

УДК 532.517.4:532.526.2

© 2001 г. С.Ф. БЁРЧ, А.Б. ЛЕБЕДЕВ, Д.А. ЛЮБИМОВ, А.Н. СЕКУНДОВ

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ СТРУЙНЫХ И ПОГРАНСЛОЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Разработаны новые анизотропные алгебраические определяющие соотношения для тензора напряжений Рейнольдса, позволяющие правильно моделировать турбулентные трехмерные течения, которые не удается описать с помощью традиционных современных полуэмпирических моделей турбулентности. В эти соотношения кроме известного нелинейного слагаемого Саффмана включены новые линейные члены, учитывающие влияние стенки. Проведены численные расчеты нескольких двумерных и трехмерных турбулентных течений с использованием осредненных уравнений Навье – Стокса. Результаты расчетов сопоставлены с известными опытными данными.

**1. Формулировка задачи о построении анизотропных алгебраических определяющих соотношений.** Для замыкания осредненных уравнений Навье – Стокса (уравнений Рейнольдса) в случае использования моделей для турбулентной вязкости применяются дополнительные алгебраические определяющие соотношения, которые связывают тензор напряжений Рейнольдса  $-\langle u_i u_j \rangle$  с тензором скоростей деформаций  $S_{ij}$ . Наиболее часто используются простейшие определяющие соотношения

$$-\langle u_i u_j \rangle + \frac{2}{3} k \delta_{ij} = \nu_t S_{ij} \quad (1.1)$$

Здесь  $u_i$  и  $U_i$  – пульсационная и осредненная составляющие  $i$ -й компоненты скорости относительно системы координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\nu_t$  – скалярная турбулентная вязкость,  $k \equiv \langle u_i u_i \rangle / 2$  – кинетическая энергия турбулентности,  $S_{ij} = (\partial U_j / \partial x_i + \partial U_i / \partial x_j)$  – удвоенное значение тензора скоростей деформации,  $\langle \rangle$  – скобки осреднения,  $\delta_{ij}$  – единичный тензор.

Из соотношений (1.1) следует, что направления главных осей тензоров  $\langle u_i u_j \rangle$  и  $S_{ij}$  совпадают. Этот вывод, однако, экспериментально не подтверждается даже для простых турбулентных течений с поперечным сдвигом [1]. Так, например, в пограничном слое и в однородном сдвиговом течении углы направлений главных осей этих тензоров могут различаться в 2 раза. В двумерных сдвиговых течениях в каналах, струях и следах осредненное течение определяется лишь одной компонентой тензора напряжений  $-\langle u_1 u_2 \rangle$ . Поэтому отмеченная принципиальная неточность зависимости (1.1) может быть скорректирована удачным выбором эмпирических постоянных, входящих в модель для определения турбулентной вязкости. Однако дефекты соотношения (1.1) все равно остаются при описании анизотропной турбулентности даже в простейших течениях. Так, например, в бессдвиговом пограничном слое над движущейся стенкой [2, 3] градиенты скоростей отсутствуют ( $S_{ij} \equiv 0$ ) и, следовательно, зависимость (1.1) не позволяет учитывать анизотропию турбулентности. Однако эксперименты [2, 3] показывают существенную разницу между компонентами пульсаций скорости.

Особенно сильные и явные нарушения соотношения (1.1) возникают при наличии трехмерных эффектов, когда становятся существенными все компоненты тензора напряжений Рейнольдса. В этом случае невозможно с помощью указанной простейшей связи компенсировать различие направлений главных осей тензоров напряжения и скоростей деформации. Поэтому естественно попытаться включить в определяющие соотношения для тензора напряжений Рейнольдса дополнительные слагаемые, устраняющие этот дефект.

Первая попытка такого подхода осуществлена в [4], где был описан общий подход к построению нелинейных алгебраических соотношений между тензором напряжений Рейнольдса и тензорами скоростей деформации, завихренности и их инвариантами. В [5] впервые были получены неявные алгебраические нелинейные определяющие соотношения, а в [6] приведен метод получения явных анизотропных определяющих соотношений, получивший широкое развитие в последние годы. Наиболее часто в современной литературе (см., например, [7, 8]) встречаются явные анизотропные соотношения

$$-\langle u_i u_j \rangle + \frac{2}{3} k \delta_{ij} = \nu_i S_{ij} + A_1 L^2 S_{ij}^0 + A_2 L^2 W_{ij}^0 + A_3 L^2 R_{ij}^0 \quad (1.2)$$

$$S_{ij}^0 = (S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{km} S_{km} \delta_{ij}), \quad W_{ij}^0 = (W_{ik} W_{kj} - \frac{1}{3} W_{km} W_{km} \delta_{ij})$$

$$R_{ij}^0 = (S_{ik} W_{kj} + S_{jk} W_{ki})$$

где  $W_{ij} = (\partial U_j / \partial x_i - \partial U_i / \partial x_j)$  – удвоенное значение антисимметричного тензора завихренности,  $A_1 - A_3$  – постоянные или функции тензорных инвариантов,  $L$  – масштаб турбулентности. Подчеркнем, что зависимость (1.2) является приближенной, ее обоснованность соответствует подходу, принятому при получении других модельных соотношений полуэмпирической теории турбулентности.

Существующие анизотропные модели турбулентности, использующие зависимости вида (1.2), тестировались в основном на сравнительно простых двухмерных течениях, например при течении за обратным уступом [8]. Однако подобные течения вполне удовлетворительно описываются и при помощи обычных изотропных моделей [9].

Расчеты трехмерного течения в свободной прямоугольной струе [10], течения в трехмерной пристеночной струе [11], в квадратном канале [12] были получены с использованием неуниверсальных определяющих соотношений, применимость которых к другим сложным течениям не была продемонстрирована.

В настоящей работе рассматривается некоторый специальный, но достаточно широкий класс турбулентных течений – несжимаемые слабо расширяющиеся двух- и трехмерные течения в струях и пограничных слоях. Для этих течений характерны такие особенности: 1) существует избранное направление  $x_1$ , для которого компонента средней скорости много больше других компонент ( $U_1 \gg U_2 \approx U_3$ ); 2) градиенты скоростей в избранном направлении, напротив, меньше, чем по другим направлениям ( $\partial U_j / \partial x_1 \ll \partial U_j / \partial x_2 \approx \partial U_j / \partial x_3$ ).

Указанные специфические особенности позволяют оценить пригодность отдельных членов в (1.2) для описания таких течений. Главный недостаток второго слагаемого  $S_{ij}^0$  в правой части (1.2) связан с тем, что оно не может оказывать влияния на поворот главных осей тензора  $-\langle u_i u_j \rangle$ , поскольку главные оси тензоров  $S_{ij}$  и  $S_{ij}^0$  совпадают. Поэтому при описании рассматриваемого класса течений использование  $S_{ij}^0$  нецелесообразно.

Третье слагаемое  $W_{ij}^0$  в (1.2) для указанных течений близко по своей структуре слагаемому  $S_{ij}^0$ . Кроме того, это квадратичное относительно тензора завихренности  $W_{ik}$

слагаемое может привести к неправильному описанию течений с вращением [13] и далее также не будет учитываться.

Таким образом, единственным нелинейным слагаемым, которое необходимо учитывать в определяющем соотношении (1.2) при рассмотрении трехмерных течений струйного и погранслоного типа, является  $R_{ij}^0$ , впервые предложенное в [7] и называемое в дальнейшем слагаемым Саффмана. Недавно это слагаемое было модифицировано в [12]

$$C_3 v_i R_{ij}^0 (S^2 + W^2)^{-1/2} \quad (1.3)$$

$$S^2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, \quad W^2 = \frac{1}{2} W_{ij} W_{ij}$$

Эта форма записи формально не нуждается в масштабе турбулентности  $L$  и она пригодна для использования совместно с однопараметрической моделью для турбулентной вязкости.

В качестве основных примеров, на которых тестировалась анизотропная модель турбулентности, были выбраны следующие двух- и трехмерные течения: 1) двумерное течение вблизи стенки, движущейся со скоростью набегающего потока (бесдвиговый пограничный слой); 2) двумерная плоская струя, распространяющаяся вдоль стенки; 3) трехмерное течение в свободной струе, вытекающей из сопла прямоугольного сечения; 4) трехмерное течение в канале квадратной формы; 5) трехмерная круглая струя, распространяющаяся вдоль стенки.

Первое течение замечательно тем, что в нем  $S_{ij} = W_{ij} \equiv 0$ . Двухмерная плоская струя выбрана как пример сравнительно простого течения, сочетающего особенности пограничного слоя и струи. Остальные течения – наиболее типичные примеры трехмерных течений с существенными эффектами анизотропии коэффициентов турбулентного переноса.

Основная цель работы – разработать такие определяющие соотношения, которые позволят с приемлемой для практики точностью описать все перечисленные течения. Для достижения этой цели, в частности, требуется учесть дополнительно анизотропию напряжений Рейнольдса, связанную только с наличием твердой поверхности (при отсутствии градиентов средней скорости). Кроме того, предлагается устранить один из недостатков, характерный для большинства известных определяющих соотношений и связанный с отсутствием анизотропных линейных слагаемых. Подобные слагаемые должны играть существенную роль при описании анизотропии турбулентности, по крайней мере в пристеночных течениях. Причем в этих слагаемых градиенты средней скорости могут или совсем не быть, или быть связаны с тензором напряжений Рейнольдса соотношением более общего вида, чем (1.1). Что касается нелинейных слагаемых, то они должны играть стабилизирующую роль, предотвращая возможные нарушения принципа "реализуемости" [8] в областях с большими значениями градиентов скорости.

Наконец, необходимо проверить качество новой модели путем сравнения расчетов с экспериментом для всех перечисленных течений.

**2. Вывод нового определяющего соотношения.** Представим определяющие соотношения для тензора напряжений Рейнольдса в виде

$$-\langle u_i u_j \rangle + \frac{2}{3} k \delta_{ij} = B_{ij} + (A_{ijkm} + D_{ijkm}) \frac{\partial U_k}{\partial x_m} + A_3 v_i R_{ij}^0 (S^2 + W^2)^{-1/2} \quad (2.1)$$

В правой части (2.1) первый член  $B_{ij}$  – тензор, не зависящий от градиентов средней скорости и необходимый для правильного описания анизотропной турбулентности в пристеночных течениях с однородным профилем скорости. Второе слагаемое

в правой части (2.1) – линейное по градиенту скорости – суперпозиция анизотропной  $A_{ijkm}$  и изотропной  $D_{ijkm}$  составляющих турбулентной вязкости. Последнее слагаемое в (2.1) – рассмотренное ранее нелинейное соотношение (1.3).

Используя приемы, разработанные в [14], условие изотропии для  $D_{ijkm}$ , понятие скалярной вязкости  $\nu$ , и условие несжимаемости, соотношение для второго слагаемого в (2.1) можно представить так

$$(A_{ijkm} + D_{ijkm}) \frac{\partial U_k}{\partial x_m} = \nu_r S_{ij} + A_{ijkm} (S_{km} + W_{km}) \quad (2.2)$$

Для анализа структуры анизотропной вязкости  $A_{ijkm}$  вблизи стенки введем компоненты единичного вектора  $n_i = d_i/d$ , где  $d_i$  – компоненты вектора, направленного нормально к стенке, и с модулем  $d$ , равным кратчайшему расстоянию до стенки. Анализ экспериментальных данных для пристеночных струй [15] показал, что вблизи стенки вне ламинарного подслоя существует область, где для анизотропных пульсационных компонент скорости верны оценки:  $u \approx w \sim d^{-1}$ ,  $v \sim d$ . Эти оценки позволяют заключить, что анизотропная турбулентная вязкость  $A_{ijkm}$ , зависящая от  $d$ ,  $d_i$  и  $\delta_{ij}$ , должна содержать только квадратичные слагаемые по  $d_i$  (или  $n_i$ ). В этом случае возможно такое представление анизотропной вязкости в (2.2)

$$A_{ijkm} = a_0' \delta_{ij} \delta_{km} + a_0 (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}) + a_1 n_k n_m \delta_{ij} + a_2 n_i n_j \delta_{km} + \\ + a_3 (n_i n_k \delta_{jm} + n_j n_k \delta_{im}) + a_4 (n_i n_m \delta_{jk} + n_j n_m \delta_{ik}) \quad (2.3)$$

Здесь учтена симметрия по индексам  $i$  и  $j$ . Тогда, используя условие несжимаемости и соотношение (2.3), слагаемое с анизотропной вязкостью в (2.2) можно записать так

$$A_{ijkm} P_{km}^0 = 2a_0 S_{ij} + a_1 n_m n_k S_{mk} \delta_{ij} + (a_4 - a_3) \{n_i n_k P_{jk}^0 + n_j n_k P_{ik}^0\} + \\ + 2a_3 (n_i n_m S_{jm} + n_j n_m S_{im}) \\ P_{km}^0 = (S_{km} + W_{km}) \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) содержит четыре неизвестных коэффициента  $a_0, a_1, a_3, a_4$ . Используем дополнительные связи между этими коэффициентами. Первая из них получается, если приравнять нулю свертку по индексам  $i$  и  $j$  в (2.4)

$$a_1 = -\frac{2}{3}(a_4 + a_3) \quad (2.5)$$

Вторая дополнительная связь следует из требования совместимости разработанных здесь определяющих соотношений с (1.1), которое используется для расчета простых двумерных сдвиговых течений (в пограничных слоях, трубах и каналах, в струях и следах). Как уже отмечалось, для таких течений существенна только одна компонента тензора напряжений Рейнольдса  $-\langle u_1 u_2 \rangle$  и тензора скоростей деформации  $S_{12}$ . Для того чтобы обеспечить указанную совместимость, необходимо условие

$$a_0 = -a_4 \quad (2.6)$$

Таким образом, имеется два условия (2.5) и (2.6) и, следовательно, коэффициенты  $a_0$  и  $a_1$  можно выразить через  $a_3$  и  $a_4$ . Из двух основных вариантов записи модельных соотношений, а именно при  $a_3 = 0$  или при  $a_3 = a_4$ , которые соответствуют наличию или отсутствию  $W_{ij}$  в (2.4), какого-либо заметного преимущества одного из них установить не удалось. Однако с вычислительной точки зрения предпочтительней оказалась первая версия с  $a_3 = 0$ .

Этот вариант с одним произвольным коэффициентом  $a_4$  и будет анализироваться далее, а его значение будет найдено из условия согласования с экспериментом.

Для аппроксимации анизотропного слагаемого  $B_{ij}$  в (2.1), не содержащего градиента средней скорости, рассматривается течение в бессдвиговом пограничном слое ( $S_{ij} = W_{ij} = 0$ ). Вне очень тонкого пристеночного слоя, где турбулентная вязкость мала, продольная и поперечная пульсационные компоненты скорости можно аппроксимировать зависимостям  $u \approx \text{const}$  и  $v \approx d$  (см. [2, 3]). Кроме того, следует отметить, что в случае бессдвигового пограничного слоя турбулентность является однородной вдоль направлений, параллельных стенке. Следовательно, слагаемое  $B_{ij}$  имеет только нормальные компоненты в системе координат, связанной со стенкой. Используя приведенные выше рассуждения, можно записать

$$B_{ij} = C_d \left( n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \quad (2.7)$$

Величину  $C_d$ , имеющую размерность энергии турбулентности  $k$ , будем аппроксимировать функцией, зависящей не от  $k$ , а от турбулентной вязкости  $\nu_t$  и расстояния до стенки  $d$

$$C_d = C_1 \nu_t^2 d^{-2} \quad (2.8)$$

Такой выбор зависимости величины  $C_d$  от характеристик турбулентности обусловлен тем, что известные двухпараметрические модели турбулентности, содержащие энергию турбулентности  $k$ , в частности наиболее популярная  $k - \epsilon$  модель, весьма неточно описывают распределение  $k(y)$  для течения в бессдвиговом пограничном слое [16]. Кроме того, соотношение (2.8) удобно при использовании однопараметрической модели Спаларта – Аллмараса (модель  $C - A$ ) для турбулентной вязкости, которая здесь будет использоваться. Подставляя (2.9) в (2.8), получим

$$B_{ij} = C_1 (\nu_t^2 d^{-2}) \left( n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \quad (2.9)$$

Объединим вместе слагаемые (2.4) с учетом (2.5) и (2.6), слагаемое (2.10) и описанное ранее соотношение (2.1). Тогда новое определяющее соотношение можно записать в виде

$$\begin{aligned} -\langle u_i u_j \rangle + \frac{2}{3} k \delta_{ij} &= \nu_t S_{ij} + C_1 \varphi_1 \left( n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) (\nu_t^2 d^{-2}) + \\ + C_2 \varphi_2 \nu_t \left( S_{ij} - \frac{1}{2} n_i n_m P_{jm}^0 - \frac{1}{2} n_j n_m P_{im}^0 + \frac{1}{3} n_k n_m P_{km}^0 \delta_{ij} \right) + \\ + 2 C_3 \varphi_3 \nu_t R_{ik}^0 (S^2 + W^2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь использованы условие  $a_3 = 0$ , соотношение  $C_2 \nu_t = -2a_4$  и введены корректирующие функции  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ , зависящие от относительного расстояния  $d^* = d/L$  до стенки. Поскольку вновь предложенные слагаемые справедливы только вблизи стенки, функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  равны единице у стенки и стремятся к нулю вдали от нее. Значение  $\varphi_3$  будет рассмотрено позже.

Для пояснения смысла новых анизотропных слагаемых в (2.10) представим их конкретные значения в декартовой системе координат для рассматриваемого здесь специального класса течений, когда максимальная скорость  $U_1$  направлена вдоль оси  $x_1$

и основной вклад в (2.10) вносят производные  $\partial U_1/\partial x_2$  и  $\partial U_1/\partial x_3$ . В этом случае слагаемые в (2.10) несколько упрощаются

$$(n_i n_j - \delta_{ij}) = \begin{vmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

$$S_{ij} - \frac{1}{2} n_i n_m P_{jm}^0 - \frac{1}{2} n_j n_m P_{im}^0 \approx \begin{vmatrix} 0 & 0 & \partial U_1/\partial x_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \partial U_1/\partial x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

$$R_{ij}^0 \approx \begin{vmatrix} -2\{(\partial U_1/\partial x_2)^2 + (\partial U_1/\partial x_3)^2\} & 0 & 0 \\ 0 & 2(\partial U_1/\partial x_2)^2 & 2\partial U_1/\partial x_2 \partial U_1/\partial x_3 \\ 0 & 2\partial U_1/\partial x_2 \partial U_1/\partial x_3 & 2(\partial U_1/\partial x_3)^2 \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

Видно, что слагаемое (2.11) вносит вклад только в нормальные компоненты  $\langle u_1^2 \rangle$ ,  $\langle u_2^2 \rangle$  и  $\langle u_3^2 \rangle$  тензора напряжений Рейнольдса. Слагаемое (2.12) корректирует компоненту трения  $\langle u_1 u_3 \rangle$ , существенную только в трехмерном случае. Пристеночные слагаемые (2.11) и (2.12) в основном служат для приближенного учета демпфирующего влияния стенки на пульсационную компоненту скорости  $u_2$ , нормальную к стенке. Слагаемое (2.13) изменяет как диагональные компоненты тензора напряжений Рейнольдса, так и  $\langle u_1 u_3 \rangle$ . Это нелинейное слагаемое имеет более сложный физический смысл, чем слагаемые (2.11) и (2.12), и учитывает совместное влияние градиентов средней скорости  $\partial U_1/\partial x_2$ ,  $\partial U_1/\partial x_3$  на анизотропию пульсаций.

**3. Связь вторичных токов с тензором напряжений Рейнольдса.** Может возникнуть сомнение относительно необходимости учета всех компонент тензора напряжения Рейнольдса для описания рассматриваемого класса течений и, следовательно, использования столь сложной модели (2.10) для определяющих соотношений. Для ответа на этот вопрос рассмотрим качественно структуру связи между значениями напряжений Рейнольдса и интенсивностью и видом вторичных течений. Подчеркнем, что главной особенностью рассматриваемых трехмерных течений является наличие интенсивного вторичного течения, характеризуемого компонентами  $U_2$  и  $U_3$ , лежащими в плоскости, перпендикулярной оси  $x_1$ , направленной вдоль основного потока. В трехмерных течениях компоненты  $U_2$  и  $U_3$  скорости вторичного течения на порядок превышают характерные значения поперечных конвективных скоростей некоторых двумерных течений (например, двумерный пограничный слой или струя).

Представим вторичные токи в виде суперпозиции вихревого и сдвигового (деформация сдвига) течений. Проанализируем вначале поведение вихревой компоненты вторичных токов на примере течения в трехмерной струе, вытекающей из сопла прямоугольной формы в безграничное пространство. Рассмотрим, пользуясь симметрией потока, четвертую часть поперечного сечения струи. Окружим это сечение прямоугольным контуром  $C(o-a-b-c)$ .

Здесь введены точки:  $o$  – соответствует центру струи,  $a$  – лежит на оси  $x_2$  в плоскости симметрии вне струи,  $c$  – на оси  $x_3$  в другой плоскости симметрии,  $b$  – замыкает прямоугольник вне струи. Воспользуемся теоремой Стокса о связи потока вектора вихря через поверхность с циркуляцией по контуру, окружающему эту поверхность

$$\frac{d}{dt} \iint \omega n dF = \frac{d}{dt} \oint U dS \quad (3.1)$$

Для выбранного контура играет роль только одна компонента вектора вихря  $\omega$ , а именно компонента  $\omega_1$  по оси  $x_1$ , равная  $W_{23}$ . Здесь  $dS$  – единичный вектор, направ-

ленный вдоль выбранного контура,  $\mathbf{U}$  – вектор вторичных токов ( $U_2, U_3$ ),  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к элементу рассматриваемой поверхности  $dF$ . Направления обхода контура  $C$  и нормаль  $\mathbf{n}$  связаны так, чтобы обход был по часовой стрелке. Если в начальных сечениях струи вторичные токи отсутствуют, то  $\omega_1 = 0$ . Чтобы эта компонента вихря появилась, а следовательно, появились и вихревые вторичные токи, необходимо, чтобы было отлично от нуля выражение в правой части (3.1). Запишем уравнения движения для поперечной  $U_2$  и трансверсальной  $U_3$  компонент скорости, учитывая особенности струйных течений

$$\frac{dU_2}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_2} - \frac{\partial \langle u_2^2 \rangle}{\partial x_2} - \frac{\partial \langle u_2 u_3 \rangle}{\partial x_3} \quad (3.2)$$

$$\frac{dU_3}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial \langle u_2 u_3 \rangle}{\partial x_2} - \frac{\partial \langle u_3^2 \rangle}{\partial x_3} \quad (3.3)$$

Вычислим выражение в правой части (3.1), используя (3.2) и (3.3). После преобразований при отсутствии турбулентности вне струи получим

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{U} d\mathbf{S} = \langle u_2^2 \rangle_0 - \langle u_3^2 \rangle_0 - \int_{0a} \frac{\partial \langle u_2 u_3 \rangle}{\partial x_3} dx_2 - \int_{c0} \frac{\partial \langle u_2 u_3 \rangle}{\partial x_2} dx_3 \quad (3.4)$$

Здесь  $\langle u_2^2 \rangle_0$  и  $\langle u_3^2 \rangle_0$  – значения нормальных компонент тензора напряжений Рейнольдса на оси струи. Отметим, что соотношения (2.10) на оси свободной струи в силу симметрии дают  $\langle u_2^2 \rangle_0 = \langle u_3^2 \rangle_0$ . Таким образом, в этом случае вторичное течение зависит только от корреляции  $\langle u_2 u_3 \rangle$ . Аналогичный качественный анализ вихревых вторичных токов при течениях в трехмерной пристеночной струе и при течениях в угле квадратного канала показал, что для них также справедливо заключение о важной роли корреляции  $\langle u_2 u_3 \rangle$ .

Рассмотрим теперь чисто деформационную компоненту вторичных течений. Типичным примером двумерного течения с чистой деформацией является соударение двух плоских струй, движущихся навстречу друг другу. Для этого течения существует аналитическое решение уравнений Навье – Стокса в критической точке:  $U_3 = -Kx_3$ ,  $U_2 = Kx_2$ . В этом случае имеем  $\omega_1 \equiv \partial U_2 / \partial x_3 - \partial U_3 / \partial x_2 = 0$ , а инвариант тензора скоростей деформации равен  $S^2 \equiv 1/2 S_{km} S_{km} = K^2$ . Из уравнений (3.2) и (3.3) получается

$$2 \frac{dK}{dt} = \frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \langle u_3^2 \rangle}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \langle u_2^2 \rangle}{\partial x_2^2} \quad (3.5)$$

При истечении струи из хорошо сфокусированного прямоугольного сопла в начальном сечении  $P \approx \text{const}$  и  $U_2 = U_3 = 0$ , т.е.  $K = 0$ . В этом случае из (3.5) следует, что только нормальные компоненты  $\langle u_2^2 \rangle$  и  $\langle u_3^2 \rangle$  определяют появление сдвиговых вторичных токов ( $K \neq 0$ ). Таким образом, нормальные компоненты тензора напряжений Рейнольдса индуцируют главным образом безвихревое вторичное течение, а  $\langle u_2 u_3 \rangle$  – только вихревую компоненту.

Суммируя полученные результаты, можно заключить, что на вторичные токи в рассматриваемых течениях влияют все три компоненты тензора напряжений Рейнольдса:  $\langle u_2^2 \rangle$ ,  $\langle u_3^2 \rangle$  и  $\langle u_2 u_3 \rangle$ .

К сожалению, сложность соотношений (3.4) и (3.5) не позволяет провести качественный анализ влияния отдельных слагаемых в (2.10) и в том числе нелинейного слагаемого (2.13) на вид вторичного течения. Единственное условие, которое можно наложить на знаки коэффициентов  $C_1, C_2$  и  $C_3$  в (2.10), связано с положительной определенностью свертки  $-\langle u_i u_j \rangle S_{ij}$ , которая характеризует знак вязкой

диссипации. Это условие соответствует тому, что коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  больше нуля. Однако, к сожалению, оно ничего не дает для определения знака  $C_3$ , поскольку свертка  $S_{ij}(S_{ik}W_{kj} + S_{jk}W_{ki}) \equiv 0$ . Поэтому в дальнейшем при исследовании роли нелинейного слагаемого приходится опираться главным образом на результаты численных расчетов рассматриваемых течений.

Известно [12], что положительное значение  $C_3 \approx 0,3$  позволяет получить неплохое качественное описание вторичных токов в квадратном канале. Однако применение подобной модели для расчета течения в свободной прямоугольной струе привело к качественно неверному результату. Экспериментальные данные (см., например, [17, 18]) показывают, что форма прямоугольной струи по мере своего развития (смещения) сначала быстро эволюционирует в круглую, а далее вниз по потоку струя интенсивнее расширяется в направлении короткой стороны сопла. При этом вторичные токи направлены вдоль длинной стороны сопла к центру струи. Такое явление получило название "переворачивание осей" прямоугольной струи. Проведенные численные расчеты показали, что слагаемое Саффмана индуцирует вторичные токи, направленные вдоль длинной стороны струи, наоборот, от ее центра на периферию течения. При значении постоянной  $C_3 > 0,15$  указанное слагаемое приводит к формированию струи неизменной эллиптической формы с соотношением сторон  $e = b/a = 2$ , причем направление большей стороны  $b$  такой струи совпадает с большей стороной сопла. Таким образом, при  $C_3 > 0$  эффект переворачивания осей не описывается. В то же время отрицательное значение  $C_3 \approx -0,5$  дало правильное значение вторичных токов в свободной прямоугольной струе.

При расчетном исследовании течения в пристеночной струе знак и величина  $C_3$  лишь незначительно изменяют вторичные токи, не оказывая существенного влияния на форму струи. Таким образом, необходима некоторая модификация определяющего соотношения (2.10) на основе результатов, полученных в данном разделе.

**4. Окончательная формулировка анизотропной модели.** Как отмечалось, в определяющем соотношении (2.10) второе и третье слагаемое правой части содержат корректирующие функции  $\varphi_1(d^*)$  и  $\varphi_2(d^*)$ , обращающиеся в нуль вдали от стенки. При использовании однопараметрической модели для турбулентной вязкости локальное описание характерного масштаба потока (например, масштаба турбулентности или толщины пограничного слоя)  $L$ , от которого зависят корректирующие функции  $\varphi$ , вызывает определенные трудности. Для выбора приближенного соотношения для  $L$  было протестировано большое количество вариантов, позволивших получить аппроксимацию

$$L = \min\{2, 6(v^*G^{-1})^{0,5}; 2, 6v^*((v_t + v)G)^{-0,5}; 1, 4v^*N_1^{-1}; L_e; 2, 5v^*u_e^{-1}\} \quad (4.1)$$

Здесь  $G = 0,5(S^2 + W^2)^{0,5}$ ,  $v^*$  – параметр, связанный с величиной  $v_t$  (см. (4.5)), параметр  $N_1$  определяется градиентом турбулентной вязкости (4.6),  $L_e$  и  $u_e$  – соответственно масштаб турбулентности и среднеквадратичный уровень пульсаций скорости во внешнем потоке. Если последние два параметра неизвестны, они исключаются из соотношения (4.1).

На основании приведенного выше анализа величина  $C_3\varphi_3$  при последнем слагаемом в (2.10) должна быть положительной вблизи стенки и отрицательной в свободных струйных течениях вдали от стенки. С учетом этого обстоятельства были предложены корректирующие функции

$$\varphi_1 = \varphi_2 \equiv \varphi = \min\{1, (d^*)^{-3}\}, \quad \varphi_s = (1 - \varphi)^3, \quad \varphi_3 = 1, 6\varphi_s - 0, 6 \quad (4.2)$$

Выбор знакопеременной корректирующей функции  $\varphi_3$  дает правильное описание вторичных токов и у стенки в квадратном канале, и в свободной прямоугольной струе. На основании многочисленных расчетов были выбраны следующие значения констант в (2.10):  $C_1 = 3$ ,  $C_2 = 7$ ,  $C_3 = -0,5$ .



Задание компонент тензора напряжений Рейнольдса при помощи (2.10) позволяет провести замыкание динамических уравнений определяющей системы уравнений. Однако эта система включает еще уравнение для модели турбулентности и может содержать также уравнение для энергии (температуры) и других скалярных параметров течений. В уравнениях такого типа в случае анизотропной турбулентности естественно предположить, что члены с диффузионными потоками, нормальными к стенке, меньше, чем с потоками, направленными вдоль стенки. Турбулентная диффузия любого скалярного параметра  $Z$  связана с корреляцией  $Q_j = \langle zu_j \rangle$ , где  $z$  – пульсационное, а  $Z$  – осредненное значение этого параметра. По аналогии с описанным выше подходом запишем

$$Q_j = \frac{v_t}{Pr_t} \frac{\partial Z}{\partial x_j} + C_2 \varphi v_t \left( \frac{\partial Z}{\partial x_j} - n_j n_k \frac{\partial Z}{\partial x_k} \right) \quad (4.3)$$

Здесь  $C_2 \approx 3$ , а  $Pr_t$  – турбулентное число Прандтля.

Для того чтобы протестировать предложенные определяющие соотношения и продемонстрировать их возможности, необходимо привлечь дифференциальную модель турбулентности, использующую понятие турбулентной вязкости. Здесь для замыкания определяющей системы уравнений была использована однопараметрическая модель  $S-A$  [19], позволяющая с хорошей точностью описывать многие пристеночные турбулентные течения. Тестирование современных дифференциальных моделей турбулентности (см., например, [9, 20]) показало, что эта модель одна из наиболее точных и универсальных. Однако известно, что она, как и многие другие модели турбулентности, хуже описывает струйные течения. Оказалось [20], что модель  $S-A$  примерно в 2 раза завышает скорость смешения в плоской и в круглой струях и в то же время несколько уменьшает по сравнению с экспериментальными данными уровень турбулентности в плоском слое смешения. Кроме того, проведенные здесь расчеты показали, что эта модель занижает турбулентную вязкость в трехмерной пристеночной струе. Поэтому для ее уточнения в уравнение для турбулентной вязкости был введен ряд дополнительных слагаемых аналогично [21]. Уравнение для турбулентной вязкости приняло вид

$$\begin{aligned} \frac{Dv^*}{Dt} = & C_{b1}(1 - f_{i2})W^{**}v^* + \sigma^{-1} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( (v^* + v) \frac{\partial v^*}{\partial x_k} \right) + \\ & + C_2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \varphi v^* \left( \frac{\partial v^*}{\partial x_k} - n_m n_k \frac{\partial v^*}{\partial x_m} \right) \right) + C_{b2} \sigma^{-1} \left( \frac{\partial v^*}{\partial x_k} \right)^2 - \\ & - (C_{w1} f_w - f_{i2} C_{b1} k^{-2}) (v^{*2} d^{-2}) + C_\varepsilon \varphi_s v^* \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x_k^2} + N_2 \right) + C_s \varphi_s v^* (N_2 W)^{0.5} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Функции и коэффициенты, предложенные в [19], имеют вид

$$v^* \equiv v_t f_{v1}, \quad f_{v1} = (\chi^3)((7,1)^3 + \chi^3)^{-1}, \quad \chi = v^* v^{-1} \quad (4.5)$$

$$C_{b1} = 0,1355, \quad \sigma = 0,666, \quad C_{b2} = 0,622, \quad C_{w1} = C_{b1} \kappa^{-2} + (1 + C_{b2}) \sigma^{-1}$$

$$\kappa = 0,41, \quad f_{i2} = 1,2 \exp\{-0,5\chi^2\}, \quad f_w = g(1 + C_{w3}^6)^{1/6} (g^6 + C_{w3}^6)^{-1/6}$$

$$g = r + C_{w2}(r^6 - r), \quad r = v^*(W^{**} \kappa^2 d^2)^{-1}, \quad f_{v2} = \left( 1 + \frac{\chi}{5} \right)^{-3}$$

$$f_{v3} = (1 + \chi f_{v1})(1 - f_{v2}) \chi^{-1}, \quad W^{**} = W^* f_{v3} + f_{v2} v^*(k^2 d^2)^{-1}, \quad C_{w3} = 2, \quad C_{w2} = 0,3$$

Как отмечалось, в модели (4.4), (4.5) были внесены изменения двух типов. Одни связаны с новой реологией для описания трехмерных анизотропных течений, а другие – с коррекцией модели С–А для описания струйных течений

$$W^* = W(S_{ij} PR_{ij}) (2S^2)^{-1}$$

$$PR_{ij} \equiv S_{ij} + C_2 \Phi \left( S_{ij} - \frac{1}{2} n_i n_m P_{jm} - \frac{1}{2} n_j n_m P_{im} + \frac{1}{3} n_k n_m P_{km} \delta_{ij} \right) \quad (4.6)$$

$$C_\epsilon = 6, \left[ \frac{\partial^2 v^*}{\partial x_k^2} + N_2 \right] < 0, \quad C_\epsilon = 0, \left[ \frac{\partial^2 v^*}{\partial x_k^2} + N_2 \right] > 0$$

$$C_s = 0,2, \quad N_2^2 = \left( \frac{\partial N_1}{\partial x_k} \right)^2, \quad N_1^2 = \left( \frac{\partial v^*}{\partial x_k} \right)^2$$

Новое слагаемое, содержащее коэффициенты  $C_\epsilon$  при вторых производных для турбулентной вязкости, обеспечивает правильное предсказание течения в круглой струе, уменьшая турбулентную вязкость в осесимметричных течениях (см. [21]). Слагаемое с  $C_s$  обеспечивает некоторое увеличение турбулентной вязкости в слое смешения для того, чтобы уменьшить расчетную длину начального участка в круглой и плоской струях. Поскольку эти слагаемые могли внести нежелательные искажения при описании течения вблизи стенки по сравнению с оригинальной версией модели С–А, оба слагаемых умножались на корректировочную функцию  $\phi_s(d^*)$ , равную нулю на стенке и асимптотически стремящуюся к единице вдали от нее (см. соотношения (4.2)).

Так как в трехмерной пристеночной струе уровень турбулентной вязкости, рассчитанный по оригинальной версии модели С–А, оказался вблизи стенки заниженным, пришлось увеличить роль слагаемого, связанного с ее порождением. Для этого при вычислении порождения турбулентности учитывались дополнительные анизотропные слагаемые в связи тензора напряжений Рейнольдса с тензором скоростей деформации. Эта модификация описывается соотношениями (4.6). Наконец, в диффузионном слагаемом в уравнении для  $v^*$  также были внесены уточнения, связанные с анизотропностью коэффициентов переноса (слагаемые с  $C_2 = 3$  в (4.5)).

**5. Примеры численных расчетов, сравнение с экспериментом.** Для описания двухмерных течений использовались уравнения пограничного слоя, а для трехмерных – уравнения Рейнольдса. Плотность в определяющей системе уравнений могла быть переменной, но не зависела от давления. Для вычисления давления использовался итерационный метод искусственной сжимаемости.

При расчете трехмерных течений определяющая система уравнений записывалась в консервативной форме в произвольной неортогональной системе координат. Это позволяло использовать расчетную область с криволинейными границами и сгущать сетки в областях с большими градиентами параметров. Параметры потока рассчитывались в центрах ячеек, а потоки – на их гранях. Конвективные потоки вычислялись с использованием противопоточной схемы с третьим порядком аппроксимации, диффузионные потоки на гранях определялись при помощи центральных разностей второго порядка точности [22].

Метод построения неявных операторов для определяющей системы уравнений описан в [23]. Решение неявных дифференциальных операторов основано на применении симметричной релаксационной схемы Гаусса – Зейделя. Использовались комбинированные граничные условия. В зависимости от направления потока через границу задавался либо снос параметров из области течения, либо фиксированные значения параметров. В случае течения в канале и в пристеночной трехмерной струе при  $Re < 3 \cdot 10^5$  на стенке ставились условия прилипания. При  $Re > 3 \cdot 10^5$  вводились

законы стенки. Типичные расчетные сетки для трехмерных течений содержали от 30 до 40 узлов по каждому направлению (общее количество узлов – до 200 тысяч), при этом погрешность расчета за счет высокого порядка схемной аппроксимации не превышала 5%.

В качестве первых тестов были рассмотрены двухмерные течения в бессдвиговом пограничном слое и в пристеночной струе. В первом случае все градиенты скоростей равнялись нулю и поперек потока изменялись только характеристики турбулентности от их значения во внешнем потоке до нуля на стенке. При этом соотношения (2.10) радикально упрощались и как их следствие

$$\langle u_1^2 \rangle - \langle u_2^2 \rangle = C_1 \varphi(d^*) (v_1^2 d^{-2}) \quad (5.1)$$

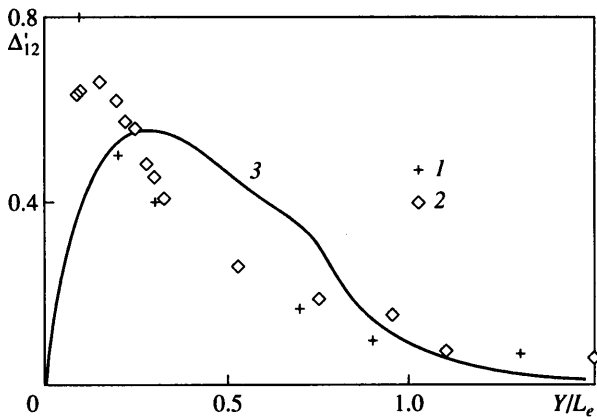
Однопараметрическая модель турбулентности не содержит информации о масштабе турбулентности  $L_e$  во внешнем потоке. Используя (4.1), невозможно правильно определить  $L_e$ . Поэтому интенсивность и масштаб турбулентности во внешнем потоке находились по несколько иным формулам

$$L_e = \min \{d; 1, 6v_e N_1^{-1}\}, \quad v_e = 0,4u_e L_e \quad (5.2)$$

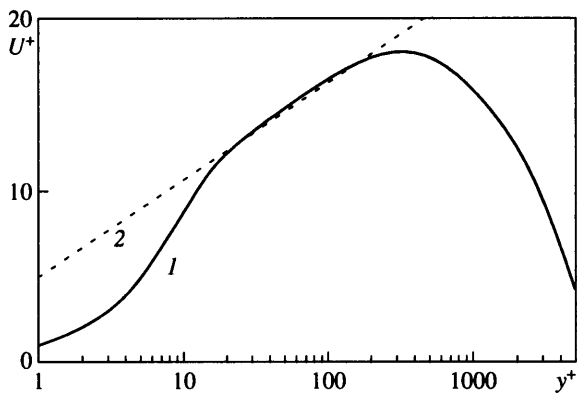
Величина анизотропии турбулентности в (5.1) построена на фиг. 1 (кривая 3) с использованием соотношения (5.2). Здесь же приведены экспериментальные данные из [3] – (1) и [4] – (2). Для нахождения  $v$ , при обработке эксперимента использовалось второе из соотношений (5.2). Следует подчеркнуть, что широко используемые в настоящее время модели турбулентности не позволяют описать основные количественные характеристики бессдвигового пограничного слоя [16]. Тем более мало пригодны для точного его описания однопараметрические модели типа модели С–А. Учитывая эти замечания и приближенность соотношения (5.2), сравнение на фиг. 1 можно считать удовлетворительным.

Плоская пристеночная струя, распространяющаяся в неподвижной среде, прежде всего характеризуется интенсивностью расширения  $B_y/x$ . Здесь  $B_y$  – расстояние от стенки до точки в поперечном сечении струи, где продольная скорость  $U$  равна половине максимального значения  $U_{\max}$  в данном сечении. Расчет с использованием модифицированной модели С–А дал  $B_y/x = 0,066$ . Эта величина неплохо согласуется с обобщением экспериментов из [15], где приводится диапазон значений  $0,07 \pm 0,01$ . Более существенно сравнение расчетного профиля продольной скорости (см. фиг. 2, кривая 1) с известным универсальным логарифмическим профилем  $U^+ = 5,6 \log y^+ + 5$  (кривая 2,  $y^+ = U_y \nu$ ,  $U_t$  – скорость трения). Хорошее согласование на фиг. 2 свидетельствует о том, что новые анизотропные определяющие соотношения и модификация модели С–А позволяют правильно описывать двухмерное распределение скорости вблизи стенки.

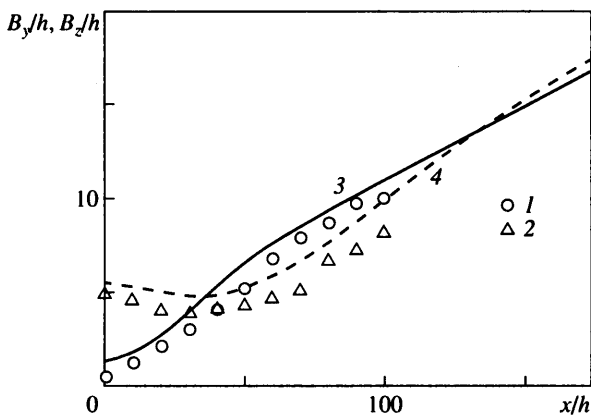
Как уже отмечалось, в свободной трехмерной прямоугольной струе наиболее ярким и характерным эффектом является переворачивание осей. Для описания этого эффекта удобно ввести две различные полуширины струи:  $B_y$  – для поперечного направления и  $B_z$  – для трансверсального. Здесь  $B$  – расстояние от плоскостей симметрии до точки в струе, где продольная компонента скорости  $U$  равна половине максимального своего значения  $U_{\max}$  в данном сечении. Расчеты были выполнены для сопла с отношением сторон  $e \equiv b/a = 4$ . Вторичное течение в начальном сечении в расчете отсутствовало. На фиг. 3 приведены результаты расчета изменения по длине струи  $x/h$  безразмерных ширин  $B_y/h$  и  $B_z/h$  струи ( $h = 2ab/(a+b)$  – гидравлический диаметр). Здесь же приведены экспериментальные данные [17]. Применение гидравлического диаметра  $h$  связано с тем, что в [17] указывается на обобщение по этому параметру экспериментальных данных при различных  $e$ . Видно, что анизотропная модель (2.10) описывает эффект переворачивания осей и результаты расчета удовлетворительно соответствуют экспериментальным данным.



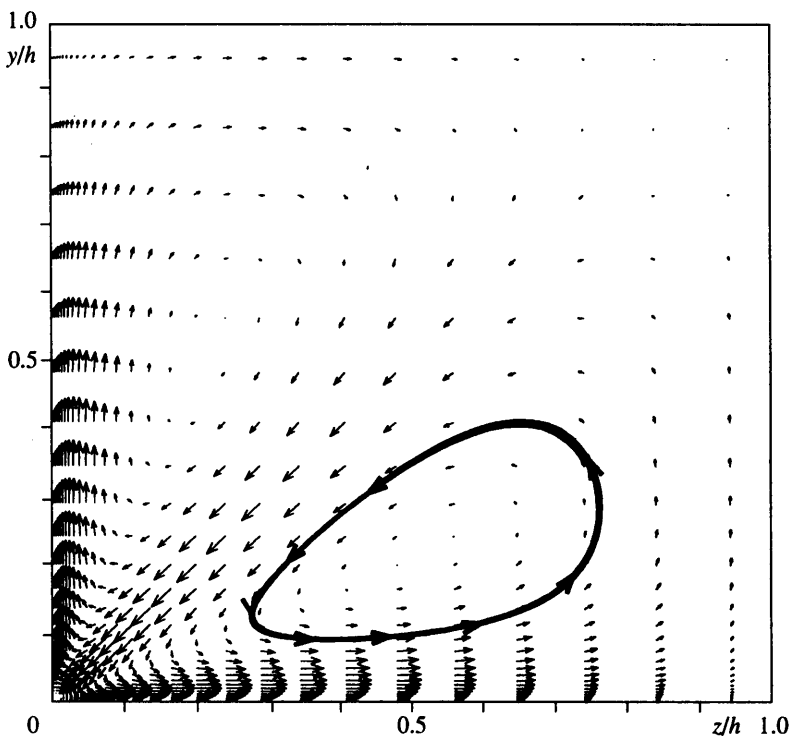
Фиг. 1. Анизотропия продольных  $u_1$  и поперечных  $u_2$  пульсаций скорости  $\Delta'_{12} = (\langle u_1^2 \rangle - \langle u_2^2 \rangle) / u_e^2$  в бесшдвиговом пограничном слое: 1, 2 – эксперимент из [2, 3], 3 – расчет



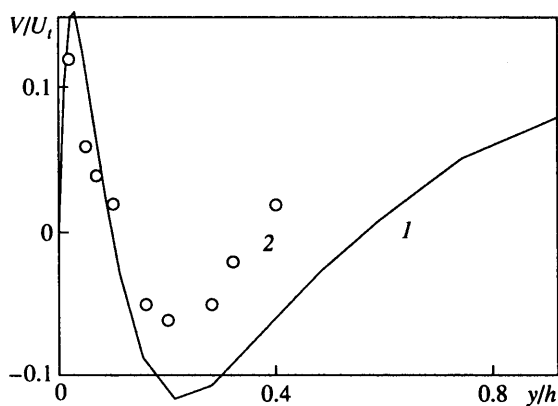
Фиг. 2. Сравнение расчетного профиля скорости 1 с известным пристеночным логарифмическим законом 2



Фиг. 3. Сравнение и изменения характерных поперечной  $B_y$  (3) и трансверсальной  $B_z$  (4) толщин вдоль прямоугольной струи с экспериментальными данными из [17]: 1 –  $B_y/h$ , 2 –  $B_z/h$

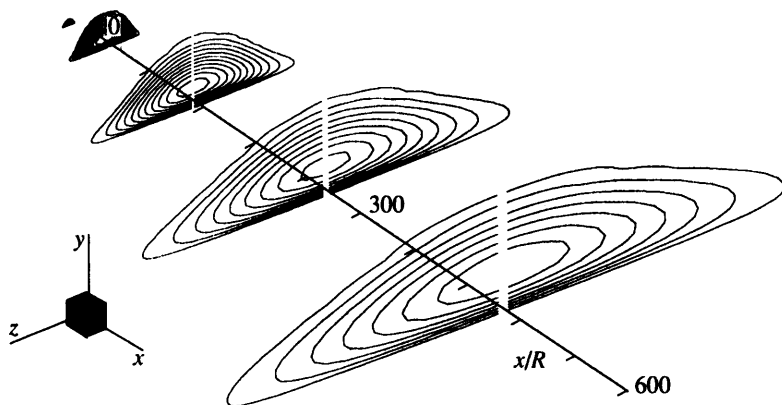


Фиг. 4. Поперечные скорости в сечении квадратного канала



Фиг. 5. Распределение вертикальной компоненты скорости по высоте квадратного канала при  $x/h = 40$ ,  $z/h = 0,2$ : 1 – настоящая модель, 2 – расчет методом LES из [24]

Расчеты течения в квадратной трубе, выполненные методом прямого численного моделирования крупных вихрей [24], показали, что вторичное течение в этом случае направлено в угол, образованный стенками. Результаты численных расчетов при  $Re = 10^4$  показаны на фиг. 4 и 5. На фиг. 4 приведена картина вторичных токов, а на фиг. 5 – распределение вертикальной компоненты скорости  $V(y)$  при  $x/h = 40$  и  $z/h = 0,2$  (кривая 1), здесь  $2h$  – сторона канала. Полученные результаты удовлетворительно соответствуют данным из [24].

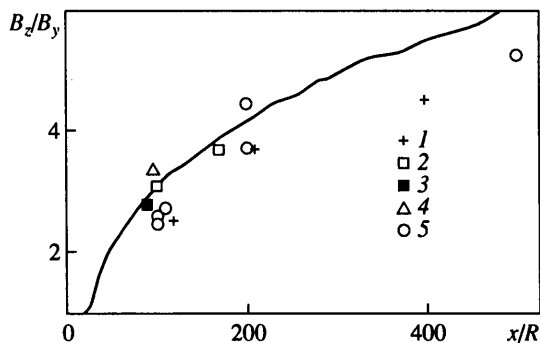


Фиг. 6. Расчетные изолинии турбулентной вязкости в нескольких сечениях круглой струи, распространяющейся вдоль стенки

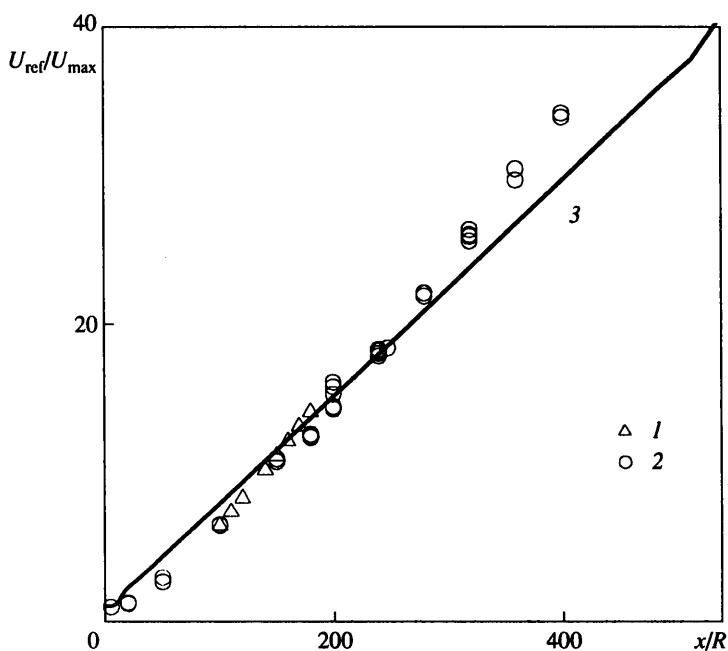
Главная особенность течения в трехмерной пристеночной струе связана с сильной анизотропией ее расширения в вертикальном и поперечном направлениях. При этом уровень поперечной компоненты скорости намного больше, чем в свободной струе, а полная поперечная ширина струи  $2B_z$  в 8–10 раз больше, чем ее вертикальная толщина  $B_y$ . Разработанная анизотропная модель турбулентности дает при числе Рейнольдса  $Re = 2 \cdot 10^5$  и  $x/R = 500$  значение  $B_z/B_y \cong 5$  (см. фиг. 6), что соответствует известным экспериментальным данным. На фиг. 7 и 8 приведены результаты расчетов  $B_z/B_y$  и осевой максимальной скорости  $U_{ref}/U_{max}$  (здесь  $U_{ref}$  – характерная скорость на срезе сопла). Различие с известными экспериментальными данными (фиг. 7, 6 – расчет, 1–5 – экспериментальные данные соответственно из [25–29]) не превосходит 10–20%. На больших расстояниях (см. фиг. 7) от среза сопла наблюдается тенденция к ослаблению интенсивности растекания пристеночной струи и на очень больших расстояниях ( $x/R \gg 500$ ) – стремление  $B_z/B_y$  к асимптотическому значению. Кроме того, необходимо отметить, что пристеночная струя, несмотря на сильную анизотропию, имеет осевую составляющую скорости, очень близкую к значениям скорости в обычной затопленной круглой струе (фиг. 8, 3 – расчет, 1 и 2 – экспериментальные данные соответственно из [26] и [29]).

**Заключение.** Построены новые анизотропные определяющие соотношения для компонент тензора напряжений Рейнольдса. При разработке этих явных алгебраических соотношений основное внимание уделено выводу и обоснованию линейных по градиенту скорости слагаемых и слагаемых, не зависящих от градиентов средней скорости, что принципиально отличает эту модель от других известных моделей такого типа.

Анизотропная модель турбулентности позволяет с приемлемой для практики точностью рассчитывать сложные трехмерные турбулентные течения, которые не удается описать с помощью традиционных современных полуэмпирических моделей турбулентности, использующих простейшие определяющие соотношения между тензорами турбулентных напряжений Рейнольдса и скоростей деформации. Модель протестирована для достаточно широкого класса течений. В частности, проведены численные расчеты течений в бессдвиговом пограничном слое, в двухмерной пристеночной струе,



Фиг. 7. Сравнение расчетных значений (сплошная кривая) отношения трансверсальной и поперечной ширин в круглой струе, распространяющейся вдоль стенки, с экспериментом: 1–5 – [25–29]



Фиг. 8. Изменение максимальной скорости в круглой струе, распространяющейся вдоль стенки: 1, 2 – эксперименты [26] и [29], 3 – расчет

в свободной трехмерной прямоугольной струе, в канале с квадратным сечением, в трехмерной пристеночной струе. Показано удовлетворительное согласование с известными экспериментальными данными.

Авторы выражают признательность Ф.Р. Спаларту и И.И. Вигдоровичу за полезные и содержательные обсуждения отдельных разделов работы.

Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 98-01-00153) и Московского технического центра "Боянг".

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сабельников В.А. О направлении главных осей тензора напряжений Рейнольдса в турбулентных течениях с поперечным сдвигом // Учен. зап. ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 2. С. 169–161.
2. Thomas N.H., Hancock P.E. Grid turbulence near a moving wall // J. Fluid Mech. 1977. V. 82. Pt 3. P. 481–496.
3. Aronson D., Johansson A.V., Lofdahl L. Shear-free turbulence near the wall // J. Fluid Mech. 1997. V. 338. P. 363–385.
4. Lumley J.L. Toward a turbulent constitutive relation // J. Fluid Mech. 1970. V. 41. Pt 2. P. 413–434.
5. Rodi W. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses // ZAMM. 1976. B. 56. H. 3. S. T219–T221.
6. Pope S.B. A more general effective – viscosity hypothesis // J. Fluid Mech. 1975. V. 72. Pt 2. P. 331–340.
7. Saffman P.G. Model equations for turbulent shear flow // Stud. Appl. Math. 1974. V. 53. № 1. P. 17–34.
8. Speziale C.G. Analytical methods for the development of Reynolds-stress closures in turbulence // Annu. Rev. Fluid Mech. 1991. V. 23. P. 107–157.
9. Shur M., Strelets M., Zaikov I. et al. Comparative numerical testing of one- and two-equation turbulence models for flows with separation and reattachment // AIAA Paper. 1995. № 95 – 0863. 31 p.
10. Demuren A.O., Wilson R.B. Streamwise vorticity generation in laminar and turbulent jets // ICASE Report. 1999. № 99 – 33. 11 p.
11. Craft T.J., Launder B.E. The self-similar, turbulent, three-dimensional wall jet // Proc. 1 st Symp. Turbulent Shear Flow Phenomena. Santa Barbara, 1999. P. 1129–1134.
12. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulations // Intern. J. Heat and Fluid Flow. 2000. V. 21. № 3. P. 252–263.
13. Gatski T.B., Speziale C.G. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows // J. Fluid Mech. 1993. V. 254. P. 59–78.
14. Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge: Univ. Press, 1970. 615 p.
15. Launder B.E., Rodi W. The turbulent wall jet measurements and modeling // Annu. Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. P. 429–459.
16. Секундов А.Н. Модель турбулентности для описания взаимодействия пограничного слоя с крупномасштабным турбулентным потоком // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 2. С. 59–68.
17. Trentacoste N., Sforza P. Further experimental results for three dimensional free jets // AIAA Journal. 1967. V. 5. № 5. P. 885–891.
18. Крашенинников С.Ю., Розальская Е.Г. Распространение струй из прямоугольных сопел, свободных и вблизи экрана // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 4. С. 39–48.
19. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // La Recherche Aerospat. 1994. № 1. P. 5–21.
20. Bardina J.E., Huang P.G., Coakley T.J. Turbulence modeling validation, testing and development // AIAA Paper. 1997. № 97 – 2121. 16 p.
21. Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н. К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 69–81.
22. Vasiliev V.I., Volkov D.V., Zaitsev S.A., Lyubimov D.A. Numerical solution of channel flows by one-equation turbulence model // Trans. ASME. J. Fluid Eng. 1997. V. 119. № 4. P. 885–892.
23. Rogers S.E., Kwak D. Upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier – Stokes equations // AIAA Journal. 1990. V. 28. № 2. P. 253–262.
24. Madabhushi R.K., Vanka S.P. Large eddy simulation of turbulence-driven secondary flow in square duct // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. № 11. P. 2734–2745.
25. Newman B.G., Patel R.P., Savage S.B., Tjio H.K. Three-dimensional wall jet originating from a circular orifice // The Aeronaut. Quart. 1972. V. 23. Pt 3. P. 188–200.
26. Abrahamsson H. On turbulent wall jets // Ph. D. Thesis. Chalmers Univ. Technology. 1997.
27. Davis M.R., Winarto H. Jet diffusion from a circular nozzle above a solid plane // J. Fluid Mech. 1980. V. 101. Pt 1. P. 201–221.
28. Anthony D.G., Willmarth W.W. Turbulence measurements in a round jet beneath a free surface // J. Fluid Mech. 1992. V. 243. P. 690–720.
29. Maslov V.P., Mineev B.I., Secundov A.N. et al. An experimental study of three-dimensional wall jets // AIAA Paper. 2001. № 2001–0449. P. 29.