МГД-модель характеризуется двумя векторами: скоростью и напряженностью магнитного поля, быстрые и медленные волны в специальной системе координат плоскополяризованы, однако альфвеновские волны обладают круговой поляризацией. В общем случае при наличии двух и более разрывов течение не является плоскополяризованным. Такая ситуация была рассмотрена для взаимодействия двух быстрых ударных волн [14], где проведено сравнение с плоскополяризованной задачей и выявлены их общие черты и различия. В дальнейшем для упрощения анализа рассматривается плоскополяризованная постановка, когда исходные ударные волны плоскополяризованные и в альфвеновском разрыве поле поворачивается вокруг нормали на 180° , оставаясь в плоскости течения.

В подобных газодинамических задачах ситуация гораздо проще, так как существуют только три характеристики, не сливающиеся друг с другом, в каждую сторону от возмущения распространяется только одна волна и всегда имеется возможность рассматривать плоские постановки задачи [15].

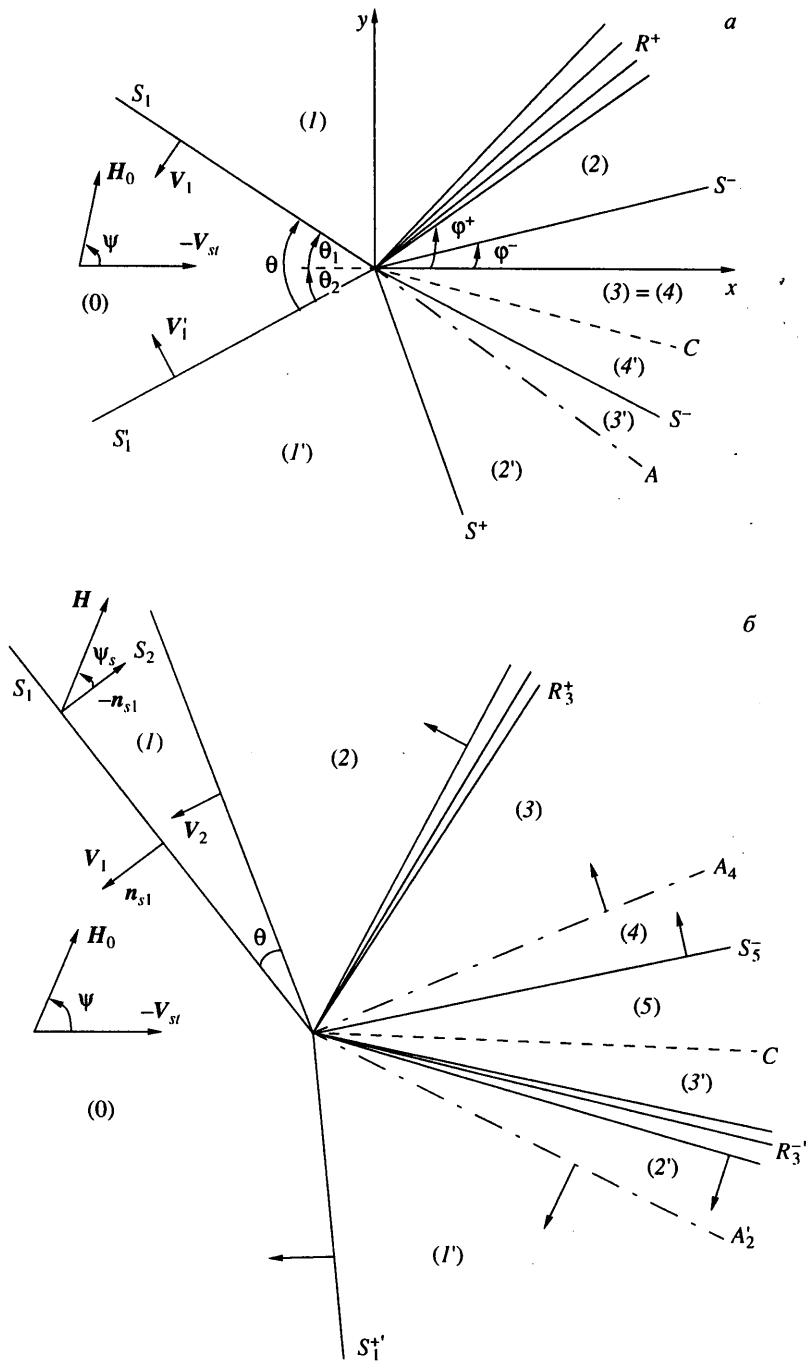
Рассмотрим постановку задачи о взаимодействии ударных волн S_1 и S'_1 , движущихся навстречу друг другу с заданными скоростями V_1 и V'_1 (фиг. 1, а), или ударных волн S_1 и S_2 , догоняющих друг друга (фиг. 1, б) (S_2 имеет скорость V_2 относительно среды, сжатой и ускоренной в S_1 , движущейся по неподвижной среде (0) со скоростью V_1). Угол между плоскими фронтами разрывов равен $\theta \neq 0$ (фиг. 1).

Зададим начальное состояние невозмущенной неподвижной среды перед взаимодействующими ударными волнами (0): давление p_0 , плотность ρ_0 , напряженность магнитного поля H_0 , и будем предполагать его плоскополяризованным, т.е. вектор H_0 ортогонален линии L пересечения фронтов S_1 и S'_1 (или S_1 и S_2).

Рассмотрим регулярное взаимодействие ударных волн, когда в течении есть только одна особенность на линии L пересечения их фронтов и решение задачи состоит из разрывов или центрированных простых волн, расходящихся от L (фиг. 1). Выберем декартову систему координат XYZ , в которой ось Z направлена по линии L . Предположим, что возникающее при взаимодействии течение в окрестности L не меняется со временем, так что в системе координат XYZ , движущейся вместе с линией L со скоростью V_{st} , задача стационарна. Будем считать, что скорости V_1 и V'_1 (или V_1 и V_2) лежат в плоскости XY , тогда скорость газа $|V_{st}|$ определяется скоростями ударных волн S_1 и S'_1 (или S_1 и S_2) и углом θ между ними. При встречном столкновении S_1 и S'_1 можно выписать явные формулы [1, 2] для $|V_{st}|$

$$|V_{st}| = \frac{(|V_1|^2 + 2|V_1||V'_1|\cos\theta + |V'_1|^2)^{1/2}}{\sin\theta}, \quad \sin\theta_1 = \frac{|V_1|}{|V_{st}|}, \quad \sin\theta'_1 = \frac{|V'_1|}{|V_{st}|} \quad (1.3)$$

где θ_1 и θ'_1 – углы между $-V_{st}$ и фронтами S_1 и S'_1 соответственно ($\theta_1 + \theta'_1 = \theta$). В этой системе координат разрывы неподвижны, а скорость набегающей среды (0) равна $-V_{st}$ (фиг. 1, а). В случае догоняющих ударных волн для нахождения стационарной системы координат необходимо использовать соотношения на ударной волне, из которых находится состояние за S_1 [3]. Вектор напряженности магнитного поля H_0 зададим углом ψ его наклона к V_{st} и модулем $|H_0|$.



Фиг. 1. Схемы регулярного встречного столкновения ударных волн S_1 и S_1' (а) и догонного взаимодействия S_1 и S_2 (б)

При встречном столкновении рассматриваемая задача определяется безразмерными параметрами: числами Маха ударных волн $M_1 = |V_1|/a_0$ и $M'_1 = |V'_1|/a_0$, числом Альфвена $N = a_A/a_0 = H_0/\sqrt{4\pi\gamma\rho_0}$ (или $\beta = 8\pi\rho_0/H_0^2$, $N^2 = 2/\gamma\beta$), углом θ между S_1 и S'_1 и углом ψ наклона магнитного поля к скорости среды в стационарной системе координат. Здесь $a_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ – газодинамическая скорость звука, $a_A = H_0\sqrt{4\pi\rho_0}$ – альфвеновская скорость, γ – показатель адиабаты Пуассона (в расчетах полагалось $\gamma = 5/3$). При догонном взаимодействии число определяющих параметров такое же, однако вместо M'_1 и ψ задаются $M'_2 = |V_2|/a_{01}$ и угол ψ_s между H_0 и n_{S1} , где $a_{01} = \sqrt{\gamma p_{01}/\rho_{01}}$ – газодинамическая скорость звука в среде (1) за S_1 , а n_{S1} – нормаль к S_1 .

Поскольку сформулированная задача не содержит характерного линейного размера, она автомодельна: все величины зависят от отношения x/y или, что то же самое, от полярного угла ϕ . Элементарные автомодельные решения в этой постановке – ударные волны S^\pm , альфвеновские и контактные разрывы A и C и центрированные волны разрежения R^\pm . Быстрые и медленные волны обозначены индексами "+" и "-" соответственно. Решение состоит из двух комбинаций автомодельных стационарных решений, расходящихся от линии пересечения взаимодействующих ударных волн, каждое из которых включает в себя быструю, альфвеновскую и медленную волны (разрывы), разделенные однородными состояниями. Состояния за медленными волнами разделяет контактный разрыв C , на котором должны выполняться граничные условия непрерывности всех величин, кроме плотности и температуры [1–3] (фиг. 1).

Стационарные ударные волны S_k^\pm задаются углом ϕ_k^\pm их наклона к линии тока, а волны разрежения R_k^\pm могут быть заданы углом наклона ϕ_k^\pm задней характеристики в секторе разрежения. Состояние за k -той волной (или k -тым разрывом) здесь и далее обозначается индексом k , штрих обозначает волны и величины по разные стороны от C (фиг. 1).

Соотношения на S_k^\pm сводятся к одному уравнению, связывающему отношение плотностей $\eta_k = \rho_{k-1}/\rho_k$ и ϕ_k^\pm , а все остальные величины выражаются через η_k и ϕ_k^\pm явно [1–3, 16].

Автомодельные волны разрежения R_k^\pm описываются динамической системой, состоящей из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [3, 17]. Эта система может быть проинтегрирована численно, например методом Рунге – Кутты, так что все физические величины за R_k^\pm являются функциями ϕ_k^\pm .

Плоскополяризованный вращательный разрыв A не имеет свободного параметра, однако его наличие изменяет H и V и зависимости для физических величин за A .

При заданных скоростях движения взаимодействующих ударных волн состояние за каждой ударной волной однозначно задается определяющими параметрами и в стационарной постановке может быть вычислено после задания их углов наклона ϕ_k , где $k = 1, 1'$ или $1, 2$. Число Маха M_{st} стационарной системы координат определяется по формулам, аналогичным (1.3), в которых $|V_1|$, $|V'_1|$ и $|V_{st}|$ нужно заменить на M_1 , M'_1 и M_{st} соответственно.

Таким образом, при взаимодействии S_1 и S'_1 (или S_1 и S_2) возникает разрыв между значениями физических величин (ρ, p, V, H) в состояниях (1) и (1') (или соответственно (0) и (2)). Чтобы найти решение, необходимо удовлетворить граничным

условиям на контактном разрыве C : для встречного столкновения S_1 и S_1' и догонного взаимодействия S_1 и S_2 соответственно

$$P(\varphi_2^+, \varphi_4^-) = 0, \quad \mathbf{V}(\varphi_2^+, \varphi_4^-) - \mathbf{V}(\varphi_2^-, \varphi_4^-) = 0 \quad (1.4)$$

$$\mathbf{H}(\varphi_2^+, \varphi_4^-) - \mathbf{H}(\varphi_2^-, \varphi_4^-) = 0$$

$$P(\varphi_3^+, \varphi_5^-) - P(\varphi_1^+, \varphi_3^-) = 0, \quad \mathbf{V}(\varphi_3^+, \varphi_5^-) - \mathbf{V}(\varphi_1^+, \varphi_3^-) = 0 \quad (1.5)$$

$$\mathbf{H}(\varphi_3^+, \varphi_5^-) - \mathbf{H}(\varphi_1^+, \varphi_3^-) = 0$$

В плоскополяризованном случае пять условий (1.4) или (1.5) сводятся к четырем независимым условиям, так как $\mathbf{E} = -(1/c)\mathbf{V} \times \mathbf{H} = \text{const}$. Уравнения для S^\pm и R^\pm описывают отдельные элементы решения. Для описания всего течения, возникшего в результате взаимодействия, следует выписать совокупность систем, описывающих отдельные элементы, в соответствии с его волновой картиной. Поскольку последняя заранее неизвестна, написать априори такую систему невозможно. Предложенный метод решения [19] позволяет снять это противоречие и в процессе решения, не прибегая к подбору, регулярным образом определить волновую картину и все параметры течения с любой наперед заданной степенью точности. При этом все разрывы явно выделены. С помощью этого метода рассмотрено большинство возможных комбинаций взаимодействующих волн [1–3, 20–23].

Однако упомянутый выше метод решения достаточно сложен для воспроизведения. При отсутствии непрерывной зависимости от параметров этот метод не всегда позволяет получить точное решение даже методом возмущенного параметра и вынуждает прибегать к достаточно трудоемким вычислениям в поисках решения. Хотелось бы иметь более простой метод нахождения пусть даже приближенного решения в рамках существенно более простой газодинамической модели, на основании которого можно было бы получить точное решение с существенно меньшими затратами времени. Кроме того, чрезвычайно интересно узнать, какие магнитогидродинамические эффекты можно воспроизвести, оставаясь в рамках газовой динамики и используя соответствующие безразмерные параметры.

Существенно, что при уменьшении напряженности магнитного поля магнитогидродинамическая модель, вообще говоря, не стремится к газодинамической, так как для рассматриваемого класса задач граничные условия в магнитной гидродинамике и газовой динамике различны: в первом случае это непрерывность всех величин, кроме плотности, на контактном разрыве, во втором – непрерывность давления и условие непротекания на тангенциальном разрыве, так что, вообще говоря, контактный разрыв не стремится к тангенциальному разрыву и медленные волны и вращательные разрывы могут вносить конечные изменения в течение.

2. Постановка задачи и метод решения в газодинамическом приближении. В случае идеальной непроводящей среды система уравнений (1.1) и соотношения на разрывах (1.2) существенно упрощаются: из них можно исключить члены, содержащие магнитное поле, положив $\mathbf{H} = 0$.

Из соотношений на ударных волнах (1.2) отношение плотностей η_k находится явно

$$\eta_k = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M^2 \sin^2 \varphi_k} \quad (2.1)$$

после чего из (1.2) можно получить стандартные соотношения на стационарных газодинамических ударных волнах [15], в которых все физические величины являются явными функциями от φ_k .

Уравнения для простых волн легко интегрируются, однако полученные интегралы $R = R(M_r, C_1)$ и $\varphi = \varphi(M_r, C_2)$ (здесь $R = 1/\eta$, $M_r = V_r/a$ и $a^2 = \gamma p/\rho$) определяют неявные зависимости всех величин от φ [24], что чрезвычайно неудобно для численного решения.

Поэтому численно стандартным методом Рунге – Кутта четвертого порядка интегрировалась следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dV_r}{d\varphi} = V_\varphi, \quad \frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{2}{\gamma+1} \frac{V_r}{V_\varphi} \rho \quad (2.2)$$

$$V_\varphi^2 = a^2 \equiv C_0 \gamma \rho^{\gamma-1}$$

которая получается из (1.1) после подстановки $\mathbf{H} = \text{const}$ и перехода к цилиндрическим координатам с учетом того, что течение плоское ($V_z = 0$).

После обезразмеривания из (2.2) получаем

$$\frac{dv_r}{d\varphi} = v_\varphi, \quad \frac{dR}{d\varphi} = -\frac{2}{\gamma+1} \frac{v_r}{v_\varphi} R \quad (2.3)$$

$$v_\varphi = R^{(\gamma-1)/2} / M$$

где $v_r = V_r / V_0$, $v_\varphi = V_\varphi / V_0$, $M = V_0 / a_0$. Здесь $v_\varphi < 0$ с учетом геометрии течения в стационарной простой волне разрежения (фиг. 1). Начальное значение φ_0 равно маховскому углу: $\sin\varphi_0 = 1/M$.

Разрыв, возникающий при взаимодействии S_1 и S'_1 (или S_1 и S_2) между значениями (ρ, p, V) в состояниях (1) и (1') (или соответственно (0) и (2)), определяет решение, для нахождения которого необходимо удовлетворить граничным условиям на тангенциальном разрыве T : для встречного столкновения S_1 и S'_1 и догонного взаимодействия S_1 и S_2 соответственно

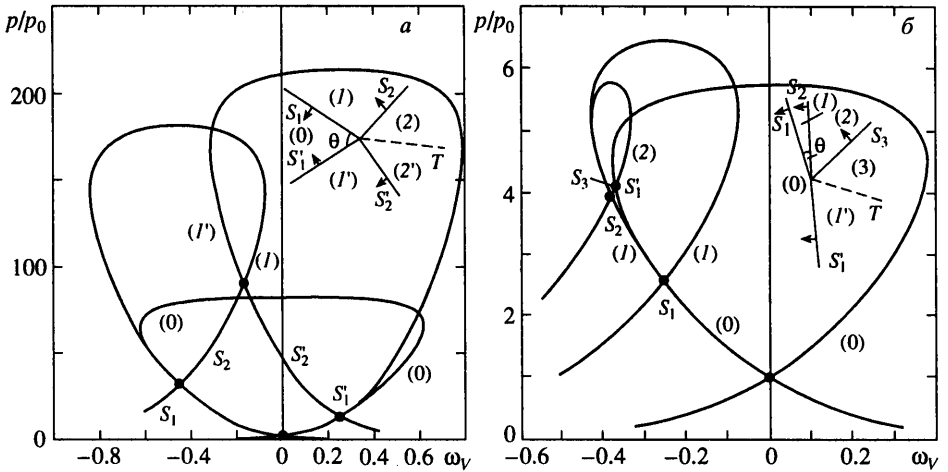
$$P(\varphi_2) - P(\varphi'_2) = 0, \quad \omega_V(\varphi_2) - \omega_V(\varphi'_2) = 0 \quad (2.4)$$

$$P(\varphi_3) - P(\varphi'_1) = 0, \quad \omega_V(\varphi_3) - \omega_V(\varphi'_1) = 0 \quad (2.5)$$

где ω_V – угол наклона скорости потока в стационарной системе координат.

Стационарное течение характеризуется одним безразмерным параметром: числом Маха $M = M_{st}$, в отличие от магнитной гидродинамики, где таких параметров три: M , N и ψ . Кроме того, граничные условия (2.4) и (2.5) на T в отличие от систем (1.4) и (1.5) допускают наглядную и легко реализуемую численно геометрическую интерпретацию: решение может быть построено в плоскости ω_V, P как пересечение сердцевидных кривых [15], являющихся изображением всех возможных состояний за скачком уплотнения, и их продолжений – всех возможных состояний за простой волной разрежения (решений системы (2.3)).

При встречном столкновении S_1 и S'_1 по их числам M_1, M'_1 и углу θ вычислялось M_{st} и численно строилась сердцевидная кривая для состояния (0) (фиг. 2, а). При фиксированном M_{st} точки на кривой изображают состояния за косыми ударными волнами как функции углов их наклона θ_1 и θ'_1 . Задание M_1, M'_1 и θ определяет θ_1 и θ'_1 (формулы (1.3)) и позволяет найти состояния (1) и (1') (некоторые точки на сердцевидной кривой). Используя эти точки как начальные, по соответствующим числам Маха для состояний (1) и (1') строились сердцевидные кривые и их продолжения для простых волн разрежения. Параметром вдоль кривых является угол φ наклона ударной волны или задней характеристики простой волны. Решение приближенно находилось как пересечение этих кривых (фиг. 2, а) и по точке пересечения определялись углы наклона φ_2, φ'_2 ударных волн S_2 и S'_2 . Из двух точек пересечения выбиралась та, что соответствует меньшему давлению ("слабое" решение). Затем полученное решение (φ_2, φ'_2) уточнялось до требуемой точности методом Ньютона. Сходимость достигалась за одну – две итерации.



Фиг. 2. Графическое решение газодинамических задач о встречном столкновении S_1 и S_1' при $M_1 = 5$, $M_1' = 3$ и $\theta = 60^\circ$ (а) и догонном взаимодействии S_1 и S_2 (б) при $M_1 = 1.5$, $M_2 = 1.2$ и $\theta = 25^\circ$ в плоскости ω_v, p (угол поворота потока – давление). Внутри сердцевидных кривых показаны схемы взаимодействия

При догонном взаимодействии S_1 и S_2 (фиг. 2, б) решение находилось аналогично, только после построения сердцевидной кривой для состояния (1) строилась сердцевидная кривая (с продолжением для R) для состояния (2) и решение приближенно находилось как пересечение этой кривой с исходной (для состояния (0)). В точке пересечения определялись углы наклона Φ_3, Φ_1' , которые затем уточнялись до требуемой точности.

В дальнейшем близость двух (сеточных) функций f_i^1 и f_i^0 будем оценивать по евклидовой норме

$$\| \mathbf{f} \| = \sqrt{\sum_i f_i^2}$$

где суммирование производится по всем (совпадающим) узлам сетки, в которых определены рассматриваемые функции. Под близостью функции f_i^1 к базовой функции f_i^0 будем понимать величину

$$\delta = \frac{\| \mathbf{f}^1 - \mathbf{f}^0 \|}{\| \mathbf{f}^0 \|}$$

и записывать ее в процентах.

3. Результаты расчетов и проведение аналогий между магнитогидродинамическим и газодинамическим взаимодействием. Рассмотрим вначале догонное взаимодействие ударных волн S_1 и S_2 (фиг. 1, б). Будем считать заданными все определяющие параметры для проводящей среды. Определим соответствующую газодинамическую задачу следующим образом. Зададим число Маха передней газодинамической ударной волны M_1^+ равным числу Маха МГД ударной волны S_1 по быстрой магнитозвуковой скорости a_{+0} по нормали к S_1

$$M_1^+ = M_1 / (0,5(\sqrt{1 + N^2 + 2N \cos \psi_s} + \sqrt{1 + N^2 - 2N \cos \psi_s})) \quad (3.1)$$

Знаменатель в (3.1) представляет собой a_{+0}/a_0 , где a_{+0} определяется уравнением [13]

$$a_{+}^4 - s_{+}^2 \left(\frac{H^2}{4\pi\rho} + a_0^2 \right) + \frac{H_n^2}{4\pi\rho} a_0^2 = 0 \quad (3.2)$$

для состояния (0).

Такое задание физически оправдано тем, что число M_1^+ является МГД-аналогом газодинамического числа Маха. Условие $M_1^+ = 1$ соответствует вырождению ударной волны в слабый разрыв, интенсивность S_1 равна нулю.

Для расчета числа Маха второй ударной волны найдем состояние за S_1 из соотношений на ударной волне [3], используя в качестве определяющих параметров N , M_{st} , ψ и φ_1

$$M_{st} = \sqrt{M_1^2 + M_\tau^2} \quad (3.3)$$

$$M_\tau = (-M_1(u_{x1} \cos \theta - u_{y1} \sin \theta) + M_2 \sqrt{P_1 \eta_1}) \sin^{-1} \theta$$

$$\psi = \psi_s + \arctg(M_\tau / M_1) \quad (3.4)$$

$$\varphi_1 = \pi/2 + \varphi_s, \quad \varphi_s = \arctg(M_\tau / M_1)$$

Здесь величины

$$\eta_1 = \frac{\rho_0}{\rho_1}, \quad P_1 = \frac{p_1}{p_0}, \quad u_{x1} = \frac{V_{x1}}{a_0}, \quad u_{y1} = \frac{V_{y1}}{a_0}$$

рассчитаны из соотношения на МГД ударной волне для прямого скачка ($\varphi = \pi/2$), как это делается при нахождении M_{st} для догонного взаимодействия S_1 и S_2 [3].

Число Маха M_2^+ второй ударной волны задается отношением ее газодинамического числа Маха к a_{+1} , где a_{+1} определяется по формуле (3.2) для состояния (1), т.е.

$$M_2^+ = M_2 / (0,5(\sqrt{1 + N_1^2 + 2N_1 \cos \theta_{H1}} + \sqrt{1 + N_1^2 - 2N_1 \cos \theta_{H1}})) \quad (3.5)$$

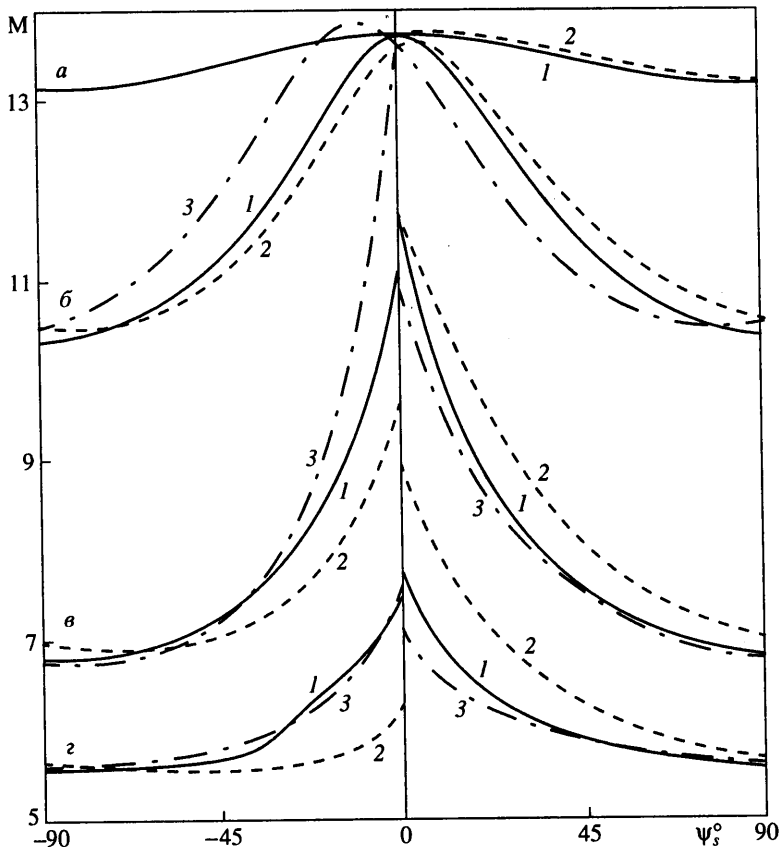
$$\theta_{H1} = \varphi_s - \theta - \omega_{H1}, \quad \omega_{H1} = \arctg(h_{y1} / h_{x1}), \quad h_{y1} = \frac{H_{y1}}{H_0}, \quad h_{x1} = \frac{H_{x1}}{H_0}$$

где θ_{H1} – угол наклона N_1 к n_{S2} .

Далее с помощью методов, описанных выше, решается газодинамическая задача с числами Маха ударных волн M_1^+ и M_2^+ и находятся углы наклона $\bar{\varphi}'_1$ и $\bar{\varphi}'_3$, задающие \bar{S}'_1 и \bar{R}'_3 (фиг. 2, б). Здесь и далее черта обозначает газодинамические волны и соответствующие им параметры.

Полученное решение определяет некоторую фиктивную газодинамическую ударную волну, найденную по МГД-числам Маха, с помощью которых учитываются влияние магнитного поля H на интенсивности S_1 и S_2 и их взаимодействие. Такая ударная волна не соответствует какому-либо реальному движению ударных волн и если попытаться вычислить состояние за \bar{S}'_1 , исходя из значений \bar{M}_{st} , определенных по формулам (3.3), куда вместо M_1 и M_2 подставлены M_1^+ и M_2^+ , используя $\bar{\varphi}'_1$ в соотношениях на газодинамических ударных волнах, то полученные плотность, давление и скорость среды будут существенно отличаться от соответствующих значений в точном МГД-решении даже при небольшой напряженности магнитного поля.

Определим эффективную "лидирующую" ударную волну S'_1 , распространяющуюся по состоянию (0) и возникшую в результате воздействия S_2 на S_1 (фиг. 1, б), используя

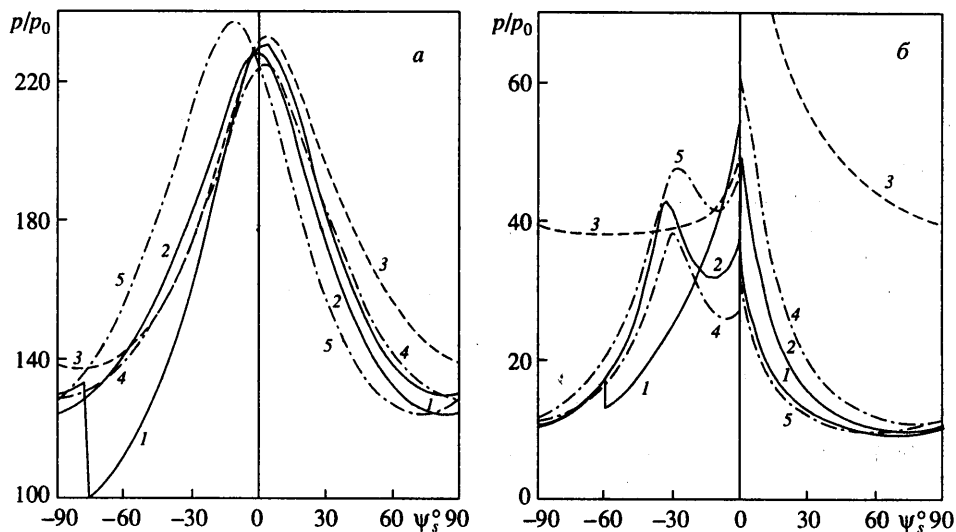


Фиг. 3. Зависимости числа Маха M_s лидирующей ударной волны S'_1 от наклона магнитного поля ψ_s при догонном взаимодействии S_1 и S_2 для $M_1 = 3$, $M_2 = 5$, $\theta = 30^\circ$. Случаи a – z соответствуют $N = 0.4$; 1.1; 2.0 и 2.5. Изображены: точное МГД-решение (кривые 1), газодинамическая аналогия M_s (кривые 2) и эффективное число Маха $M_s^{ef}(\psi_s)$ (формула (3.6) – кривые 3)

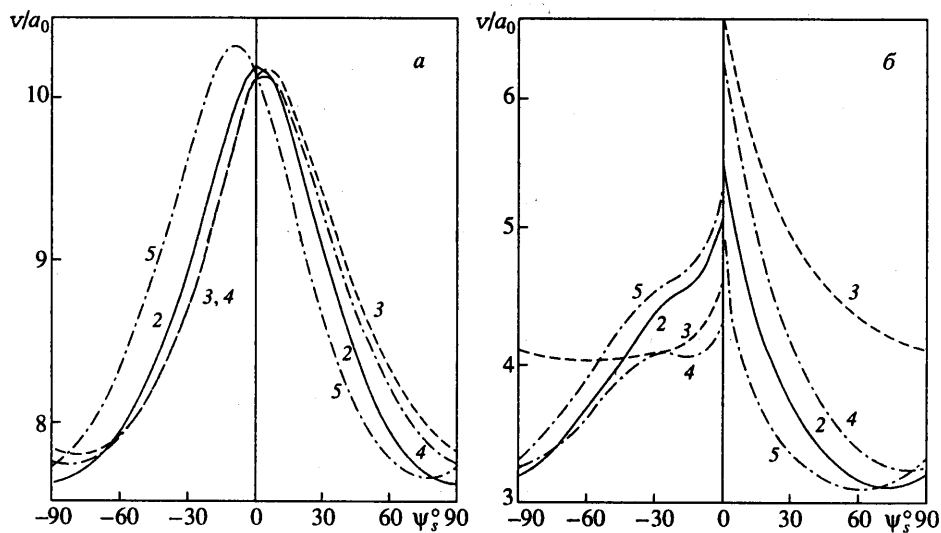
исходные газодинамические числа Маха M_1 и M_2 ударных волн S_1 и S_2 (т.е. вычисляя M_{st} по формулам (3.3)) и угол $\bar{\varphi}'_1$, полученный в газодинамическом решении. Такая ударная волна соответствует реальному движению S_1 и S_2 и исходит из их точки пересечения (фиг. 1, б). Тогда число Маха лидирующей ударной волны S'_1 находится по формуле $M_s = M_{st} \sin \bar{\varphi}'_1$. На фиг. 3 приведены зависимости $M_s(\psi_s)$ для различных значений N . Начиная с почти идеального совпадения ($\delta = 0.3\%$) с точным решением при $N = 0.4$ (слабое магнитное поле, магнитное давление в 5 раз меньше газодинамического) разница между точным и приближенным решениями растет с ростом N , становясь достаточно большой ($\delta = 8\%$) при $N = 2.5$ (очень сильное поле, магнитное давление в состоянии (0) в 5.2 раза больше газодинамического) и давая заниженные значения M_s при $\psi_s < 0$ и завышенные при $\psi_s > 0$ (фиг. 3, кривые 2).

Поэтому в качестве альтернативы рассмотрено задание эффективного газодинамического числа Маха $M_s^{ef} = \bar{M}_{st} \cdot a_{\pm 0}$

$$M_s^{ef} = 0.5 \bar{M}_{st} \sin \bar{\varphi}'_1 \left(\sqrt{1 + N^2 + 2N \cos \psi_s} + \sqrt{1 + N^2 - 2N \cos \psi_s} \right) \quad (3.6)$$



Фиг. 4. Зависимости давления, отнесенного к давлению в состоянии (0), от ψ_s для $M_1 = 3$, $M_2 = 5$, $\theta = 30^\circ$, $N = 1.1$ (а) и $N = 2.5$ (б). Изображены: точное МГД-решение (кривые 1 и 2-состояния на С и за S_1'), расчет по M_s и соотношения на газодинамической ударной волне (3), расчет по M_s и M_s^{ef} и соотношениям на МГД ударной волне (4, 5)



Фиг. 5. Зависимости скорости, отнесенной к звуковой скорости в состоянии (0), от ψ_s для тех же значений параметров и состояний, как на фиг. 4

Соответствующие зависимости построены на фиг. 3 (кривые 3) для достаточно сильного поля ($N = 1.1$ – магнитное и газодинамическое давление в состоянии (0) равны; $N = 2$ и 2.5), так как при $N = 0.4$ они практически совпадают с приближенным и точным решениями. При $N = 1.1$ зависимость $M_s^{ef}(\psi_s)$ адекватно описывает точное решение количественно ($\delta = 4.4\%$), сохраняя его форму, но смещена по углу ψ_s в ту или другую сторону на 10 – 15° , зависимость $M_s(\psi_s)$ ближе к точному решению

($\delta = 2.1\%$). При $N = 2$ точное решение лежит "в вилке" между $M_s(\psi_s)$ ($\delta = 7.9\%$) и $M_s^{ef}(\psi_s)$ ($\delta = 7.3\%$), а при $N = 2.5$ зависимость $M_s^{ef}(\psi_s)$ существенно ближе ($\delta = 2.2\%$) к точному решению, чем $M_s(\psi_s)$.

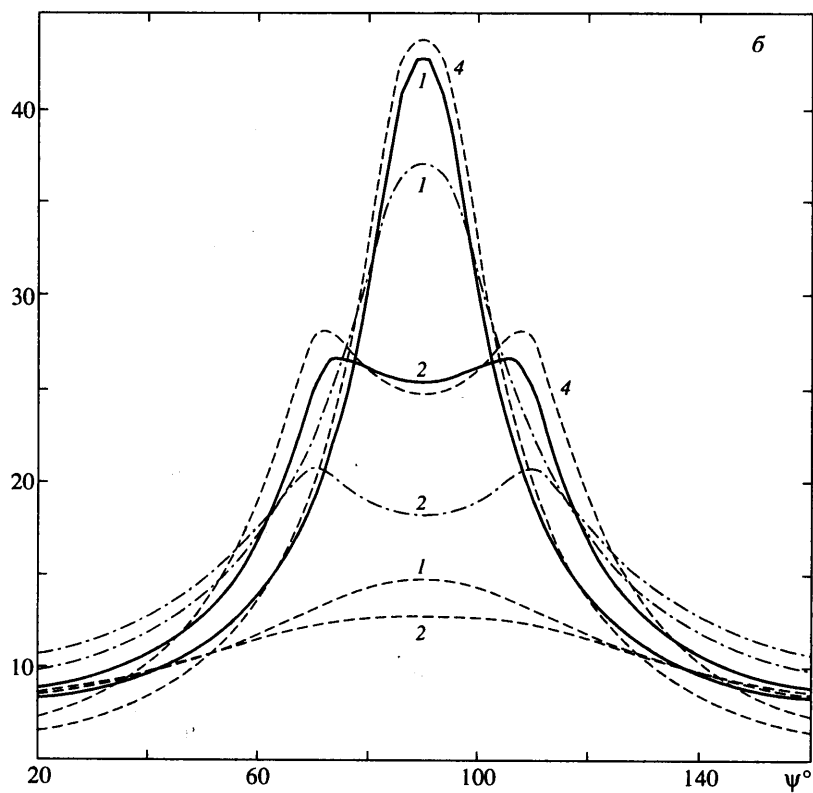
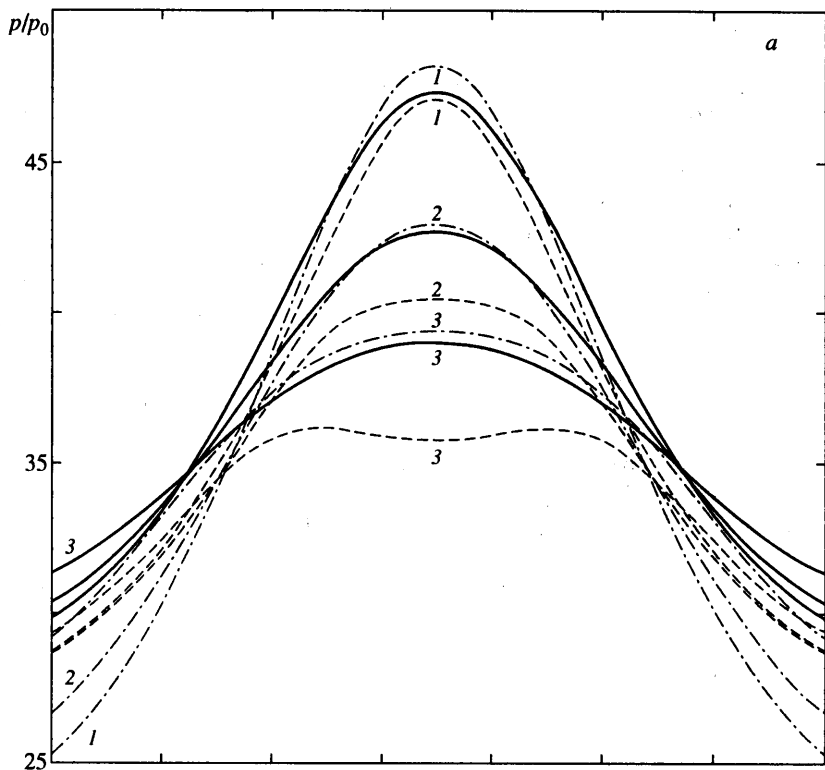
Из приведенных на фиг. 3 зависимостей $M_s(\psi_s)$ и $M_s^{ef}(\psi_s)$ видно, что согласие с точным решением улучшается при $\psi_s \rightarrow \pm \pi/2$. Это обусловлено тем, что в этом пределе точное магнитогидродинамическое решение само по себе слабо зависит от угла наклона \mathbf{H} из-за слабого изменения наклона магнитного поля в возникающем течении и предлагаемые газодинамические аналогии адекватно описывают предельное состояние за счет правильного выбора эффективного числа Маха взаимодействующих ударных волн.

Число Маха лидирующей ударной волны S'_1 является важнейшим параметром для правильного определения физических величин в состоянии (1'). На фиг. 4 и 5 приведены результаты расчетов давления и скорости за S'_1 , выполненных на основе M_s и M_s^{ef} по различным соотношениям на ударных волнах. Для выявления роли медленных волн в точном решении на фиг. 4 показано состояние на C (кривая 1). В умеренном магнитном поле ($N = 1.1$) при варьировании его наклона состояние среды за S'_1 достаточно хорошо описывается в рамках полной газодинамической аналогии, когда и число Маха, и угол наклона S'_1 , и состояние за S'_1 определяются в рамках газовой динамики (суммарная погрешность δ приближенного решения относительно состояния за S'_1 в точном решении равна: 9.3% для давления, 2.8% для скорости при использовании M_s и 4.3 и 2.2% для давления и скорости при использовании M_s^{ef}). Однако в сильном магнитном поле ($N = 2.5$) невозможно адекватно описать поведение газодинамических параметров, оставаясь в рамках газодинамической модели. В этом случае суммарная погрешность при вычислении давления превосходит 100% ($\delta = 123\%$ при использовании M_s) и лишь использование M_s^{ef} позволяет получить удовлетворительные результаты ($\delta = 20\%$). Для скорости погрешности несколько меньше ($\delta = 22$ и 9.3% соответственно).

Достаточно точное описание дает "гибридная" модель, в которой решение для угла наклона S'_1 находится в рамках газовой динамики, после чего определяется эффективное число Маха M_s^{ef} лидирующей ударной волны и состояние за ней рассчитывается по соотношениям на МГД ударных волнах. Расчет по M_s дает примерно такое же отклонение от точного решения для давления и скорости среды, но, как правило, в другую сторону по сравнению с расчетом по M_s^{ef} . Точное решение, как и для числа Маха лидирующей ударной волны, лежит в "вилке" между этими решениями (кривые 4, 5 на фиг. 4 и кривые 3, 4 на фиг. 5). Для гибридной модели $\delta = 25$ и 7.1% для давления и скорости соответственно.

Существенное различие зависимостей $P(\psi_s)$ и $V(\psi_s)$ в сильном магнитном поле ($N = 2.5$, фиг. 4, б и 5, б) при $\psi_s > 0$ и $\psi_s < 0$ объясняется различным направлением поворота вектора магнитного поля в ударных волнах S_1 и S_2 (разными знаками касательного магнитного поля) при $\psi_s < 0$, но достаточно далеко от $-\pi/2$ за счет разного направления электрических токов, текущих по фронтам S_1 и S_2 . В этом случае наклон магнитного поля оказывает определяющее влияние на течение и его изменение как в быстрых, так и в медленных МГД ударных волнах (кривые 1 и 2 на фиг. 4, б).

Фиг. 6. Давление на C , отнесенное к давлению в состоянии (0), как функция ψ при встречном столкновении ударных волн S_1 и S'_1 для $M_1 = 3$, $M'_1 = 3$, $N = 0.7$ (а) и $N = 1.5$ (б). Сплошные, пунктирные и штрихпунктирные кривые соответствуют точному МГД-решению, полной газодинамической аналогии и гибриднему решению. Кривые 1, 2, 3 соответствуют $\theta = 10, 40, 60^\circ$. Кривые 4 получены как полусумма давлений за преломленными МГД ударными волнами, угол наклона которых рассчитан по газодинамической аналогии



Предлагаемые приближенные решения (использующие M_s^{ef} , или "гибридная" модель) правильно отражают зависимость течения от наклона магнитного поля, но только для быстрых волн, и не описывают (и не могут описать) изменения, происходящие в медленных волнах, которые при столь сильном магнитном поле имеют одинаковый порядок с изменениями течения в быстрых волнах.

Результаты для меньших значений θ дают лучшее согласие точного решения с газодинамической аналогией, поскольку влияние двумерности взаимодействия, а вместе с ним сложных изменений магнитного поля в точном решении ослабевает с уменьшением θ . При $\theta = 5^\circ$ суммарные погрешности равны: при $N = 0.4$ получаем 1.3–0.7% для давления и около 0.4% для скорости; при $N = 1.1$ получаем 9.1–2.6% для давления и 2.1–1.4% для скорости (убывание с усложнением приближенной модели); при $N = 2.5$ от полностью неадекватного описания в полной газодинамической аналогии ($\delta(M_s) = 100\%$ для давления) при усложнении модели имеем $\delta(M_s^{ef}) = 13\%$ и $\delta = 4.7\%$ в гибридной модели (при расчете давления). Для скорости суммарные погрешности в 2–3 раза меньше.

Рассмотрим теперь встречное столкновение ударных волн S_1 и S'_1 , считая заданными все определяющие параметры для проводящей среды (0). Для газодинамической задачи зададим числа Маха S_1 и S'_1 равными магнитогидродинамическим числам Маха M_1^+ и $M_1'^+$, вычисленным по быстрым магнитозвуковым скоростям a_{+0} по нормальям к S_1 и S'_1 . Для этого находим углы наклона \mathbf{N} к n_{S_1} и n'_{S_1}

$$\theta_{H0} = \varphi_1 - \pi/2 - \psi, \quad \theta'_{H0} = \varphi'_1 + \pi/2 + \psi \quad (3.7)$$

после чего M_1^+ и $M_1'^+$ находятся по формулам, аналогичным (3.1), куда вместо M_1 и ψ_s подставлены M_1 и θ_{H0} (для нахождения M_1^+) или M'_1 и θ'_{H0} (для нахождения $M_1'^+$).

Затем решается газодинамическая задача с числами Маха ударных волн M_1^+ и $M_1'^+$ и находятся углы $\bar{\varphi}_2$ и $\bar{\varphi}'_2$, задающие \bar{S}_2 и \bar{S}'_2 (фиг. 2, а).

Проведенные расчеты показывают, что такая прямая газодинамическая аналогия дает удовлетворительное совпадение с точным решением только при сравнительно небольшой напряженности магнитного поля, когда магнитное давление в состоянии (0) не превосходит половины газодинамического давления ($N < 0.7$).

На фиг. 6, а показаны зависимости $p(\psi)$ (пунктирные кривые) в сравнении с точным решением (сплошные кривые). Правильно воспроизводя форму кривой $p(\psi)$, прямая газодинамическая аналогия дает несколько заниженные значения давления, причем разность растет с ростом θ , когда влияние двумерности взаимодействия усиливается. При увеличении напряженности магнитного поля (фиг. 6, б, $N = 1.5$, магнитное давление вдвое больше газодинамического) количественное совпадение исчезает ($\delta = 56$ и 47% при $\theta = 10$ и 40° соответственно). Этот факт можно объяснить кумулятивным влиянием магнитного поля на процесс взаимодействия. При встречном столкновении ударных волн вторичные ("преломленные") ударные волны S_2 и S'_2 распространяются по среде, сжатой и ускоренной в S_1 и S'_1 , причем магнитное поле также существенно трансформируется (в отличие от догонного взаимодействия, где лидирующая ударная волна распространяется по невозмущенному состоянию), поэтому для состояний (1) и (1') необходимо учитывать изменение магнитного поля. В достаточно сильном магнитном поле влияние изменения магнитного поля становится настолько существенным, что в рамках газодинамической модели невозможно построить решение, адекватно описывающее процесс взаимодействия.

В качестве альтернативы была рассмотрена "гибридная" модель, аналогичная использованной при догонном взаимодействии. Для правильного учета влияния магнитного поля в состояниях (1) и (1') исходные ударные волны S_1 и S'_1 рассчитывались по соотношениям на МГД-разрывах, после чего по формулам, аналогичным (3.3), определялись числа Маха течений относительно быстрых магнитозвуковых скоростей a_{+1} и a'_{+1} в состояниях (1) и (1') и далее решалась газодинамическая задача для этих чисел Маха.

Построенные на фиг. 6, б зависимости $p(\psi)$ (штрихпунктирные кривые) правильно качественно описывают форму точного решения. Количественное несовпадение между точным и гибридным решениями (суммарная погрешность $\delta = 14$ и 24% при $\theta = 10$ и 40° соответственно) на самом деле является результатом не совсем корректного сравнения: состояние на контактном разрыве C в точном решении, с которым сравнивается состояние $(2) = (2')$ в газодинамическом решении, является продуктом воздействия медленных волн, не имеющих газодинамических аналогов. Если для сравнения выбрать состояния (2) или $(2')$ в МГД-решении (фиг. 1, а), то совпадение будет гораздо лучше, так как изменения давления в медленных волнах приблизительно равны разности между точным и гибридным решениями.

Если, как это было сделано в догонном взаимодействии, после нахождения углов наклона газодинамических ударных волн $\bar{\varphi}_2$ и $\bar{\varphi}'_2$ использовать МГД-соотношения на разрывах для расчета состояний (2) и $(2')$, то совпадение с точным решением будет почти идеальным по форме аппроксимируемых зависимостей (пунктирные кривые 4 на фиг. 6, б, для них $\delta = 6\%$). Результаты расчетов плотности и скорости качественно совпадают с результатами для давления.

Имеющееся согласие между точным и приближенным решениями при $\psi \rightarrow 0$ и $\psi \rightarrow \pi$ связано с уменьшением угла между \mathbf{H} и \mathbf{V} во всем течении и приближением к решению с \mathbf{H} , параллельным \mathbf{V} , которое при $M_1 = M'_1$ имеет слабые медленные волны и может быть точно описано в рамках газовой динамики заменой газодинамического давления на полное давление.

Заключение. Для наклонного взаимодействия ударных волн (встречного и догонного) предложены газодинамические аналогии взаимодействия, которые позволяют в рамках существенно более простой модели достаточно адекватно описать сложные зависимости газодинамических параметров среды от напряженности и наклона магнитного поля. Предложенная аналогия не является простым пересчетом МГД-задачи в соответствующую газодинамическую, так как в чистой газовой динамике параметры течения никоим образом не зависят от напряженности магнитного поля и его наклона. Полная газодинамическая аналогия, в которой МГД-взаимодействие моделируется взаимодействием двух газодинамических ударных волн с числами Маха, вычисленными по быстрым магнитозвуковым скоростям для соответствующей МГД-задачи, хорошо описывает состояние среды при слабых и умеренных магнитных полях: для догонного взаимодействия при магнитном давлении, не превосходящем газодинамического давления, с точностью до $7-10\%$, при встречном взаимодействии при магнитном давлении, вдвое меньшем газодинамического, с точностью до $5-6\%$.

В более сильном поле хорошие результаты дает "гибридная" модель, обеспечивающая точность порядка $15-20\%$ для давления и $8-10\%$ для скорости. В гибридной модели состояние за взаимодействующими ударными волнами рассчитывается по МГД-соотношениям на разрывах и далее используется газодинамическая аналогия. В сильных полях промоделировать влияние магнитного поля удается только частично, так как существенный вклад в рассматриваемый процесс вносят медленные волны, которые выпадают из рассмотрения в газодинамической аналогии.

Автор благодарен А.А. Бармину за внимание к работе и ценные советы, позволившие существенно улучшить изложение материала.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-01069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бармин А.А., Пушкарь Е.А. Пересечение ударных волн в магнитной гидродинамике // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 3. С. 132–143.
2. Barmin A.A., Pushkar' E.A. Interaction of strong discontinuities in magnetized conducting medium // Shock Waves @ Marseille II. Physico-Chemical Processes and Nonequilibrium Flow, Proc. 19th Intern. Symp. on Shock Waves / Ed. R. Brun, L.Z. Dumitrescu. N.Y.: Springer, 1995. P. 433–438.
3. Пушкарь Е.А. Регулярное наклонное взаимодействие догоняющих ударных волн в проводящей среде с магнитным полем // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 127–143.
4. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967. 428 с.
5. Grib S.A., Brunelli B.E., Dryer M., Shen W.W. Interaction of interplanetary shock waves with the bow shock-magnetopause system // J. Geophys. Res. 1979. V. 84. № A10. P. 5907–5921.
6. Zhuang H.C., Russell C.T., Smith E.J., Gosling J.T. Three-dimensional interaction of interplanetary shock waves with the bow shock and magnetopause: A comparison of theory with ISEE observations // J. Geophys. Res. 1981. V. 86. № A7. P. 5590–5600.
7. Grib S.A. Interaction of non-perpendicular / parallel solar wind shock waves with the Earth's magnetosphere // Space Sci. Rev. 1982. V. 32. № 1–2. P. 43–48.
8. Barnes A. Motion of the heliospheric termination shock: A gas dynamic model // J. Geophys. Res. 1993. V. 98. № A9. P. 15137–15146.
9. Naidu K., Barnes A. Motion of the heliospheric termination shock. 3. Incident interplanetary shocks // Geophys. Res. 1994. V. 99. № A6. P. 11553–11560.
10. Naidu K., Barnes A. Motion of the heliospheric termination shock. 4. MHD effects // J. Geophys. Res. 1994. V. 99. № A9. P. 17673–17679.
11. Whang Y.C., Burlaga L.F. Interaction of global merged interaction region shock with the heliopause and its relation to the 2- and 3-kHz radio emissions // J. Geophys. Res. 1994. V. 99. № A11. P. 21457–21465.
12. Baranov V.B., Barmin A.A., Pushkar' E.A. Interaction of interplanetary shock with the heliospheric termination shock: Two-dimensional magnetohydrodynamic model // J. Geophys. Res. 1996. V. 101. № A12. P. 27465–27481.
13. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
14. Пушкарь Е.А. Наклонные неплоскополяризованные МГД ударные волны и их взаимодействие // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 4. С. 136–152.
15. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
16. Пушкарь Е.А. О косых магнитогидродинамических ударных волнах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 4. С. 106–116.
17. Пушкарь Е.А. Обобщенные поляры плоскополяризованных стационарных автомодельных течений в магнитной гидродинамике // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 3. С. 111–119.
18. Пушкарь Е.А. Простые стационарные волны в наклонном магнитном поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 5. С. 130–138.
19. Pushkar' E.A. The numerical simulation methods of the oblique shock wave interaction in magnetized conducting media // Book Abstr., 3rd Russian-Japanese Joint Symp. on Computational Fluid Dynamics. Vladivostok, Russia, 1992. V. 2. P. 158–159.
20. Бармин А.А., Пушкарь Е.А. Наклонное взаимодействие сильных разрывов в магнитной гидродинамике // Механика. Современные проблемы. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 100–105.
21. Бармин А.А., Пушкарь Е.А. Наклонное взаимодействие альфвеновского и контактного разрывов в магнитной гидродинамике // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 131–142.
22. Бармин А.А., Пушкарь Е.А. Встречное наклонное взаимодействие альфвеновского разрыва с быстрой магнитогидродинамической ударной волной // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 6. С. 120–136.
23. Бармин А.А., Пушкарь Е.А. Нерегулярное взаимодействие ударных волн в магнитной гидродинамике // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 184–198.
24. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.I.2001