

УДК 532.516:533.6.011.7

© 2001 г. Л.И. ТУРЧАК, В.П. ШИДЛОВСКИЙ

## **ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ГАЗОВОЙ СМАЗКИ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ**

Проведена оценка параметров подобия для полной системы уравнений Навье–Стокса сжимаемого газа применительно к типовому газовому подшипнику. Установлено, что для описания процессов газовой смазки роль определяющих уравнений должны играть уравнения трехмерного сжимаемого пограничного слоя. После введения некоторых допущений относительно величин безразмерных параметров в определяющих уравнениях получено уравнение для определения давления – обобщенное уравнение Рейнольдса.

Применение спектрального метода анализа позволило преобразовать обобщенное уравнение Рейнольдса в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Получено аналитическое решение всей краевой задачи в целом для радиального подшипника, имеющего достаточно малый эксцентриситет. Сравнение численных результатов, определенных как с помощью решения обобщенного уравнения Рейнольдса, так и с помощью традиционной теории, дало возможность оценить влияние сил инерции, диссипативных процессов и теплопередачи.

Подшипники скольжения с жидкостной смазкой имеют обширную область приложений в промышленности, причем классическая теория гидродинамической смазки (см., например, [1,2]) дает вполне корректное описание механических процессов, происходящих внутри смазочного слоя, в предположении о том, что смазывающее вещество представляет собой несжимаемую вязкую жидкость. Однако в настоящее время непрерывно возрастающую роль играет также газовая смазка, область технологических приложений которой стала вполне сравнимой с соответствующей областью для опор скольжения с жидкостной смазкой.

Принципиальные основы теоретического анализа процессов газовой смазки приводятся в [3–5]. Следует отметить, однако, что аналитические выкладки, изложенные в этих изданиях, представляют собой не вполне корректную модификацию теории жидкостной смазки и в известной степени противоречат основам теории вязкой сжимаемой жидкости. Так, например, традиционная теория газовой смазки не принимает во внимание ни инерционные воздействия, ни влияние теплопередачи и диссипации механической энергии.

Если исключить из рассмотрения некоторые специальные случаи, математическое описание процессов газовой смазки должно базироваться на наиболее общих уравнениях сжимаемой вязкой жидкости, т.е. на уравнениях Навье–Стокса для вязкого и теплопроводного газа. Вместе с тем важнее всего рассчитать, с точки зрения инженерных приложений, распределение давления по поверхности подшипника. Для этого в традиционной теории газовой смазки а priori исключаются из рассмотрения некоторые члены, фигурирующие в полной системе дифференциальных уравнений, что и позволяет получить так называемое "уравнение Рейнольдса" для давления внутри смазочного слоя газового подшипника.

Естественным способом оценки сравнительной роли каждого из членов, входящих в уравнения Навье–Стокса, является представление этих уравнений в безразмерной

форме. Выбор характерных "естественных" масштабов для зависимых и независимых переменных позволяет получить уравнения, содержащие ряд безразмерных параметров, оценка величины которых основывается на использовании сведений о технических характеристиках тех аппаратов или механизмов, в которых устанавливаются газовые подшипники. При этом члены исходных уравнений, входящие в них с пренебрежимо малыми множителями, исключаются из рассмотрения.

Следующий этап предполагаемого исследования связан с выводом уравнения для определения давления. Непосредственное исключение составляющих скорости и температуры из определяющих уравнений в общем случае невозможно. Однако введение дополнительных допущений о малости некоторых безразмерных параметров или обратных им величин позволяет выразить все неизвестные через давление или его производные, получая таким образом уравнение для определения давления. После выбора численного метода оказывается возможным решить краевую задачу для этого уравнения и тем самым оценить важность учета тех эффектов, которыми либо полностью, либо частично пренебрегает традиционная теория.

**1. Исходные уравнения и их упрощение.** Рассматриваемая здесь проблема относится к изучению установившегося трехмерного движения внутри смазочного слоя газового подшипника скольжения. Если ограничиться исследованием ламинарного течения, то для описания указанного выше движения следует воспользоваться уравнениями Навье–Стокса. Если пренебречь эффектами кривизны поверхностей и ввести декартовы координаты, то полную систему таких уравнений для вязкого и теплопроводного совершенного газа можно найти, например, в [1]. Для последующего анализа эти уравнения приводятся к безразмерной форме путем выбора практически обоснованных масштабов для всех переменных величин.

Имея в своем распоряжении данные о технических характеристиках механизмов, работающих на подшипниках скольжения с газовой смазкой, можно выбрать естественные масштабы для приведения исходных уравнений к безразмерной форме. Некоторые из этих масштабов определяются атмосферными условиями, тогда как характерные скорость и температура связаны с условиями работы соответствующего прибора или механизма. Кроме того, говоря о масштабе длины, следует иметь в виду, как правило, двух таких масштабов: один из них связан с внешним размером механизма  $L$  (например, это длина ротора), а второй – это характерная толщина смазочного слоя  $\delta$ . Отношение этих двух масштабов для рассматриваемых здесь задач представляет собой очень малую величину:

$$\gamma = \delta/L \ll 1$$

После представления динамических уравнений в безразмерной форме при определенных членах преобразованных уравнений появляются множители в виде характерных параметров. При исследовании проблем смазки эти параметры подобия существенно отличаются от тех, которые фигурируют в задачах внешней аэродинамики. Если выбраны характерные значения скорости  $U$ , температуры  $T_*$ , давления  $p_*$ , плотности  $\rho_*$ , вязкости  $\mu_*$  и теплопроводности  $\lambda_*$ , а в качестве масштаба длины по осям  $x$  и  $z$  принята величина  $L$  и по оси  $y$  –  $\delta$ , то в безразмерной системе дифференциальных уравнений появляются параметры подобия: число Гэрисона  $\Lambda$ , модифицированное число Рейнольдса  $Re_m$ , фактор диссипации  $\alpha$  и число Прандтля  $Pr$ :

$$\Lambda = \frac{\mu_* U L}{\delta^2 p_*}, \quad Re_m = \frac{\kappa}{\kappa - 1} Re_* = \frac{\kappa U \rho_* \delta^2}{(\kappa - 1) \mu_* L}$$

$$\alpha = \frac{(\kappa - 1) U^2 Pr}{\kappa T_*}, \quad Pr = \frac{\mu_* c_p}{\lambda_*}$$

Здесь  $\kappa = c_p/c_v$  – отношение теплоемкостей для рабочего газа,  $c_p$  и  $c_v$  – удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно. Факти-

чески только три из представленных выше параметров подобия независимые, так как имеет место соотношение

$$\text{Re}_m \Lambda = \left( \frac{\kappa}{\kappa - 1} \right)^3 \frac{\alpha}{\text{Pr}}$$

Итак, преобразованная система уравнений содержит безразмерные параметры подобия и, в зависимости от их численных значений, может допускать то или иное упрощение. Как это следует из анализа данных о рабочих характеристиках целого ряда газовых подшипников, единственным параметром, который мог бы считаться а priori малым, является относительная толщина газового слоя  $\gamma$ . Если принять значение  $\gamma$  пренебрежимо малым ( $\gamma \ll 1$ ), то определяющие уравнения принимают упрощенную форму

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \Lambda^{-1} \frac{\partial p}{\partial x} + \text{Re}_* \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u w) \right] \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= \Lambda^{-1} \frac{\partial p}{\partial z} + \text{Re}_* \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u w) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v w) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w^2) \right] \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \alpha \Lambda^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) - u \frac{\partial p}{\partial x} - w \frac{\partial p}{\partial z} \right] - \\ &- \alpha \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \mu = T^n, \quad p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \rho T \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнения (1.1) являются формально уравнениями пограничного слоя, описывающими установившееся течение газа внутри тонкого слоя. Однако теория аэродинамического пограничного слоя не может быть распространена на исследование слоя газовой смазки в силу по меньшей мере двух причин. Во-первых, нужно иметь в виду, что краевые задачи теории смазки в корне отличаются от соответствующих задач аэродинамики. Во-вторых, давление, которое в аэродинамике определяется из решения задачи о внешнем течении, в теории смазки является важнейшей искомой переменной.

Для упрощения формулировки граничных условий проведем замену одной из независимых переменных, а именно: вместо  $y$  введем переменную  $\eta = y/h(x, z)$ , где  $h(x, z)$  – толщина смазочного слоя. Замена аргумента влечет за собой и замену соответствующей компоненты скорости

$$v^* = v - \eta \left( u \frac{\partial h}{\partial x} + w \frac{\partial h}{\partial z} \right)$$

В результате вместо уравнений (1.1) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( T^n \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) &= \Lambda^{-1} h^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \text{Re}_* h \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho h u^2) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho u v^*) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho h u w) \right] \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( T^n \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) &= \Lambda^{-1} h^2 \frac{\partial p}{\partial z} + \text{Re}_* h \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho h u w) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho v^* w) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho h w^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( T^n \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) &= \alpha \Lambda^{-1} h \left[ \frac{\partial}{\partial x} (h\rho u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho v^*) + \frac{\partial}{\partial z} (h\rho w) \right] - \\ &- h \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \alpha T^n \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial (h\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial (h\rho w)}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \quad p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \rho T \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для решения уравнений (1.2) нужно сформулировать граничные условия. Их простейший вариант для составляющих скорости – условия непротекания, тогда как тепловые граничные условия могут варьироваться в зависимости от технических или конструктивных особенностей механизма. Одна из версий, которая будет использована, сводится к заданию значений температуры на обеих граничных поверхностях

$$u = 1, \quad v^* = w = 0, \quad T = 1, \quad \eta = 0$$

$$u = v^* = w = 0, \quad T = T_{w1} / T_{w0} = \chi, \quad \eta = 1 \quad (1.3)$$

где  $T_{wi}$  – температура подвижной ( $i = 0$ ) или неподвижной ( $i = 1$ ) поверхности. В дополнение к условиям (1.3) следует указать, что по оси  $x$  должно быть соблюдено условие периодичности, а плоскость  $z = 0$  является плоскостью симметрии решения.

**2. Вывод уравнения для давления или обобщенного уравнения Рейнольдса.** Основная проблема теории газовой смазки заключается в определении распределения давления по поверхности подшипника  $p(x, z)$ . Это означает, что из определяющих уравнений требуется исключить все зависимые переменные, кроме давления, с тем, чтобы одно из этих уравнений – обычно уравнение неразрывности – могло быть представлено в форме уравнения для давления.

Между тем в пределах  $Re_* \rightarrow 0$  и  $\alpha \rightarrow 0$  уравнения (1.2) вырождаются именно в те уравнения, которые считаются исходными в традиционной теории газовой смазки (см., например, [4]). Этот факт позволяет предположить, что решение общей задачи может упроститься за счет введения допущения о малости величин  $Re_*$  и  $\alpha$ . Кроме того, предполагается, что число Гаррисона  $\Lambda$  достаточно велико и величина  $\Lambda^{-1}$  имеет тот же порядок, что и  $\alpha$  и  $Re_*$ . Подчеркнем, что никаких ограничений на величину температурного фактора  $\chi$  не налагается.

С учетом сделанных предположений выражения для каждой из искомых функций будем искать в форме

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} + \dots$$

где первый член не зависит ни от  $\alpha$ , ни от  $Re_*$ , ни от  $\Lambda^{-1}$ , тогда как второй и последующие члены дают поправку на влияние либо одного из перечисленных параметров, либо их комбинации. Полагая для конкретности вязкость газа пропорциональной температуре, т.е.  $n = 1$ , начнем с определения начального приближения для температуры. Третье из уравнений (1.2) дает

$$T^{(0)} = (\Theta \eta + 1)^{1/2} \quad (2.1)$$

где  $\Theta = \chi^2 - 1$ . При проведении последующих преобразований удобнее вместо  $\eta$  ввести независимую переменную

$$\zeta = \Theta \eta + 1$$

В силу уравнений (1.2) и граничных условий (1.3) можно положить

$$v^* \equiv 0, \quad w^{(0)} = 0, \quad u^{(0)} = \frac{\chi - \zeta^{1/2}}{\chi - 1} \quad (2.2)$$

Далее вместо неизвестной функции  $p(x, z)$  будем оперировать с комплексом  $P(x, z) = h(x, z) p(x, z)$ . Для третьего уравнения системы (1.2) получается линейное уравнение первого порядка, из которого определяется функция первого приближения  $T^{(1)}$ ; это уравнение имеет вид

$$T^{(1)'} + \frac{1}{2} \zeta^{-1} T^{(1)} = \frac{\alpha}{2(\chi-1)^2} + \frac{1}{2} C \zeta^{-1/2} \quad (2.3)$$

где штрих – дифференцирование по  $\zeta$ , а  $C$  – произвольная постоянная величина. Общее решение уравнения (2.3) можно представить, как

$$T^{(1)} = C \zeta^{1/2} + C_1 \zeta^{-1/2} - \frac{\alpha}{3(\chi-1)^2} \zeta$$

или, после определения постоянных  $C$  и  $C_1$  из условий обращения функции  $T^{(1)}$  в нуль на обоих концах интервала изменения  $\zeta$ , т.е. при  $\zeta = 1$  и  $\zeta = \chi^2$ , как

$$T^{(1)} = -\frac{\alpha}{3\Theta(\chi-1)} [(\chi+1)\zeta - (\chi^2 + \chi + 1)\zeta^{1/2} + \chi^2 \zeta^{-1/2}] \quad (2.4)$$

Аналогичным образом находятся выражения для  $u^{(1)}$  и  $w^{(1)}$ , хотя "постоянные", подобные  $C$  и  $C_1$  в выражении для  $T^{(1)}$ , оказываются здесь зависящими от  $x$  и  $z$ . Вновь полагая, что как  $u^{(1)}$ , так и  $w^{(1)}$  обращаются в нуль на концах интервала изменения  $\zeta$ , получим

$$\begin{aligned} u^{(1)} = & \frac{2}{3} \Theta^{-2} \Lambda^{-1} (hP_x - h_x P) [\zeta^{3/2} - (\chi^2 + \chi + 1)\zeta^{1/2} + \chi(\chi + 1)] + \\ & + \Theta^{-2} (\chi - 1)^{-2} \operatorname{Re}_* hP_x \left[ \frac{1}{3} \zeta^2 - \frac{4}{3} \chi \zeta^{3/2} + 2\chi^2 \zeta - \left( \chi^3 + \chi^2 - \chi + \frac{1}{3} \right) \zeta^{1/2} + \right. \\ & \left. + \chi^3 - \chi^2 + \frac{1}{3} \chi \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$w^{(1)} = \frac{2}{3} \Theta^{-2} \Lambda^{-1} (hP_z - h_z P) [\zeta^{3/2} - (\chi^2 + \chi + 1)\zeta^{1/2} + \chi(\chi + 1)] \quad (2.6)$$

Символы функций с буквенными индексами здесь и в дальнейшем соответствуют обозначениям производных.

Коль скоро выражения (2.4) – (2.6) полностью конкретизированы, их можно подставить в уравнение неразрывности из системы (1.2) и получить дифференциальное уравнение, содержащее единственную искомую переменную – давление  $p(x, z)$ . Возникающее при этом затруднение состоит в том, что выражения (2.1), (2.2), (2.4) – (2.6) зависят от нормальной координаты  $\zeta$ . Так как давление в тонком слое не зависит от этого аргумента, на данном этапе анализа считается излишней и зависимость от  $\zeta$  указанных выражений. Чтобы избавиться от этой зависимости, выражения, вошедшие в уравнение неразрывности, можно заменить их средними интегральными значениями. Так, например, вместо функции  $u(x, \zeta, z)$  вводится

$$\langle u(x, z) \rangle = \Theta^{-1} \int_1^{\chi^2} u d\zeta$$

В уравнение неразрывности входит плотность  $\rho$ , которая, в силу уравнения состояния, пропорциональна  $pT^{-1}$ . Величину  $T^{-1}$ , обратную температуре, следует представить как

$$T^{-1} = (\zeta^{1/2} + T^{(1)})^{-1} = \zeta^{-1/2} (1 - \zeta^{-1/2} T^{(1)})$$

В качестве искомой переменной в дальнейшем удобнее принять

$$\Phi(x, z) = h^2(x, z)p^2(x, z)$$

и после элементарных алгебраических преобразований получить уравнения

$$C_1 h \Phi_{xx} + h \Phi_{zz} + C_2 h_x \Phi_x + C_3 h_{xx} \Phi - h_z \Phi_z - 2h_{zz} \Phi = 12 \Lambda_* (\sqrt{\Phi})_x \quad (2.7)$$

$$C_1 = 1 + \frac{(\chi+1)(4\chi+5)}{4(4\chi^2+7\chi+4)} \operatorname{Re}_* \Lambda, \quad C_2 = -1 + \frac{(\chi+1)(4\chi+5)}{4(4\chi^2+7\chi+4)} \operatorname{Re}_* \Lambda \quad (2.8)$$

$$C_3 = -2, \quad \Lambda_* = \frac{5(\chi+1)^3(\chi+2)}{8(4\chi^2+7\chi+4)} \left[ 1 - \frac{\alpha}{6(\chi+1)} \right] \Lambda$$

Чтобы сформулировать граничные условия для решения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных (2.7), необходимо иметь несколько более полную информацию о форме подшипника. Далее предполагается, что опора скольжения в целом обладает плоскостью симметрии, расположенной нормально по отношению к оси  $z$ , причем именно в этой плоскости находится начало координат. Полагается также, что характерная длина  $L$  соответствует половине полной длины подшипника. Если торец подшипника открыт, то давление на торце должно быть равно атмосферному. Это означает, что граничные условия для функции  $\Phi(x, z)$  имеют вид

$$\Phi_z(x, 0) = 0, \quad \Phi(x, 1) = h^2(x, 1) \quad (2.9)$$

В результате получено уравнение (2.7) для определения распределения давления вдоль граничных поверхностей газового подшипника. Как видно из выражений (2.8) для коэффициентов указанного уравнения, уравнение (2.7) справедливо при условиях, значительно более общих, чем те, которые приняты в традиционной теории, а именно при значениях  $\alpha$  и  $\operatorname{Re}_*$ , отличных от нуля, и при  $\chi \neq 1$ , поэтому уравнение (2.7) может быть по праву названо обобщенным уравнением Рейнольдса. Отсюда также следует что при  $\operatorname{Re}_* = \alpha = 0$  и  $\chi = 1$  уравнение (2.7) превращается в то же уравнение Рейнольдса, которое фигурирует в традиционной теории.

**3. Численное решение обобщенного уравнения Рейнольдса – линейаризация и применение спектрального метода.** Поставив перед собой цель – построение численного решения уравнения (2.7) с граничными условиями (2.9), необходимо принять во внимание нелинейный характер этого уравнения. На данном этапе исследования ограничимся рассмотрением подшипников, имеющих специальную геометрию, а именно радиальных подшипников (см. фиг. 1). Кроме того, будем предполагать, что оси подшипника и ротора строго параллельны, т.е. перекос осей отсутствует. Это значит, что толщина зазора зависит только от  $x$  или, конкретнее, что

$$h(x) = 1 + \varepsilon \cos x$$

где  $\varepsilon$  – относительный эксцентриситет радиального подшипника.

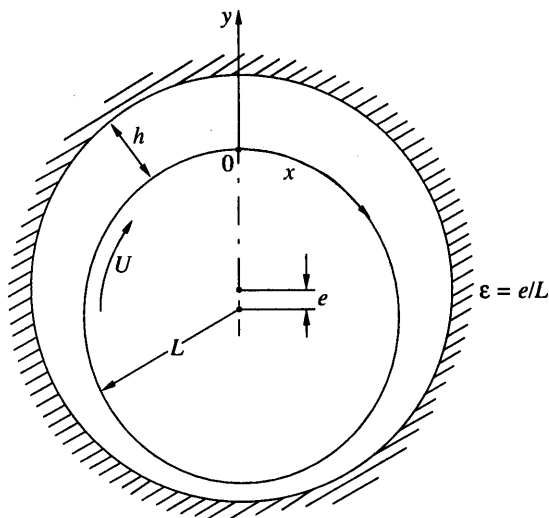
С целью линейаризации уравнения (2.7) можно воспользоваться обычно имеющей место малостью эксцентриситета  $\varepsilon$  и искать решение в форме

$$\Phi = h^2 + \varepsilon \Phi_*^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi_*^{(2)} + \dots = 1 + \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} + \dots \quad (3.1)$$

$$\Phi^{(1)} = \Phi_*^{(1)} + 2 \cos x, \quad \Phi^{(2)} = \Phi_*^{(2)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

Если функция  $\Phi$  аппроксимируется выражением (3.1), то

$$\sqrt{\Phi} = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \Phi^{(1)} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\Phi^{(2)} - \frac{1}{4} \Phi^{(1)^2}) + \dots$$



Фиг. 1. Схема радиального подшипника

В большинстве практически интересных случаев вполне достаточно ограничиться определением двух первых приближений в разложениях типа (3.1), т.е. нахождением функций  $\Phi^{(1)}$  и  $\Phi^{(2)}$ . Тогда, обозначая дополнительно

$$Q = 6\Lambda_*$$

получим в первом приближении

$$C_1 \Phi_{xx}^{(1)} + \Phi_{zz}^{(1)} - Q \Phi_x^{(1)} = C_3 \cos x \quad (3.2)$$

при граничных условиях

$$\Phi_z^{(1)}(x, 0) = 0, \quad \Phi^{(1)}(x, 1) = 2 \cos x \quad (3.3)$$

Для решения задачи (3.2) – (3.3) целесообразно воспользоваться спектральным методом, а точнее – версией этого метода с рядом Фурье [6]. Это означает, что пробное решение данной задачи будет отыскиваться в форме

$$\Phi^{(1)} = \sum_{m=1}^N [a_m(z) \sin mx + b_m(z) \cos mx] \quad (3.4)$$

В соответствии с общими принципами применения спектрального метода разложение (3.4) подставляется в уравнение (3.2), что дает невязку  $R$ . Следующий этап анализа должен бы сводиться к минимизации невязки путем приравнивания нулю интегралов от  $R$  с весами  $\sin mx$  или  $\cos mx$ , взятых в пределах от 0 до  $2\pi$ . Однако специфика задачи для данной конкретной геометрии состоит в том, что при всех  $m > 1$  подстановка (3.4) в (3.2) дает однородные уравнения с нулевыми граничными условиями, так что выражение (3.4) вырождается в более простое

$$\Phi^{(1)} = a(z) \sin x + b(z) \cos x$$

причем это выражение может рассматриваться не как пробное, а как точное решение уравнения (3.2). Обозначая штрихами дифференцирование по  $z$ , вместо уравнения (3.2) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a'' - C_1 a + Qb = 0$$

$$b'' - C_1 b - Qa = C_3$$

с граничными условиями

$$a'(0) = b'(0) = a(1) = 0, \quad b(1) = 2$$

Более того, вводя вместо двух функций  $a(z)$  и  $b(z)$  комплексную функцию

$$\lambda(z) = a(z) + ib(z)$$

получим одно единственное уравнение

$$\lambda'' - (C_1 + iQ)\lambda = iC_3 \quad (3.5)$$

с граничными условиями

$$\lambda'(0) = 0, \quad \lambda(1) = 2i \quad (3.6)$$

Задача (3.5) – (3.6) допускает аналитическое решение в форме

$$\lambda = \lambda_p + D \operatorname{ch}[(\omega + iv)z], \quad \lambda_p = -\frac{C_3(Q + iC_1)}{C_1^2 + Q^2}$$

$$\omega = \left[ \frac{1}{2}(\sqrt{Q^2 + C_1^2} + C_1) \right]^{1/2}, \quad \nu = \left[ \frac{1}{2}(\sqrt{Q^2 + C_1^2} - C_1) \right]^{1/2}, \quad D = \frac{2i - \lambda_p}{\operatorname{ch}(\omega + iv)} \quad (3.7)$$

Уравнение второго приближения для  $\Phi^{(2)}$  можно представить в виде

$$C_1 \Phi_{xx}^{(2)} + \Phi_{zz}^{(2)} - Q \Phi_x^{(2)} = -(C_1 \Phi_{xx}^{(1)} - C_3 \Phi^{(1)} + \Phi_{zz}^{(1)}) \cos x + C_2 \Phi_x^{(1)} \sin x - \frac{1}{2} Q \Phi^{(1)} \Phi_x^{(1)} \quad (3.8)$$

По аналогии с тем, как это делалось для уравнения первого приближения, можно построить аналитическое решение и для уравнения (3.8) с граничными условиями, вытекающими из общих граничных условий для  $\Phi(x, z)$ . Выясняется, что решение для  $\Phi^{(2)}$  следует искать в форме

$$\Phi^{(2)} = \alpha(z) \sin 2x + \beta(z) \cos 2x + \delta(z)$$

При этом для определения  $\alpha(z)$ ,  $\beta(z)$  и  $\delta(z)$  получаются уравнения

$$\alpha'' - 4C_1 \alpha + 2Q\beta = \frac{1}{2} Qb + \frac{1}{2} C_4 a - \frac{1}{4} Q(a^2 - b^2)$$

$$\beta'' - 4C_1 \beta - 2Q\alpha = -\frac{1}{2} Qa + \frac{1}{2} C_4 b - \frac{1}{2} Qab - \frac{1}{2} C_3$$

$$\delta'' = -\frac{1}{2} b'', \quad C_4 = C_2 + C_3 \quad (3.9)$$

Третье из уравнений (3.9) не связано с двумя первыми, которые, по аналогии с уравнениями первого приближения, можно объединить в одно с помощью введения комплексной функции

$$\lambda_1(z) = \alpha(z) + i\beta(z)$$

Для определения  $\lambda_1(z)$  получаем уравнение

$$\lambda_1'' - (4C_1 + 2iQ)\lambda_1 = \frac{1}{2}(C_4 - iQ)\lambda - \frac{1}{4} Q\lambda^2 - \frac{1}{2} iC_3 \quad (3.10)$$

где функция  $\lambda(z)$ , фигурирующая в правой части, уже известна.

Граничные условия для функции  $\lambda_1(z)$  имеют вид

$$\lambda_1'(0) = 0, \quad \lambda_1(1) = \frac{1}{2} i \quad (3.11)$$



Получение частного решения уравнения (3.10) с правой частью достаточно просто, причем удобнее всего расчленить это решение на три слагаемых:

$$\lambda_{1p} = \lambda_{1c} + \lambda_{1k} + \lambda_{12k}$$

$$\lambda_{1c} = \frac{iC_3}{4(2C_1 + iQ)}, \quad \lambda_{1k} = B\lambda + E, \quad B = -\frac{C_4 - iQ}{3C_1 + iQ}, \quad E = \frac{iC_3B}{4C_1 + 2iQ}$$

Наиболее кропотливым оказывается определение  $\lambda_{12k}$ , т.е. той доли частного решения, которая соответствует члену правой части уравнения (3.10), пропорциональному  $\lambda^2$ . В соответствии с (3.7) при  $k = \omega + i\nu$  имеем

$$\lambda^2 = \lambda_p^2 + 2\lambda_p D \operatorname{ch} kz + \frac{1}{2} D^2 (\operatorname{ch} 2kz + 1)$$

это означает, что

$$\lambda_{12k} = A_0 + A_1 \operatorname{ch} kz + A_2 \operatorname{ch} 2kz$$

$$A_0 = \frac{Q(2\lambda_p^2 + D^2)}{16(2C_1 + iQ)}, \quad A_1 = \frac{Q\lambda_p D}{2(3C_1 + iQ)}, \quad A_2 = \frac{iD^2}{16}$$

Полное решение уравнения (3.10) с учетом граничных условий (3.11) может быть представлено как

$$\lambda_1 = \lambda_{1c} + \lambda_{1k} + \lambda_{12k} + \left( \frac{1}{2} i - \lambda_{1c} - 2iB - E - A_0 - A_1 \operatorname{ch} k - A_2 \operatorname{ch} 2k \right) \frac{\operatorname{ch}(k_1 z)}{\operatorname{ch} k_1}$$

$$k_1 = \omega_1 + i\nu_1, \quad \omega_1 = \left( \sqrt{Q^2 + 4C_1^2} + 2C_1 \right)^{1/2}, \quad \nu_1 = \left( \sqrt{Q^2 + 4C_1^2} - 2C_1 \right)^{1/2}$$

Чтобы завершить построение второго приближения  $\Phi^{(2)}$ , следует проинтегрировать последнее из уравнений (3.9) с учетом граничного условия  $\delta(1) = 1/2$ . Получим

$$\delta(z) = -\frac{1}{2} b(z) + \frac{3}{2}$$

Давление в точке с координатами  $x, z$  выражается как

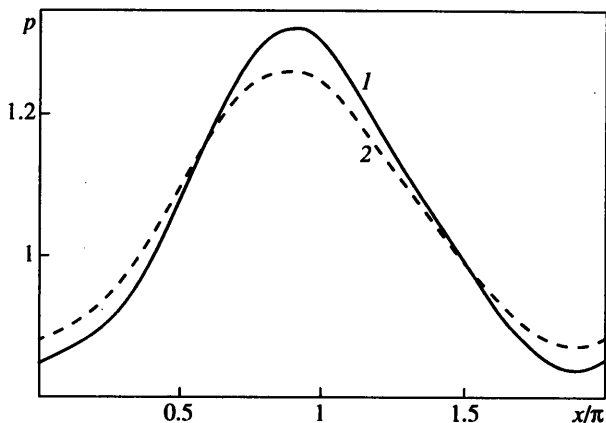
$$p(x, z) = \frac{[1 + \varepsilon \Phi^{(1)}(x, z) + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}(x, z)]^{1/2}}{h(x, z)}$$

**4. Пример расчета распределения давления.** В соответствии с тем, что оговаривалось выше, в качестве примера выбирается радиальный подшипник, работающий в нормальных атмосферных условиях. Характерные размеры подшипника:  $L = 8$  см,  $\delta = 24$  мкм, так что  $\gamma = \delta/L = 3 \cdot 10^{-4}$ . Число оборотов ротора  $n = 1.6129 \cdot 10^4$  об/мин и, следовательно,  $U = 6.756113 \cdot 10^3$  см/с.

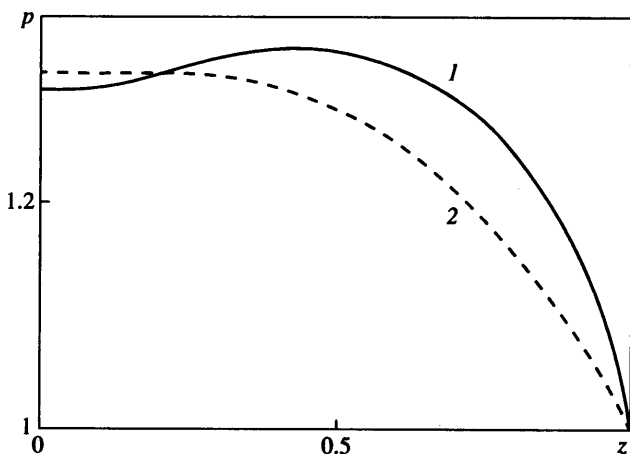
Безразмерные параметры, характеризующие течение в смазочном слое, имеют значения

$$\operatorname{Re}_* = 3.47831 \cdot 10^{-2}, \quad \alpha = 3.32563 \cdot 10^{-3}, \quad \Lambda = 1.6732177.$$

Имея в виду воздушную смазку, положим  $\kappa = 1.4$ ,  $\operatorname{Pr} = 0.7$ . Влияние теплопередачи без учета других воздействий, пренебрегаемых традиционной теорией, рассмотрено ранее [7,8]. Для данного примера целесообразно выбрать значение температурного фактора  $\chi$ , умеренно отличающееся от единицы. Если учесть, что, например, для газовых подшипников, работающих в криогенных установках, этот фактор может варьироваться в очень широких пределах, значение  $\chi = 3$  вполне приемлемо.



Фиг. 2. Распределение давления в окружном направлении при  $z = 0.5$ : модифицированная (1) и традиционная теория (2)



Фиг. 3. Распределение давления в осевом направлении при  $x = \pi$ : модифицированная (1) и традиционная теория (2)

Для получения окончательных численных результатов необходимо задать также относительный эксцентриситет подшипника; будем полагать  $\epsilon = 0.2$ .

Используя приведенные выше значения параметров, по формулам (2.8) можно вычислить все коэффициенты  $C_i$ , а также эффективное значение числа Гаррисона  $\Lambda$ . Дальнейшие вычисления связаны только с арифметическими операциями над комплексными числами и с вычислением значений гиперболических функций комплексного аргумента при любых  $z$ . Приведем графики распределения давления, полученные в результате вышеописанного расчета. На фиг. 2 представлено распределение давления  $p$  по  $x$  при  $z = 0.5$ , а на фиг. 3 –  $p$  по  $z$  при  $x = \pi$  (кривые 1). Здесь же кривые 2 показывают аналогичные распределения давления  $p$ , найденные по традиционной теории. Для получения кривых 2 нужно лишь в формулах (2.8) положить  $\text{Re}_* = \alpha = 0$  и  $\chi = 1$ .

Единичный пример расчета не позволяет, разумеется, сделать всеобъемлющие выводы относительно преимуществ модифицированной теории газовой смазки. Тем не менее из графиков, приведенных на фиг. 2 и 3, видно, что кривые распределения

давления, рассчитанные с помощью традиционной теории и на основе выведенного здесь обобщенного уравнения Рейнольдса, имеют ярко выраженные количественные и качественные различия. Эти различия можно охарактеризовать так.

На большей части длины подшипника давление, рассчитанное с помощью обобщенного уравнения Рейнольдса, оказывается существенно выше, чем по традиционной теории. Исключение составляет окрестность плоскости симметрии подшипника, где данные обоих вариантов расчета различаются лишь на десятые доли процента.

Согласно данным расчетов с использованием обобщенного уравнения Рейнольдса, кривая распределения давления в окружном направлении (построенная для некоторого характерного сечения) оказывается почти симметричной, тогда как традиционная теория дает кривую, более отчетливо сдвинутую в сторону малых значений угловой координаты  $x$ .

**Заключение.** В данной работе не проводился полный и всесторонний параметрический анализ решений обобщенного уравнения Рейнольдса, хотя такой анализ желательно провести в будущем. Тем не менее, очевидно, что применение традиционной теории, т.е. пренебрежение факторами  $\alpha$ ,  $Re_*$  и  $|\chi - 1|$  может привести к серьезным ошибкам при расчете несущей способности конкретного варианта газового подшипника. При этом особенно важно, что полученное здесь обобщенное уравнение имеет ту же структуру, что и традиционное уравнение Рейнольдса, а следовательно, к его решению могут быть применены разработанные прежде методы и трудоемкость численного решения задачи в целом отнюдь не возрастает.

Есть все основания полагать, что при построении алгоритмов расчета газовых подшипников следует исходить из результатов изложенной здесь модифицированной теории как более строгой и построенной на основе фундаментальных уравнений аэрогидродинамики.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
2. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
3. Gross W.A. Gas Film Lubrication. N.Y.; L.: Wiley, 1962. 413 p.
4. Constantinescu V.N. Gas Lubrication (на румынском языке). Bucharest: Publ. House of the Acad. of RPR, 1963. 633 p.
5. Подшипники с газовой смазкой / Ред. Грэссем Н.С. и Пауэлл Дж.У. М.: Мир, 1966. 423 с.
6. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. Т. 1. М.: Мир, 1991. 502 с.
7. Шидловский В.П. Постановка и численное решение современных задач газовой смазки. Проблемы прикладной математики и информатики / Ред. Белоцерковский О.М. М.: Наука, 1987. С. 82–89.
8. Walowit J.A., Anno J.N. Modern Developments in Lubrication Mechanics. L.: Appl. Sci. Publ., 1975. 244 p.

Москва

Поступила в редакцию  
25.VII.2000