

УДК 532.525:532.517.4

© 2001 г. А.С. КИСЕЛЕВ, В.Г. ЛУЩИК, Л.Е. СТЕРНИН, А.Е. ЯКУБЕНКО

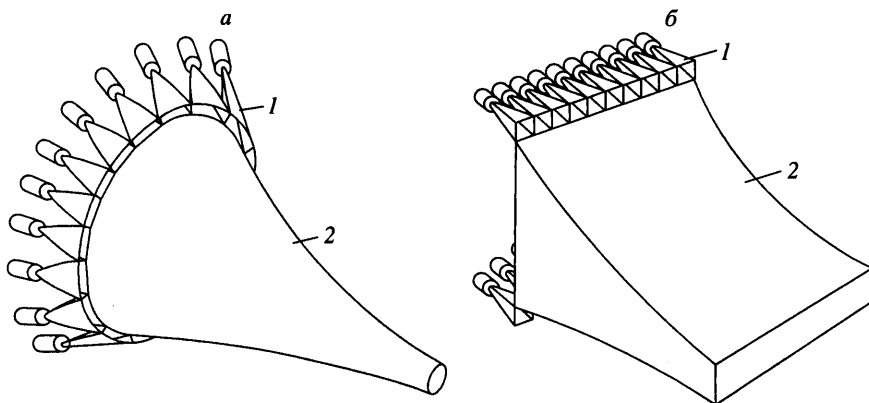
ПОТЕРИ УДЕЛЬНОГО ИМПУЛЬСА ИЗ-ЗА ТРЕНИЯ В ШТЫРЕВЫХ СОПЛАХ

Рассмотрен класс сопел с центральным телом – штыревых сопел с осесимметричной и плоской геометрией центрального тела. Изложена методика построения контуров этих сопел. С использованием трехпараметрической модели турбулентности проведены расчеты пограничного слоя и определены величины потерь удельного импульса из-за трения в штыревых соплах, а также в сопле Лавала с той же степенью расширения. Проведен сравнительный анализ полученных результатов расчета, позволивший определить преимущества и недостатки рассмотренных сопел.

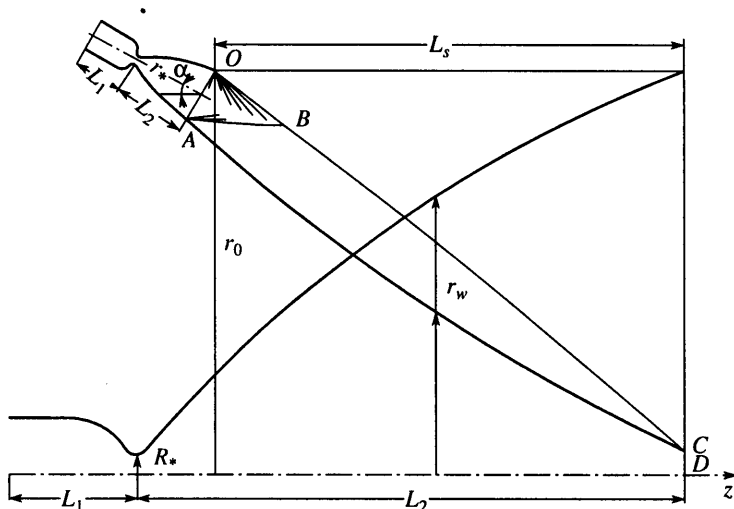
Трение в реактивных соплах является основной составляющей потерь импульса. Поэтому при выборе той или иной конструктивной схемы двигателя необходимо для рассматриваемых вариантов учитывать различие потерь в соплах из-за трения. Особое значение это имеет при сравнительном анализе характеристик штыревых сопел (фиг. 1), интерес к которым возник еще в начале 60-х годов (см., например, разд. 2.1.2 монографии [1]). Штыревые сопла относятся к классу кольцевых сопел (сопел с центральным телом), у контура расширяющейся части которых почти или полностью отсутствует внешняя образующая. Значительное количество в основном экспериментальных исследований по этим соплам было выполнено с тех пор у нас и за рубежом. Однако резкий рост интереса к штыревым соплам произошел в последние годы, когда в США фирмой "Локхид-Мартин" (Lockheed-Martin) при поддержке НАСА (NASA) началось создание экспериментального летательного аппарата X-33 со штыревым соплом, предназначенного для отработки уникального по своим характеристикам натурного одноступенчатого воздушно-космического аппарата "Венче Стар" (Venture Star) с двигателем RS-2200 также со штыревым соплом. Высокая эффективность аппарата "Венче Стар" из-за использования штыревого сопла с большой степенью расширения, по мнению фирмы "Локхид-Мартин" и НАСА, позволит в этом десятилетии заменить им известную систему "Спейс Шаттл" (Space Shuttle) и на порядок понизит стоимость вывода полезного груза на околоземную орбиту (см., например, [2]).

Как отмечалось выше, работы по изучению характеристик штыревых сопел ведутся уже около 40 лет; к одной из работ начального периода исследования штыревых сопел нужно отнести математическое исследование [3] оптимальной формы контура штыревого сопла, в которой практически без изменения применены формулы, выполняющиеся на экстремальной характеристике обычного сопла, к случаю оптимизации течения в штыревом сопле в пустоте. К одной из наиболее важных работ последнего периода следует отнести работу [4].

Цель настоящей работы – сравнение потерь из-за трения трех вариантов сопел с одинаковой степенью расширения: осесимметричного и плоского штыревых сопел (фиг. 1) и осесимметричного сопла Лавала. Ниже излагаются методики построения контура штыревого сопла и расчета потерь из-за трения, а также основные результаты расчетов.



Фиг. 1. Схемы штыревых сопел (сопел с центральным телом): *a* – осесимметричное сопло, *б* – плоское, *1* – сопла предварительного расширения, *2* – штырь (центральное тело)



Фиг. 2. Контуры штыревого сопла и сопла Лаваля: L_1 – длина дозвуковой части, L_2 – длина сверхзвуковой части сопла, L_s – длина штыря, r_w – текущий радиус контура, r_* , R_* – радиусы критического сечения, r_0 – радиус обечайки, α – угол наклона сопел предварительного расширения к оси симметрии штыря

1. Построение контура осесимметричного и плоского штыревых сопел. В настоящее время установлено, что наилучшей формой штыревого сопла (AC на фиг. 2), обеспечивающего высокий пустотный удельный импульс двигателя и почти полное авторегулирование тяги на режимах перерасширения, является штыревое сопло с соплами первичного расширения, с пучком волн разрежения в точке O и с C -характеристикой OC , часть которой BC является вариационной.

Продукты сгорания первоначально расширяются в расположенных на периферии центрального тела соплах предварительного расширения с последующим обтеканием штыря. Для лучшего регулирования на нерасчетных режимах давление на срезе сопел предварительного расширения, т.е. в сечении AO , должно быть около одной атмосферы. При высоких значениях внешнего давления газ прижимается к центральному

телу, в результате чего перерасширение газа с сопутствующими ему потерями импульса не происходит. Благодаря этому данное сопло авторегулируется при изменении внешнего давления от земного и до более низкого давления, соответствующего его расчетной степени расширения. Таким образом, штыревое сопло может иметь преимущество перед соплом Лавалья при их больших степенях расширения и при изменении наружного давления в широком диапазоне значений.

Расчеты течения газа при профилировании сопел проводились при следующих допущениях: влияние трехмерности и вязкости не учитывалось, компоненты газа считались полностью перемешанными и смесь, состоящая из продуктов сгорания керосина и жидкого кислорода, находилась в термодинамическом равновесии. Давление в камере сгорания $p_k = 200 \text{ кгс/см}^2$. Площадь критического сечения была выбрана так, чтобы обеспечить тягу в пустоте штыревого сопла 200 тс, близкую к тяге двигателя RS-2200. В расчетах были заданы длина штыря и степень расширения $\bar{F}_a = 200$, которая определялась по выходной площади, включающей торец. Количество сопел предварительного расширения $N = 20$. Оно определялось исходя из того, что существует ограничение на величину диаметра критического сечения этих сопел, вызванное необходимостью их охлаждения. Заведомо проходят сопла с тягой не менее 10 тс.

Давление в выходном сечении сопел предварительного расширения $p_a = 1 \text{ кгс/см}^2$, соответствующая ему степень расширения $\bar{f}_a = 23,3$ и число Маха $M_a = 3,59$. В осесимметричном варианте отношение сторон выходного сечения этих сопел $l_\phi / l_r \approx 4\pi\bar{F}_a / N\bar{f}_a \approx 5$, где l_r – сторона вдоль радиального направления (AO на фиг. 2), l_ϕ – азимутального. Следовательно, расширение происходит в основном в одном (азимутальном) направлении. Большая степень расширения в одном из направлений для осесимметричного варианта приводит к большой длине сопел предварительного расширения и развитой поверхности трения. В плоском варианте выбор ширины штыря позволяет использовать сопла предварительного расширения с выходным сечением, близким к квадрату. Газодинамические параметры на выходе из сопел предварительного расширения использовались при профилировании центрального тела.

Фигура 2 отражает последовательность построения экстремального контура центрального тела. На ней изображены сопло предварительного расширения с выходным сечением AO , контур центрального тела AC , торец CD . В точке O происходит разворот газа с падением давления в пучке волн разрежения. В точке стыка сопел предварительного расширения и штыря A в общем случае есть излом контура, который также приводит к образованию волн разрежения. На рисунке отражены пучки характеристик первого семейства C^+ , исходящие из точки A , и второго C^- – из точки O , с "закрывающими" характеристиками AB и OC .

По известным параметрам в сечении AO первоначально методом характеристик рассчитывалось течение в области AOB . Контур центрального тела определялся из условия создания максимальной тяги при работе двигателя в вакууме. Это означает, что замыкающая C^- -характеристика BC – экстремальная и в точке C выполняется условие Буземана для пустоты. Уравнения экстремали и условие Буземана приведены в [1], используемый при расчетах газовой динамики метод характеристик – в [5]. Расчеты проводились итерациями при фиксированной длине штыря L_s , которая отсчитывалась от точки O . Для определенного угла наклона α сопел предварительного расширения изменялся угол излома контура в точке A пока не выполнится условие Буземана в точке C . Далее по известным параметрам на характеристиках AB и BC определялся контур стенки AC . Таким образом можно получить семейство экстремальных контуров в зависимости от угла наклона сопел предварительного расширения.

Для плоского варианта штыревого сопла с равномерным потоком на выходе сопел предварительного расширения проведенными расчетами было определено, что максимальная тяга реализуется при наклоне сопел предварительного расширения, соответ-

ствующем течению без излома в точке A . Это объясняется тем, что в этом случае экстремальной является вся "замыкающая" C^- -характеристика OC , а не только ее часть – BC . Следовательно, есть только один свободный параметр задачи – угол наклона сопел предварительного расширения, который определяется в ходе решения. Данный подход был расширен – рассмотренные в статье штыревые сопла, включая осесимметричный вариант, были рассчитаны при отсутствии излома в точке A .

Построенные подобным образом штыревые сопла не только имеют высокий удельный импульс при работе двигателя в пустоте, но и, как показали расчеты, обеспечивают безударное течение газа на земле при наличии атмосферного противодавления.

2. Расчет пограничного слоя в сопле. Для расчета течения и теплообмена в сжимаемом турбулентном пограничном слое однородного газа с заданным градиентом давления была использована система уравнений неразрывности, движения и энергии, которая для стационарного осесимметричного случая приведена в [6].

Для определения величины турбулентного трения, входящего в уравнение движения, использована трехпараметрическая модель турбулентности [7], обобщенная на течения с теплообменом [8]. В модели используется уравнение переноса для напряжения сдвига $\tau = -\langle u'v' \rangle$, энергии турбулентности E и параметра $\omega = E/L^2$, имеющего физический смысл завихренности турбулентности и содержащего поперечный интегральный масштаб турбулентности L .

Для определения турбулентного потока тепла, входящего в уравнение энергии, использована гипотеза, основанная на введении постоянного по толщине пограничного слоя турбулентного числа Прандтля Pr_t .

Эти уравнения для сжимаемого турбулентного пограничного слоя и значения констант, входящих в уравнения модели турбулентности, приведены в [8].

Входящий в уравнение движения градиент давления вычисляется по распределению числа Маха $M_w(x)$ вдоль стенки сопла, которое определялось из решения двухмерной газодинамической задачи о течении невязкого газа с постоянным значением показателя адиабаты γ в сопле заданной геометрии $r_w(x)$.

Граничные условия на стенке сопла, на внешней границе пограничного слоя и во входном сечении сопла приведены в [9].

Теплофизические свойства среды в зависимости от температуры и давления и связь между энтальпией и температурой задавались в табличном виде.

3. Потери удельного импульса из-за трения в пограничном слое. Потери тяги реактивного двигателя из-за трения в пограничном слое сопла Лавала определяются зависимостью

$$\Delta P_f = Pr_e u_e^2 \delta^{**} \cos \vartheta, \quad \delta^{**} = \int_0^\delta \frac{r}{r_w} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \quad (3.1)$$

Здесь $\Pi = 2\pi r_w$ – периметр сопла, δ^{**} – толщина потери импульса в пограничном слое, r – радиус, отсчитываемый от оси симметрии сопла, ϑ – угол наклона контура к оси симметрии, параметры с индексом "e" соответствуют условиям на границе пограничного слоя толщиной δ .

Коэффициент потерь тяги (удельного импульса) из-за трения в пограничном слое сопла определяется как

$$\zeta_f = \frac{\Delta P_f}{P_i} \quad (3.2)$$

$$P_i = Gu_1 + p_1 F = \rho_1 u_1^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma M_1^2} \right) F \quad (3.3)$$

Здесь P_i – идеальное значение тяги в пустоте, которое выражается через параметры невязкого одномерного (с индексом "1") течения: скорость u_1 , давление p_1 , расход топлива $G = \rho_1 u_1 F$, площадь проходного сечения сопла $F = \pi r_w^2$, показатель адиабаты γ , число Маха M_1 .

Подставляя выражения для ΔP_f (3.1) и P_i (3.3) в (3.2) с учетом того, что $\Pi/F = 2/r_w$, получим зависимость для коэффициента потерь удельного импульса из-за трения в пограничном слое сопла Лавала

$$\zeta_f = \frac{2\delta^{**}/r_w}{1 + (\gamma M_1^2)^{-1}} \frac{\rho_e u_e^2}{\rho_1 u_1^2} \cos \vartheta \quad (3.4)$$

Если положить для сопел достаточно большого удлинения угол наклона контура к оси ϑ в выходном сечении малым, т.е. $\cos \vartheta \approx 1$, а течение считать близким к одномерному, т.е. $\rho_e u_e^2 \approx \rho_1 u_1^2$, выражение для ζ_f упростится и примет вид, в котором оно использовалось с 50-х годов при проектировании сопел ЖРД, а также в научной и учебной литературе [10, 11]

$$\zeta_f = \frac{2\delta^{**}/r_w}{1 + (\gamma M_1^2)^{-1}} \quad (3.5)$$

Однако для сопел большого расширения из-за существенного отличия течения в выходном сечении сопла от одномерного использование выражения (3.5) может привести к большим погрешностям определения коэффициента потерь удельного импульса из-за трения ζ_f . Так, для рассмотренного ниже сопла Лавала (см. фиг. 2) с $\bar{r}_a = r_a / R_* \approx 14$ величина ζ_f (3.5) на выходе из сопла отличается от ζ_f (3.4) на 34%, что недопустимо.

Для штыревых сопел методика определения потерь удельного импульса из-за трения в пограничном слое может быть построена аналогично изложенной выше для сопла Лавала с учетом следующих предположений.

Сопла предварительного расширения рассчитываются отдельно от штыря в предположении, что они являются осесимметричными не только в дозвуковой части, как это имеет место на самом деле, но и в сверхзвуковой с площадью проходного сечения, равной площади действительного сопла.

В сечении их стыка со штырем сопла предварительного расширения объединяются в общую полость, верхняя часть которой является обечайкой штыревого сопла, а нижняя часть переходит непосредственно в поверхность штыря; потери удельного импульса на боковых перегородках, разделяющих сопла предварительного расширения, не учитываются.

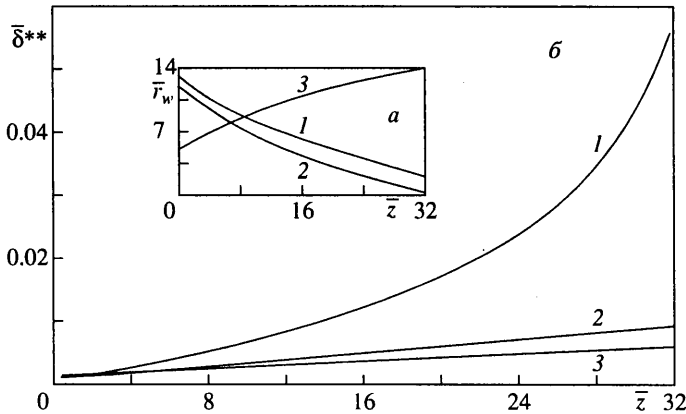
Параметры пограничного слоя (M_w , ρ_e , u_e , δ^{**}), определенные на выходе из сопел предварительного расширения, для обечайки являются выходными, а для расчета штыря наряду с профилями скорости, температуры и характеристик турбулентности – входными.

С учетом этих предположений выражение для потери тяги двигателя из-за трения в пограничном слое штыревого сопла ΔP_f будет состоять из потерь на обечайке ΔP_{fn} (далее величины с индексом "n") и на штыре ΔP_{fs} (далее величины с индексом "s") и иметь аналогичный (3.1) вид

$$\Delta P_f = \Delta P_{fn} + \Delta P_{fs} = \{\Pi \delta^{**} \rho_e u_e^2 \cos \vartheta\}_n + \{\Pi \delta^{**} \rho_e u_e^2 \cos \vartheta\}_s \quad (3.6)$$

Здесь Π_n и Π_s – периметры стенок обечайки и штыря, на которых образуется пограничный слой.

Идеальное значение тяги в пустоте для штыревого сопла определяется в соответствии с (3.3), где F – площадь проходного сечения штыревого сопла.



Фиг. 3. Контур сверхзвуковой части сопла $\bar{r}_w = r_w/R_*$ (а) и изменение относительной толщины потери импульса $\bar{\delta}^{**}$ (б) по длине сопла $\bar{z} = z/R_*$: линия 1 – осесимметричный штырь, 2 – плоский штырь, 3 – эквивалентное сопло Лавала

Величины Π и F для осесимметричного и плоского штыря соответственно имеют вид

$$\Pi_n = 2\pi r_0, \quad \Pi_s = 2\pi r_w, \quad F = \pi(r_0^2 - r_w^2) \quad (3.7)$$

$$\Pi_n = \Pi_s = 2h, \quad F = 2h(r_0 - r_w)$$

Здесь r_0 – радиус (высота) обечайки, $r_w(z)$ – радиус (высота) штыря относительно оси симметрии z , h – ширина плоского штыря.

Подставляя выражения для ΔP_f (3.6) и P_i (3.3) в (3.2) с учетом соотношений для Π , F (3.7), получим зависимость для коэффициента потерь тяги (удельного импульса) из-за трения в пограничном слое штыревого сопла в виде

$$\zeta_f = \zeta_{fn} + \zeta_{fs} = \frac{1}{1 - \bar{r}_s} \left\{ \left(\frac{2}{1 + \bar{r}_s} \right)^i \frac{\delta_n^{**} / r_0}{1 + (\gamma M_1^2)^{-1}} \frac{(\rho_e u_e^2)_n}{\rho_1 u_1^2} \cos \vartheta_n + \left(\frac{2\bar{r}_s}{1 + \bar{r}_s} \right)^i \frac{\delta_s^{**} / r_0}{1 + (\gamma M_1^2)^{-1}} \frac{(\rho_e u_e^2)_s}{\rho_1 u_1^2} \cos \vartheta_s \right\} \quad (3.8)$$

Здесь $\bar{r}_s = r_w / r_0$ – относительный радиус (высота) штыря, $i = 1$ для осесимметричного, $i = 0$ для плоского штыря.

4. Результаты расчетов. Расчет потерь удельного импульса из-за трения в пограничном слое проведен для осесимметричного и плоского штыревых сопел (фиг. 1), геометрические характеристики которых представлены в таблице. Для сравнения было рассчитано также эквивалентное сопло Лавала, имеющее близкие к штыревым соплам значения степени расширения и длины сверхзвуковой части, контуры которых приведены на фиг. 3, а.

Для всех трех сопел были приняты одинаковые исходные данные: состав продуктов сгорания, давление p_k , температура T_k в камере сгорания, постоянная по длине сопла относительная температура стенки $T_w/T_k = 0,3$. Количество сопел предварительного расширения N для осесимметричного и плоского штыря было одно и то же. Суммарная площадь критического сечения сопел предварительного расширения составляла $F_* = \pi r_*^2 N$ (r_* – радиус критического сечения одного сопла) и была равна площади критического сечения эквивалентного сопла Лавала, радиус критического сечения которого $R_* = \sqrt{N} r_*$. Относительное значение ширины плоского штыря $\bar{h} = h / R_* = 22,4$.

Варианты	\bar{L}_1	\bar{L}_2	\bar{L}_3	\bar{r}_a	\bar{r}_0	$100 \cdot \overline{\delta^{**}}$	$\zeta_f, \%$	$\zeta_p, \%$
Сопло предварительного расширения								
Осесимметричный штырь	0,6	28,4	–	4,8	–	0,109	1,6	–
Плоский штырь	10	15,7	–	4,8	–	0,070	0,6	–
Штырь								
Осесимметричный	0,6	–	31,7	2,05	14,10	5,61	2,6	0,3
Плоский	–	–	31,9	0,34	14,06	0,925	1,6	0,7
Эквивалентное сопло Лавала								
–	0,6	37,5	–	13,96	–	0,554	1,7	0,7

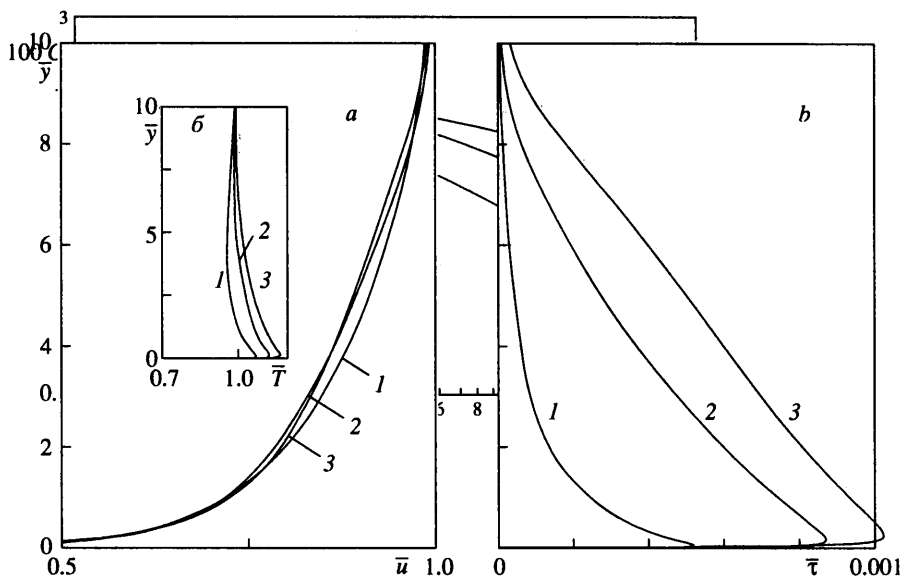
Безразмерные значения линейных размеров сопел, приведенные на фиг. 3, а и в таблице, для сопел предварительного расширения отнесены к r_* , а для штыря и эквивалентного сопла Лавала – к R_* . Как видно из таблицы, степень расширения осесимметричного и плоского штыревых сопел и эквивалентного сопла Лавала $\bar{F} = \bar{r}_0^2 - \bar{r}_a^2 \approx 2(\bar{r}_0 - \bar{r}_a)\bar{h} / \pi \approx \bar{r}_a^2 \approx 200$ действительно примерно одинакова.

На фиг. 3, б представлено изменение по длине выходной части сопел толщины потери импульса δ^{**} – величины, определяющей, согласно (3.4), (3.9), потери удельного импульса из-за трения в сопле. Значения толщин потери импульса $\overline{\delta^{**}}$ отнесены к радиусу обечайки r_0 для штыревых сопел и к радиусу выходного сечения r_a для эквивалентного сопла Лавала. Величины $\overline{\delta^{**}}$ для плоского штыря и эквивалентного сопла Лавала (фиг. 3, б, линии 2 и 3) близки, а для осесимметричного штыря (линия 1) заметно их превосходит (см. также таблицу). Это можно объяснить тем, что периметр Π_a осесимметричного штыря на выходе намного меньше периметра плоского штыря и эквивалентного сопла Лавала, в то время как площади вытеснения $\Pi_a \delta^{**}$ (и близких им толщин потери импульса $\Pi_a \overline{\delta^{**}}$) для всех трех сопел примерно одинаковы.

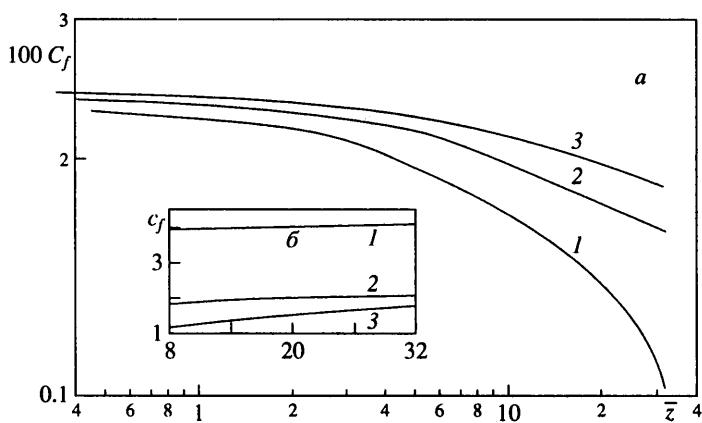
Существенный рост толщины вытеснения (толщины пограничного слоя) к выходу для осесимметричного штыря приводит к изменению характера течения в пограничном слое. Это изменение в первую очередь относится к характеристикам турбулентности пограничного слоя, которые на фоне слабого изменения профилей скорости (фиг. 4, а) и температуры (фиг. 4, б) меняются во много раз сильнее. Из фиг. 4, в, где представлены профили напряжения сдвига $\bar{\tau} = \tau / u_c^2$ по толщине пограничного слоя $\bar{y} = y / \delta^{**}$, видно, что в случае осесимметричного штыря (линия 1) имеет место достаточно сильная ламинаризация пограничного слоя. Это подтверждает также и зависимость для энергии турбулентности E .

Ламинаризация течения в случае осесимметричного штыря приводит к резкому снижению коэффициента трения в области, близкой к выходному сечению (линия 1, фиг. 5, а), по сравнению с плоским штырем (линия 2) и эквивалентным соплом Лавала (линия 3).

Результаты расчета коэффициентов потерь удельного импульса из-за трения ζ_f и рассеяния ζ_p для всех трех сопел представлены в таблице и на фиг. 5, б. Для штыревых сопел (линии 1 и 2) учтены потери в соплах предварительного расширения



Фиг. 4. Профили скорости $\bar{u} = u/u_e$ (а), температуры $\bar{T} = T/T_e$ (б) и напряжения сдвига $\bar{\tau} = \tau/u_e^2$ (в) в пограничном слое $\bar{y} = y/\delta^{**}$ в выходном сечении сопла: обозначения – см. фиг. 3



Фиг. 5. Изменение коэффициента трения C_f (а) и потерь удельного импульса из-за трения ζ_f по длине сопла \bar{z} : обозначения – см. фиг. 3

(см. таблицу), которые для осесимметричного штыря в соответствии с (3.9) составляют $\zeta_{fn} = 1,6\%$, а для плоского – $0,6\%$. Суммарные потери удельного импульса из-за трения $\zeta_f = \zeta_{fn} + \zeta_{fs}$ для осесимметричного штыря составляет $4,2\%$, для плоского – $2,2\%$. Для эквивалентного сопла Лавала $\zeta_f = 1,7\%$, что близко к плоскому штырю и намного ниже, чем для осесимметричного штыря.

Таким образом, штыревое сопло с осесимметричным центральным телом по величине потерь удельного импульса из-за трения ζ_f из трех рассмотренных сопел оказалось наилучшим. Большая величина ζ_f для него обусловлена особенностями

компоновки штыревого сопла с осесимметричным центральным телом, для которого сопла предварительного расширения получаются почти в 2 раза длиннее, чем для плоского штыря (\bar{L}_2 в таблице), что приводит к существенному росту величины ζ_{fn} .

Что же касается плоского штыревого сопла, то по величине потерь удельного импульса из-за трения оно лучше осесимметричного штыревого сопла и близко к соплу Лавалья, обладая по сравнению с последним таким существенным преимуществом, как авторегулирование тяги на нерасчетных режимах работы.

Заключение. Рассмотрен класс сопел с центральным телом, имеющих укороченную внешнюю образующую расширяющейся части контура, – штыревых сопел с осесимметричной и плоской геометрией центрального тела. Изложена методика построения контуров этих сопел.

Получены выражения для потерь удельного импульса из-за трения (с учетом потерь в соплах предварительного расширения) ζ_f в штыревых соплах. С использованием трехпараметрической модели турбулентности проведены расчеты пограничного слоя и определены величины ζ_f в осесимметричном и плоском штыревых соплах, а также в сопле Лавалья с той же степенью расширения, что и штыревые сопла.

Сравнительный анализ полученных результатов расчета показал, что плоское штыревое сопло по величине ζ_f оказалось более предпочтительным по сравнению с осесимметричным. По сравнению с соплом Лавалья оно не выигрывает по величине потерь удельного импульса ζ_f , но обладает таким существенным преимуществом, как авторегулирование тяги на нерасчетных режимах работы.

Авторы благодарят А.Н. Крайко за плодотворную дискуссию и ценные замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00891).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стернин Л.Е. Основы газовой динамики. М.: Изд-во МАИ, 1995. 336 с.
2. Kaplan M.A. The reusable launch vehicle: Is stage set? // Launchspace. 1997. March 154. P. 26–30.
3. Rao G.V.R. Spike nozzle contour for optimum thrust // Planet and Space Sci. 1961. № 4. P. 560–561.
4. Baftalovskii S.V., Kraiko A.N., Tillyayeva N.I. Optimal design of self-controlled spike nozzles and their thrust determination of start // 9-th International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference, November 1999, Norfolk, Virginia, USA. A collection of Technical Papers. AIAA-99-4955. 11 p.
5. Киселев А.С., Стернин Л.Е. Компактная разностная схема со скалярными прогонами для интегрирования уравнений газовой динамики // ЖВММФ. № 1. С. 1999. С. 147–155.
6. Иевлев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 256 с.
7. Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 13–25.
8. Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Трехпараметрическая модель турбулентности: расчет теплообмена // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 40–52.
9. Лущик В.Г., Сизов В.И., Стернин Л.Е., Якубенко А.Е. Потери удельного импульса из-за трения и рассеяния в сопле с завесным охлаждением // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 82–93.
10. Пирумов У.Г., Росляков Г.С. Течения газа в соплах. М.: Изд-во МГУ, 1978. 288 с.
11. Алемасов В.Е., Дрезалин А.Ф., Тишин А.П. Теория ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1989. 463 с.