

УДК 532.5.013.4

© 2001 г. А.Г. БУРЯ, В.Я. ШКАДОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ НАКЛОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Исследуется устойчивость течения пленки жидкости по наклонной пластине, подверженной периодическим колебаниям, под действием силы тяжести и с учетом поверхностного натяжения. Используется уравнение типа Орра – Зоммерфельда с коэффициентами, периодически зависящими от времени. На основе теории Флоке, спектральных представлений переменных и многошаговых методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений разработан метод определения собственных значений линейной задачи устойчивости. Проведено исследование спектра бифуркаций резонансных мод, рассчитаны коэффициенты усиления и фазовые скорости для поверхностных волн, волн Толмина – Шлихтинга и резонансных волн. Изучено влияние на резонансные моды и на моды стационарного течения внешних параметров, а именно наклона, величины поверхностного натяжения и толщины слоя.

Устойчивость течения пленки жидкости по наклонной поверхности исследовалась в работах [1–4]. Стационарное течение пленки жидкости неустойчиво по отношению к волнам двух типов: длинным поверхностным волнам и более коротким волнам Толмина – Шлихтинга. Поверхностные волны распространяются вниз по потоку со скоростью, превосходящей скорость на поверхности жидкости примерно в 2 раза. Фазовая скорость волн Толмина – Шлихтинга меньше этой скорости. Для достаточно больших углов наклона пластины более неустойчивыми являются поверхностные волны, критические числа Рейнольдса для которых значительно меньше, чем для волн Толмина – Шлихтинга. Однако для меньших углов критические числа для обеих мод сравнимы, а для углов порядка 1° более неустойчивыми являются волны Толмина – Шлихтинга.

Исследованию проблемы взаимодействия гидродинамической системы, обладающей собственными модами неустойчивости с внешними колебаниями посвящены в частности, работы [5–7], в которых исследовались течение пленки и вращательное течение Куэтта, [8] – исследовалось влияние вибраций на устойчивость поверхности раздела, [9] – устойчивость адвективного течения под действием акустических волн. Было обнаружено, что с помощью периодических колебаний пластины возможна стабилизация течения в некоторых диапазонах длин волн [6, 7]. В результате колебаний в дополнение к указанным выше двум типам волн добавляются волны, возникающие как резонансные колебания, имеющие некоторое сходство с волнами Фарадея на горизонтальной пластине. Для появления этих волн необходимо, чтобы амплитуда колебаний превосходила некоторое критическое значение, в противном случае наличие колебаний не оказывает заметного влияния на течение. Возникновение резонансных волн существенно влияет на устойчивость системы. В [6] и [7] основное внимание было сосредоточено на расчете коэффициентов усиления и изучения вопроса о возможности стабилизации течения. В настоящей работе исследуется характер бифуркаций и несколько расширен диапазон параметров исходных систем: рассмотрены течения жидкости на горизонтальной поверхности на почти вертикальной поверхности и для промежуточных углов наклона, рассмотрено влияние частоты внешнего возмущения на устойчивость течения.

В настоящей работе с помощью метода, основанного на применении теории Флоке [5], проведено сравнение устойчивости возмущенного и стационарного течения для малых и больших углов наклона. Обнаружено, что в первом случае колебания могут усиливать волны Толмина – Шлихтинга, а возникающие резонансные волны оказываются неустойчивыми для определенных длин волн, формируя зоны неустойчивости по волновому числу. Во втором случае для вертикально ориентированной пластины наблюдается стабилизация длинных поверхностных волн, однако для некоторых значений параметров возникают неустойчивые резонансные волны. При уменьшении угла наклона пластины стабилизация поверхностных волн не происходит.

1. Устойчивость периодического течения пленки жидкости. Рассмотрим стекание пленки вязкой несжимаемой жидкости под действием силы тяжести по наклонной пластине, образующей угол с горизонталью θ . Введем декартову систему координат, такую, что ось x направлена вдоль поверхности пластины, ось y расположена по нормали к ней ($x = 0$ и $y = 0$ на поверхности пластины), а ось z перпендикулярна осям x и y . Пусть пластина колеблется с частотой Ω и амплитудами a_x и a_y вдоль осей x и y соответственно, тогда течение описывается уравнениями Навье – Стокса и неразрывности с учетом колебаний как внешней силы [6, 7]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} - \mathbf{A}(t), \quad \mathbf{A}(t) = (a_x \Omega^2 \sin \Omega t, a_y \Omega^2 \sin \Omega t)$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ – скорость, P – давление, ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость, \mathbf{g} – ускорение силы тяжести, $\mathbf{A}(t)$ – внешняя сила, возникающая в результате колебаний, отнесенная к единице массы. Предполагается, что течение не зависит от координаты z . Пусть поверхность пленки описывается соотношением $y = d + h(x, t)$, где d – среднее значение толщины пленки, соответствующее стационарному основному состоянию. На пластине ставятся условия прилипания, а на свободной поверхности выполняется кинематическое условие и динамическое условие на касательные и нормальные напряжения с учетом поверхностного натяжения

$$y = 0: \mathbf{v} = 0$$

$$y = d + h(x, t): v_y = \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla h$$

$$p_{n\tau_1} = p_{n\tau_2} = 0, \quad p_{nn} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Через p_{ij} обозначены компоненты тензора напряжений, записанные относительно свободной поверхности (\mathbf{n} – нормаль к поверхности, τ_1 и τ_2 – касательные направления), σ – коэффициент поверхностного натяжения, а R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны. Безразмерные переменные вводятся по формулам

$$(x', y', z') = \left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d} \right), \quad h' = \frac{h}{d}, \quad (v'_x, v'_y, v'_z) = \left(\frac{v_x}{U_0}, \frac{v_y}{U_0}, \frac{v_z}{U_0} \right)$$

$$\mathbf{a}' = (a'_x, a'_y) = \left(\frac{a_x}{d}, \frac{a_y}{d} \right), \quad \tau = \frac{U_0}{d} t, \quad p = \frac{P}{\rho U_0^2}$$

$$\text{Re} = \frac{U_0 d}{\nu}, \quad \text{Fr} = \frac{U_0^2}{dg} = \frac{1}{2} \text{Re} \sin \theta, \quad \text{We} = \frac{\rho U_0^2}{\sigma}, \quad \omega = \frac{\Omega d}{U_0}, \quad U_0 = \frac{d^2 g \sin \theta}{2\nu}$$

Здесь Re – число Рейнольдса, Fr – число Фруда, а We – число Вебера. Величина U_0 равна скорости на свободной поверхности для течения пленки при отсутствии колебаний. При расчетах вместо числа We будет использоваться связанная с ним безразмерная величина γ [3], которая не зависит от скорости и равна

$$\gamma = \sqrt[3]{3} \frac{\sigma}{\rho} g^{-1/3} \nu^{-4/3}, \quad We = \frac{Re}{\gamma} \left(\frac{3}{2} Re^2 \sin \theta \right)^{-1/3}$$

Основное состояние, для которого $\mathbf{v} = (u^m(y, t), 0, 0)$ и течение зависит только от y , является решением системы уравнений (1) в одномерном случае

$$u^m = (2y - y^2) + a_x \omega (1 - Y_1) \cos \omega t + a_x \omega Y_2 \sin \omega t \quad (1.2)$$

$$Y_1 = \frac{2}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta} (\operatorname{ch} \beta(y-1) \cos \beta(y-1) \operatorname{ch} \beta \cos \beta + \operatorname{sh} \beta(y-1) \sin \beta(y-1) \operatorname{sh} \beta \sin \beta(y-1))$$

$$Y_2 = \frac{2}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta} (\operatorname{sh} \beta(y-1) \sin \beta(y-1) \operatorname{ch} \beta \cos \beta - \operatorname{ch} \beta(y-1) \cos \beta(y-1) \operatorname{sh} \beta \sin \beta(y-1))$$

$$\beta = \sqrt{\frac{Re \omega}{2}}$$

Будет рассмотрена задача устойчивости полученного решения относительно бесконечно малых возмущений вида

$$u'_x = u^m + u, \quad v'_y = v, \quad v'_z = 0, \quad p' = p^m + p, \quad h' = 1 + h$$

Рассматриваются только двумерные возмущения, так как для аналогичной стационарной задачи выполняется аналог теоремы Сквайра, согласно которой задача о распространении трехмерных возмущений сводится к двумерной задаче с меньшим Re . Введем функцию тока ψ . Предположим, что решение можно представить в виде волны вдоль x с некоторой амплитудой, зависящей от y : $(\psi, p, h)(y, \tau) = (\psi, p, h)(y) \exp(i\alpha x)$. Тогда уравнение для функции тока ψ и давления и граничные условия примут вид

$$Re \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\psi_{yy} - \alpha^2 \psi) + i\alpha u^m (\psi_{yy} - \alpha^2 \psi) - i\alpha u^m_{yy} \psi \right] = \psi_{yyyy} - 2\alpha^2 \psi_{yy} + \alpha^4 \psi \quad (1.3)$$

$$p = \frac{1}{i\alpha} \left[\frac{1}{Re} (\psi_{yyy} - \alpha^2 \psi_y) - \frac{\partial \psi_y}{\partial \tau} - i\alpha u^m \psi_y + i\alpha u^m_y \psi \right]$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \equiv \psi_y, \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \equiv -\psi_x$$

$$y = 0: \quad \psi = 0, \quad \psi_y = 0$$

$$y = 1: \quad \frac{\partial h}{\partial \tau} + i\alpha (u^m h + \psi) = 0, \quad u^m_{yy} h + \psi_{yy} + \alpha^2 \psi = 0$$

$$\frac{\partial \psi_y}{\partial \tau} + i\alpha u^m \psi_y + i\alpha \left(\frac{\alpha^2}{We} + \frac{2}{Re} \operatorname{ctg} \theta + a_y \omega^2 \sin \omega t \right) h + \frac{1}{Re} (\psi_{yyy} - 3\alpha^2 \psi_y) = 0 \quad (1.4)$$

Полученные уравнения не сводятся к классическому уравнению Орра – Зоммерфельда в связи с тем, что основное состояние u^m , заданное уравнением (1.2), зависит от времени τ и имеет период изменения $T = 2\pi/\omega$ и, следовательно, решение уравнения (1.3) с граничными условиями (1.4) будет также периодическим. Это обстоятельство существенно усложняет поиск параметров устойчивости для данной системы уравнений.

2. Применение теории Флоке и спектральных методов для решения задачи на собственные значения. Необходимо исследовать поведение бесконечно малых возмущений, описываемое уравнениями (1.3) с граничными условиями (1.4). Так как коэффициенты уравнений указанной задачи – периодические функции, будем использовать теорию Флоке. По теории Флоке предполагается, что бесконечно малые возмущения можно представить в виде произведения двух функций: периодической с тем же периодом изменения T и экспоненциально растущей или затухающей.

Для аппроксимации по y применим спектральное разложение по модифицированным многочленам Чебышева второго рода $T_k^*(y)$, где $y \in [0, 1]$, тогда ψ

$$\psi(y, \tau) = \sum_{k=1}^N \psi_k^\circ(\tau) T_k^*(y)$$

Здесь через N обозначен порядок аппроксимации. С помощью псевдоспектрального метода, описанного и использованного в [5], проводится дискретизация уравнения для ψ . В результате получается следующее матричное уравнение для коэффициентов $\psi_k^\circ(\tau)$:

$$(\mathbf{D}^2 - \alpha^2 \mathbf{E}) \frac{d\psi^\circ}{dt} = \left[\frac{1}{\text{Re}} (\mathbf{D}^2 - \alpha^2 \mathbf{E})^2 - i\alpha(\mathbf{U}(\mathbf{D}^2 - \alpha^2 \mathbf{E}) - \mathbf{U}_{yy}) \right] \psi^\circ \quad (2.1)$$

Здесь использованы обозначения: $f_k^\circ \rightarrow (f'')_k^\circ$ – матрица второй чебышевской производной \mathbf{D}^2 , $f_k^\circ \rightarrow (u^m f)_k^\circ$ и $f_k^\circ \rightarrow (u^m f)_k^\circ$ – матрицы нелинейных преобразований коэффициентов чебышевских разложений \mathbf{U} и \mathbf{U}_{yy} , единичная матрица \mathbf{E} . Чтобы учесть граничные условия, из системы уравнений (2.1) отбрасываются пять (по числу граничных условий) последних уравнений, а вместо них добавляются дискретизированные граничные условия (1.4). Для получения дискретизированных граничных условий применялся тау-метод [10]

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \psi_k^\circ &= 0, & \sum_{k=0}^N 2(-1)^{k+1} \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \psi_k^\circ &= 0 \\ h + i\alpha u^m|_{y=1} h + \sum_{k=0}^N (k+1) \psi_k^\circ &= 0 \\ u_{yy}^m|_{y=1} h + \sum_{k=0}^N \left(\frac{4k(k^2-1)(k+2)(k+3)}{15} + \alpha^2(k+1) \right) \psi_k^\circ &= 0 \\ \sum_{k=0}^N \frac{2k(k+1)(k+2)}{3} \psi_k^\circ &= \sum_{k=0}^N \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{8k(k^2-1)(k^2-4)(k+3)(k+4)}{105} - \right. \right. \\ &\left. \left. - 2\alpha^2 k(k+1)(k+2) \right) - i\alpha \frac{2k(k+1)(k+2)}{3} u^m|_{y=1} \right] \psi_k^\circ - i\alpha \left(\frac{\alpha^2}{\text{We}} + \frac{2}{\text{Re}} \text{ctg } \theta + a_y \omega^2 \sin \omega \tau \right) h \end{aligned} \quad (2.2)$$

В дальнейшем будет использоваться несколько другая форма уравнений, в которой будут отдельно собраны члены, зависящие от времени τ и не зависящие от времени. Окончательная система уравнений имеет вид

$$\mathbf{A} \frac{\partial \chi}{\partial \tau} = (\mathbf{B} + \mathbf{C} \cos \omega \tau + \mathbf{S} \sin \omega \tau) \chi \quad (2.3)$$

где \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{S} – матрицы размера $N+1$ на $N+1$, а χ – вектор размера $N+1$.

Для отыскания собственных значений однородной задачи (2.3) и исследования развития малых возмущений, описываемых (1.3) и (1.4), применялась теория Флоке [11]. Согласно этой теории, существует постоянная матрица \mathbf{R} , такая, что $\Phi(\tau + T) = \mathbf{R}\Phi(\tau)$, где $\Phi(\tau)$ – матрица фундаментальных решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3). Если обозначить через f_n (множители Флоке) собственные значения матрицы \mathbf{R} , то фундаментальные решения указанной системы можно представить в виде

$$\chi_n(\tau) = F_n(\tau)e^{-i\alpha(c_n)\tau}, \quad c_n = \frac{i \operatorname{Ln}(f_n)}{\alpha T}$$

где $F_n(\tau)$ – периодическая функция с периодом $2\pi/\omega$. Следовательно, если $\max_n(\operatorname{Im}(c_n)) > 0$, то бесконечно малые возмущения χ растут за период и, следовательно, течение неустойчиво к бесконечно малым возмущениям, в противном случае оно устойчиво. Действительная и мнимая части собственных чисел определяются по формулам

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(c_n) &= \frac{\omega}{2\pi\alpha} \ln(\operatorname{Im}(f_n)) \\ \operatorname{Re}(c_n) &= \frac{\omega}{2\pi\alpha} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}(f_n)}{\operatorname{Re}(f_n)}\right) + \frac{\omega k}{\alpha}, \quad k \in Z \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что существует серия волн, имеющих одинаковый коэффициент усиления, фазовые скорости которых различаются на слагаемое $\omega k/\alpha$. Для отыскания матрицы \mathbf{R} необходимо интегрировать систему (2.3) по времени в течение одного периода от линейно независимых начальных условий, в качестве которых удобно взять единичную матрицу, тогда $\mathbf{S}(T) = \mathbf{R}$.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3) является достаточно жесткой, поэтому необходимо использовать метод, обладающий хорошей вычислительной устойчивостью. Общая схема расчета собственных значений задачи (2.1) с граничными условиями (2.2) состоит из следующих шагов. На первом этапе рассчитываются все элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{S} , которые не зависят от времени.

Для интегрирования по времени системы уравнений (2.3) использовалась комбинация методов Адамса и Кранка – Николсона, такая, что зависящие от времени члены в правой части рассчитываются по явной схеме, а независящие – по неявной

$$\left(\mathbf{A} - \frac{1}{2}\Delta\tau\mathbf{B}\right)\chi(\tau + \Delta\tau) = \left(\mathbf{A} + \frac{1}{2}\Delta\tau\mathbf{B} + \frac{3}{2}\Delta\tau\mathbf{C}(\tau)\right)\chi(\tau) - \frac{1}{2}\Delta\tau\mathbf{C}(\tau - \Delta\tau)\chi(\tau - \Delta\tau)$$

$$\mathbf{G}(\tau + \Delta\tau)\chi(\tau + \Delta\tau) = 0$$

Устойчивость и точность предлагаемой схемы интегрирования по времени исследуются с помощью подходов, использованных в [12, 13]. Собственные значения схем должны соответствовать собственным значениям матрицы Якоби задачи (2.3), что необходимо для правильного воспроизведения развития решения от начальных условий. Рассматривались два набора параметров: $\operatorname{Re} = 8.004$, $\alpha = 0.1$, $\gamma = 4899.38$, $\theta = \pi/3$, $a_x = 1/2$, $a_y = 1/2$, $\omega = 2$ (соответствует точке нейтральной кривой в стационарном случае для поверхностной моды) и $\operatorname{Re} = 15990.01$, $\alpha = 2.667$, $\gamma = 4899.38$, $\theta = 1^\circ$, $a_x = 1/2$, $a_y = 1/2$, $\omega = 2$ (соответствует точке нейтральной кривой в стационарном случае для волн сдвига). Во всех случаях число многочленов $N = 32$.

В таблице приводятся результаты исследования устойчивости и точности полученного метода, показано по пять собственных значений (λ) с наибольшими мнимыми частями, которые сравнивались с точными собственными значениями λ^0 . После интегрирования по времени по описанной схеме задача сводится к системе линейных уравнений для нахождения решения на новом временном слое. Для ее решения применялась специальная версия метода исключения Гаусса.

Для сравнения проводились тестовые расчеты коэффициентов усиления и фазовых скоростей для набора параметров, рассмотренных в работе [6]. Результаты проведенных выборочных расчетов полностью соответствуют результатам указанной работы.

Точные λ°	$\Delta\tau = 0.001$	
	λ	$\lambda^\circ - \lambda$

Поверхностная мода: $Re = 8.004, \alpha = 0.1, \theta = \pi/3$

$1,9303 + 7,3527 \cdot 10^{-2}i$	$1,9313 + 7,3463 \cdot 10^{-2}i$	$-1,0095 \cdot 10^{-3} + 6,441 \cdot 10^{-5}i$
$-1,5609 - 3,2198i$	$-1,5603 - 3,2198i$	$-5,9847 \cdot 10^{-4} - 5,544 \cdot 10^{-5}i$
$4,9777 \cdot 10^{-2} - 2,77 \cdot 10^{-1}i$	$5,0230 \cdot 10^{-2} - 2,77 \cdot 10^{-1}i$	$-4,5327 \cdot 10^{-4} + 1,024 \cdot 10^{-5}i$
$1,2477 \cdot 10^{-1} - 7,7067 \cdot 10^{-1}i$	$1,2536 \cdot 10^{-1} - 7,7067 \cdot 10^{-1}i$	$-5,9375 \cdot 10^{-4} + 3,8089 \cdot 10^{-4}i$
$1,1712 \cdot 10^{-1} - 1,5103 \cdot 10^{-2}i$	$1,1778 \cdot 10^{-1} - 1,5103 \cdot 10^{-2}i$	$-6,5992 \cdot 10^{-4} + 2,8707 \cdot 10^{-3}i$

Волна Толмина – Шлихтинга: $Re = 15990.01, \alpha = 2,667, \theta = 1^\circ$

$1,5151 - 6,7135 \cdot 10^{-4}i$	$1,5162 - 6,7782 \cdot 10^{-4}i$	$-1,0333 \cdot 10^{-3} + 6,47e \cdot 10^{-6}i$
$-6,526 \cdot 10^{-1} - 3,1992 \cdot 10^{-3}i$	$-6,519 \cdot 10^{-1} - 3,1984 \cdot 10^{-3}i$	$-6,9514 \cdot 10^{-4} - 8,2 \cdot 10^{-7}i$
$4,7211 \cdot 10^{-1} - 2,7344 \cdot 10^{-2}i$	$4,7297 \cdot 10^{-1} - 2,7346 \cdot 10^{-2}i$	$-8,6497 \cdot 10^{-4} + 1,6 \cdot 10^{-6}i$
$4,4963 \cdot 10^{-1} - 4,9007 \cdot 10^{-2}i$	$4,5049 \cdot 10^{-1} - 4,9008 \cdot 10^{-2}i$	$-8,6544 \cdot 10^{-4} + 1,17 \cdot 10^{-6}i$
$4,2935 \cdot 10^{-1} - 7,0438 \cdot 10^{-2}i$	$4,3021 \cdot 10^{-1} - 7,0444 \cdot 10^{-2}i$	$-8,5971 \cdot 10^{-4} + 5,36 \cdot 10^{-6}i$

3. Влияние управляющих параметров на возникновение и развитие мод неустойчивости. Был рассмотрен случай колебаний пластины в нормальном относительно потока направлении ($a_x = 0, a_y \neq 0$). В этом случае скорость основного течения остается постоянной, а давление – функция времени с периодом T . Расчеты проводились для трех углов наклона: $\theta = \pi/2, \pi/3, 1^\circ$, при числах Рейнольдса, для которых основное течение неустойчиво. Были рассчитаны зависимости коэффициентов усиления и фазовых скоростей от волнового числа α для различных значений частоты и амплитуды колебаний. Для каждого α существует мода, соответствующая поверхностным волнам, мода, соответствующая волнам Толмина – Шлихтинга, и несколько резонансных мод, различающихся коэффициентом усиления и фазовой скоростью.

При $\theta = \pi/3, Re = 100, 1/We = 0, \omega = 1$ и $a_y = 10^{-4}$ в стационарном случае и при наличии колебаний коэффициенты усиления αc_i практически совпадают (фиг. 1). Рассмотрим закономерности ответвления резонансных мод для этих параметров. В этом случае существует собственная мода для стационарного течения с собственным числом $c_r^s(\alpha) + ic_i^s(\alpha)$. Предполагая, что при малой амплитуде колебаний a_n множители Флоке f_n в (2.4) меняются мало по сравнению со случаем нулевой амплитуды имеем

$$c_r(\alpha) = c_r^s(\alpha) + \omega k / \alpha$$

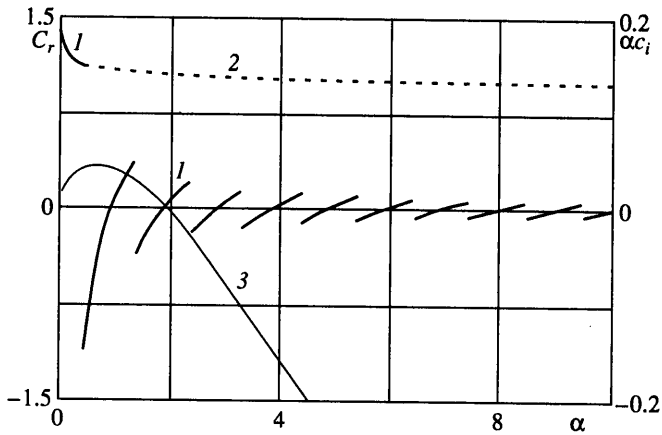
В точках ответвления α_* существует две моды (старая и новая), соответствующие значениям $\pm c_r(\alpha_*)$. Переход к новой моде соответствует увеличению k в (2.4) на единицу, поэтому в точке α_* можно выписать

$$c_r(\alpha_*) = c_r^s(\alpha_*) - \frac{\omega k}{\alpha_*}, \quad -c_r(\alpha_*) = c_r^s(\alpha_*) - \frac{\omega(k+1)}{\alpha_*}, \quad c_r^s(\alpha_*) = \frac{\omega(2k+1)}{2\alpha_*}$$

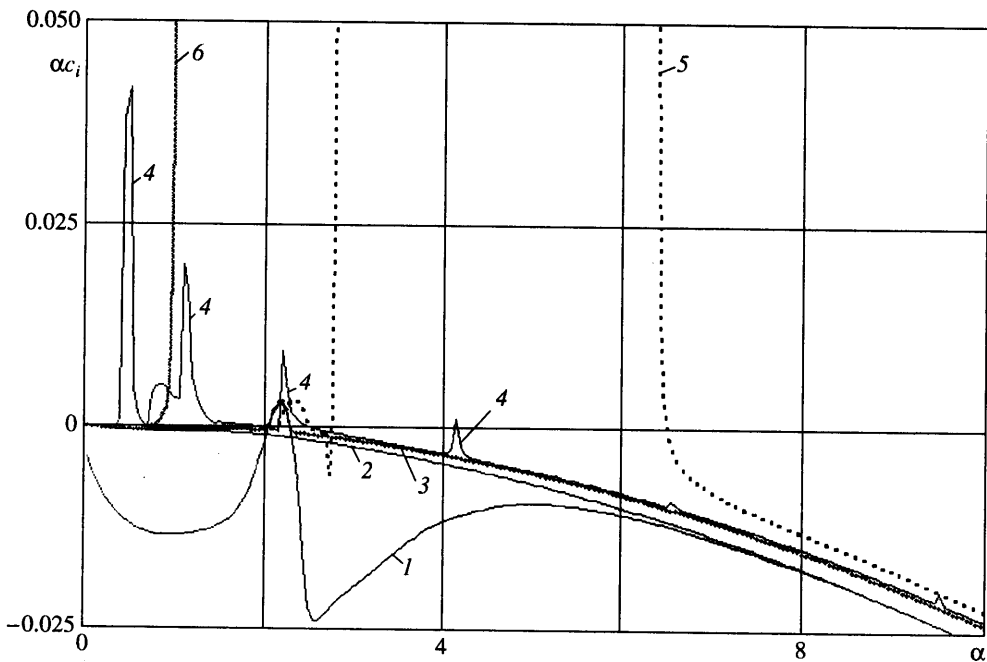
Отсюда можно получить выражение для фазовой скорости ответвляющегося возмущения $\alpha_* c_r^s(\alpha_*)$

$$\alpha_* c_r^s(\alpha_*) = \omega(1/2 + k)$$

Таким образом, новые волны ответвляются с частотами $\omega(k + 1/2)$ в точках α_* , т.е. начиная с субгармоники $\omega/2$. Субгармоника ответвляется от основной поверхности моды неустойчивости, соответствующей гравитационным волнам в стационарном течении. Неустойчивой оставалась только мода, соответствующая длинным поверхностным волнам, которая неустойчива и в стационарном случае (фиг. 1). При этом все другие ответвляющиеся моды являются устойчивыми. При возрастании амплитуды a_y



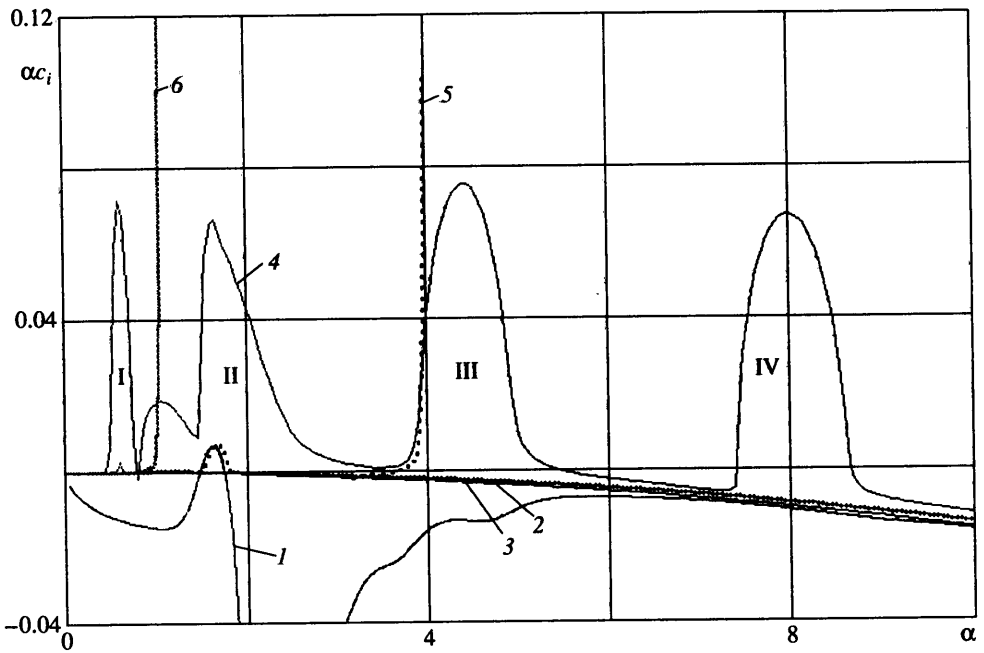
Фиг. 1. Фазовые скорости наиболее неустойчивых мод для $\theta = \pi/3$, $Re = 100$, $1/We = 0$ в стационарном случае (1) и при наличии колебаний $\omega = 1$, $a_y = 10^{-4}$ (2). Кривая 3 – коэффициенты усиления для стационарного случая и при наличии колебаний



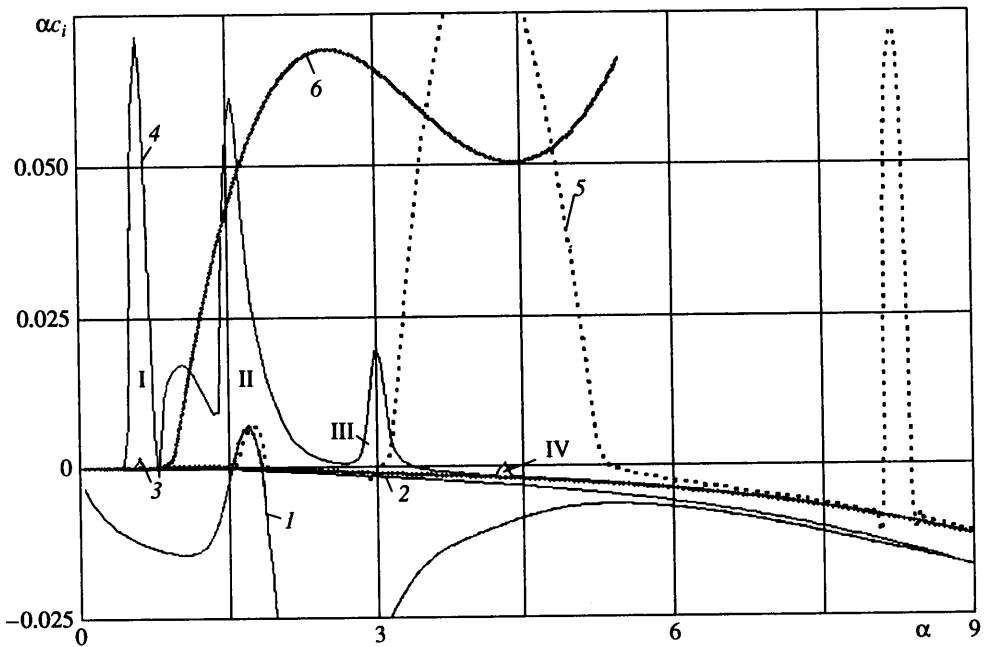
Фиг. 2. Коэффициенты усиления наиболее неустойчивых мод для $\theta = 1'$, $Re = 7000$, $1/We = 0$. Кривые 1 и 2 соответствуют коэффициентам усиления для волн Толмина – Шлихтинга и поверхностным волнам в стационарном случае. Кривые 3–6 $(\omega, a_y) = (1, 0.1); (1, 1); (4, 0.1); (4, 1)$

некоторые из ответвляющихся мод становятся неустойчивыми и образуются зоны неустойчивости по волновому числу α . При дальнейшем увеличении амплитуды существенно изменяются функции f_n в (2.4) и картина ответвлений резонансных мод усложняются в результате воздействия этого нелинейного фактора.

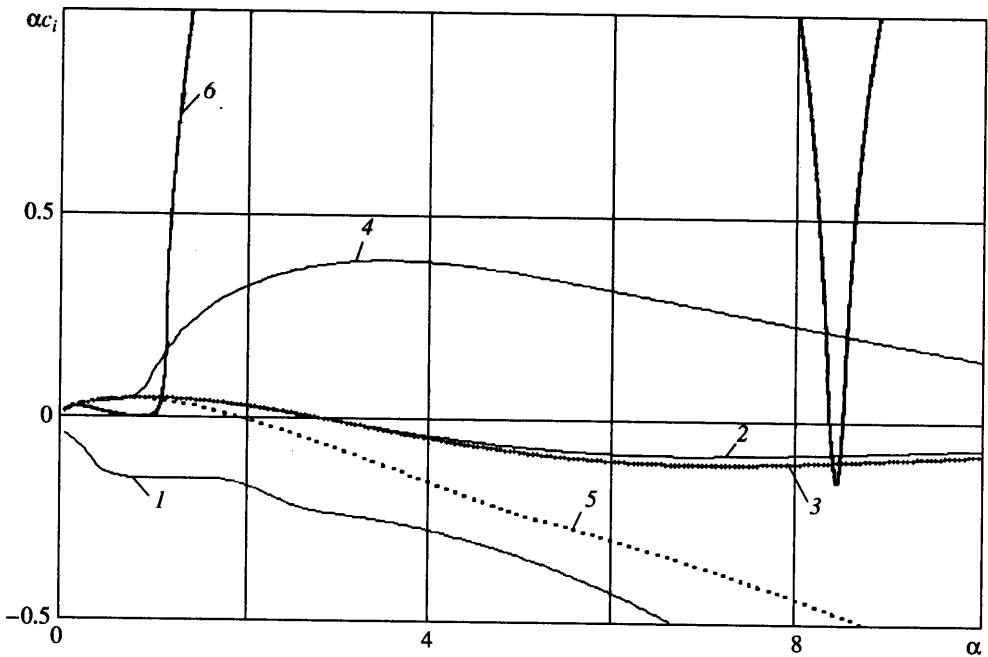
В стационарном случае при $\theta = 1'$, $Re = 7000$, $1/We = 0$ неустойчивыми являются только волны Толмина – Шлихтинга (фиг. 2). При низкой частоте колебаний и небольшой амплитуде ($\omega = 1$, $a_y = 0.1$, кривая 3) коэффициенты усиления не изменяются



Фиг. 3. Коэффициенты усиления для $Re = 12000$, остальные параметры, как на фиг. 2. Кривые 1-6 отвечают тем же случаям, что и на фиг. 2, I-IV – зоны неустойчивости



Фиг. 4. Коэффициенты усиления для $\gamma = 10000$, остальные параметры, как на фиг. 3. Кривые 1-6 отвечают тем же случаям, что и на фиг. 2, I-IV – зоны неустойчивости



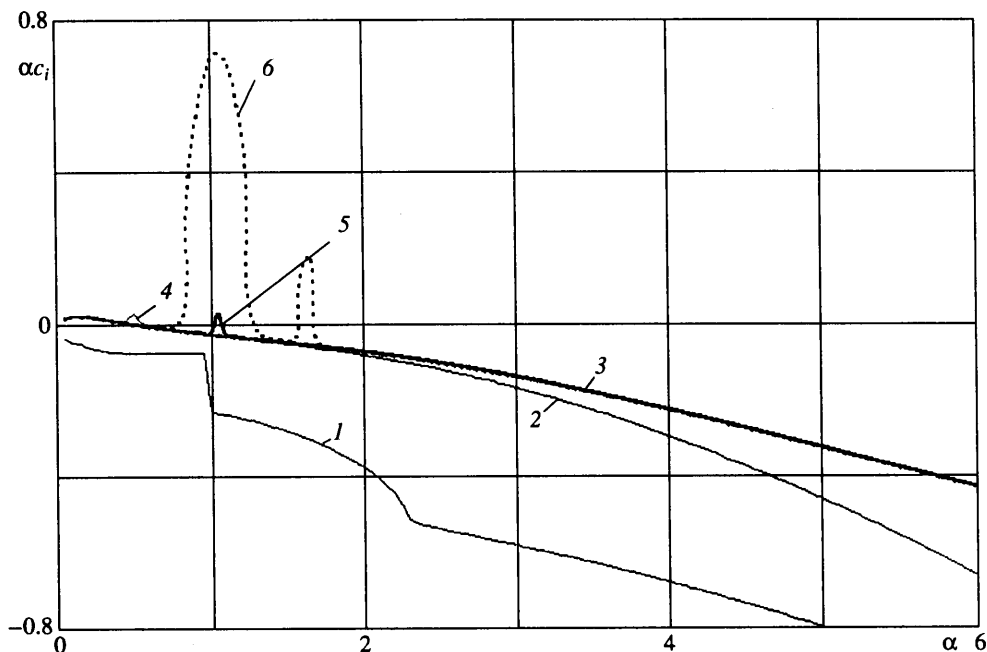
Фиг. 5. Коэффициенты усиления для $\theta = \pi/3$, $Re = 100$, $1/We = 0$. Кривые 1 и 2 соответствуют коэффициентам усиления для волн Толмина – Шлихтинга и поверхностным волнам в стационарном случае. Кривые 1–6 отвечают тем же случаям, что и на фиг. 2

по сравнению со стационарным случаем (кривые 1 и 2, волны Толмина – Шлихтинга и поверхностные волны). При увеличении амплитуды ($\omega = 1$ и $a_y = 1$, кривая 4) появляются неустойчивые моды в области, где в стационарном случае возмущения затухают. Наиболее растущими оказываются относительно длинные волны ($\alpha = 0.25$). При увеличении частоты для относительно небольших амплитуд ($\omega = 1$ и $a_y = 0.1$, кривая 5) коэффициенты усиления совпадают со стационарным случаем вплоть до $\alpha = 2$, далее для $2 < \alpha < 2.7$ область неустойчивости, соответствующая сдвиговым волнам, смещается в сторону больших α . Для $2.8 < \alpha < 6.5$ возникает новая неустойчивая мода, соответствующая резонансным волнам, которая растет значительно интенсивнее, чем волны Толмина – Шлихтинга в стационарном случае. При дальнейшем увеличении амплитуды ($\omega = 1$ и $a_y = 1$, кривая 6) резонансные волны образуются при меньших волновых числах $\alpha > 0.8$ и остаются неустойчивыми для значительно большего интервала длин волн.

При увеличении числа Рейнольдса качественная картина меняется мало, однако коэффициенты усиления более коротковолновых мод значительно превосходят коэффициенты тех же мод при меньшем Re (фиг. 3, $Re = 12000$).

В случае наличия поверхностного натяжения наблюдается стабилизация неустойчивых мод, особенно для больших значений α (фиг. 4). Существенно сокращается протяженность по α зон неустойчивости для всех ω и a_y . На устойчивость волн Толмина – Шлихтинга в стационарном случае эффект поверхностного натяжения влияет незначительно, что позволяет утверждать, что наличие колебаний приводит к образованию волн иной природы (резонансных волн).

При $\theta = \pi/3$, $Re = 100$, $1/We = 0$ (фиг. 5) в стационарном случае неустойчивыми являются длинные поверхностные волны, а волны Толмина – Шлихтинга быстро затухают. Как и при $\theta = 1'$, при низкой частоте колебаний и небольшой амплитуде колебаний свойства устойчивости течения не отличаются от стационарного ($\omega = 1$ и $a_y = 0.1$, кривая 3) для значений $\alpha < 4$, а более коротковолновые возмущения



Фиг. 6. Коэффициенты усиления для $\gamma = 10000$, остальные параметры, как на фиг. 5. Кривые 1–6 отвечают тем же случаям, что и на фиг. 2

затухают быстрее, чем в стационарном случае. При увеличении амплитуды ($\omega = 1$ и $a_y = 1$, кривая 4) образуется зона неустойчивости большой протяженности, коэффициенты усиления в данном случае оказываются большими по сравнению со стационарным течением. Однако для наиболее длинных волн коэффициенты усиления не меняются. При увеличении частоты колебаний для небольших амплитуд ($\omega = 4$ и $a_y = 0.1$, кривая 5) наблюдается стабилизация в небольшой области $2 < \alpha < 2.8$, более коротковолновые возмущения затухают значительно быстрее, чем при отсутствии колебаний. При увеличении амплитуды ($\omega = 4$ и $a_y = 1$, кривая 6) происходит стабилизация длинноволновых возмущений для $0.8 < \alpha < 0.95$, однако при $\alpha > 1$ возбуждаются сильно неустойчивые резонансные волны.

При наличии поверхностного натяжения, как и в предыдущем случае, наблюдается стабилизация коротковолновых возмущений (фиг. 6, $\gamma = 10000$). Эффект стабилизации для отдельных α , как и в предыдущем случае, не наблюдается, напротив, возникают новые зоны неустойчивости для $\omega = 1$ и $a_y = 1$ (кривая 4) и $\omega = 4$ и $a_y = 0.1$ (кривая 5) в зоне устойчивости стационарного течения.

При колебаниях пластины с достаточными частотой и амплитудой в дополнение к существующим в стационарном случае поверхностным волнам и волнам Толмина – Шлихтинга появляются резонансные волны, подобные образующимся при колебаниях горизонтальной пластины. Даже при малой амплитуде колебаний a_y появляется спектр резонансных волн – бифуркации происходят в дискретных α_* . Однако при малых амплитудах a_y все ответвляющиеся волны затухают. При возрастании a_y свыше некоторого критического значения a_y^c появляются зоны неустойчивости по α , сначала в области длинных волн, потом и в области более коротких волн. Коэффициенты усиления данных волн растут при увеличении амплитуды или числа Рейнольдса и уменьшаются при увеличении γ , характеризующего поверхностное натяжение. Наиболее растущие резонансные волны имеют фазовые скорости, близкие к $\omega/2$, ω и $3\omega/2$.

Резонансные волны растут значительно интенсивнее поверхностных волн и волн Толмина – Шлихтинга и являются неустойчивыми для параметров, при которых стационарное течение пленки оставалось устойчивым.

С ростом амплитуды a , при фиксированной частоте ω резонансные моды возбуждаются для все более коротких волн. Образуются зоны неустойчивости для некоторых интервалов значений α (зоны I–IV, фиг. 3–4). Зоны неустойчивости расширяются при росте числа Рейнольдса или увеличении частоты внешних колебаний и сокращаются при росте коэффициента поверхностного натяжения γ .

Заключение. Взаимодействие течения пленки по наклонной пластине с внешним периодическим возмущением приводит к образованию резонансных сильно неустойчивых резонансных волн. Существуют области волновых чисел α (зоны неустойчивости), в которых возникающие резонансные моды оказываются наиболее неустойчивыми. Коэффициенты усиления данных мод значительно превосходят коэффициенты усиления для стационарных мод и резонансных волн для α вне зон неустойчивости. Волновые числа α наиболее неустойчивых резонансных волн связаны с частотой внешних колебаний и не зависят от их амплитуды. В то же время поведение мод неустойчивости стационарного течения, соответствующих волнам Толмина – Шлихтинга и поверхностным волнам, меняется незначительно. Резонансная мода слабо взаимодействует со стационарными модами, коэффициенты которых мало меняются по сравнению со стационарным случаем. Для отдельных значений параметров происходит незначительное подавление поверхностных волн в результате колебаний. Существование явно выраженных зон неустойчивости для резонансных волн делает возможным управление развитием неустойчивости и формированием волновых структур в стекающих пленках с помощью вибраций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-01-00645).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Benjamin T.B. Wave formation in laminar flow down an inclined plane // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 554–574.
2. Yih G.-S. Stability of liquid flow down an inclined plane // Phys. Fluids. 1963. V. 6. № 3. P. 321–334.
3. Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 43–57.
4. Floryan J.M., Davis S.H., Kelly R.E. Instabilities of liquid film flowing down a slightly inclined plane // Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 4. P. 983–989.
5. Буря А.Г., Шкадов В.Я. Неустойчивость и формирование нелинейных структур в осциллирующем вращательном течении между цилиндрами // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 3. С. 5–15.
6. Woods D.R., Lin S.P. Instability of a liquid film flow over the a vibrating inclined plane // J. Fluid Mech. 1995. V. 294. P. 391–407.
7. Lin S.P., Chen J.N., Woods D.R. Suppression of instability in a liquid film flow // Phys. Fluids. 1996. V. 8. № 12. P. 3247–3252.
8. Любимов Д.В., Хеннер М.В., Шоц М.М. Об устойчивости поверхности раздела жидкостей при касательных вибрациях // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 3. С. 25–31.
9. Любимов Д.В., Шкляев С.В. Об устойчивости адвективного термоакустического течения // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 3. С. 10–21.
10. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A. Spectral methods in fluid dynamic. N.Y. etc.: Springer, 1988. 557 p.
11. Джозеф Д.Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
12. Рождественский Б.Л., Симакин И.Н. Численное исследование устойчивости плоского течения Пуазейля относительно двумерных возмущений конечной амплитуды: Препринт № 157. М.: ИПМ АН СССР, 1987. 40 с.
13. Rozhdestvensky B.L., Stoyanov M.I. Simulation of turbulent flows by numerical integration of Navier – Stokes equations // Proc. 12th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Oxford, July 1990. N.Y.: Springer, 1990. P. 19–34.