

УДК 532.5.013.4:534.25:536.252

© 2001 г. С.В. ШКЛЯЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВИБРОКОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В НАКЛОННОМ СЛОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ТРЕХМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Исследуется устойчивость осредненного течения в подогреваемом сбоку наклонном слое жидкости, вызванного совместным действием силы тяжести и вертикальных высокочастотных вибраций. Аналитически рассмотрены трехмерные длинноволновые возмущения. Сравнение с полученными ранее численными результатами показало, что данная мода неустойчивости наиболее опасна в широком диапазоне параметров.

Поведению неоднородно нагретой жидкости в поле высокочастотных вибраций уделяется пристальное внимание, в частности, в связи с экспериментами на борту космических станций, где влияние силы тяжести мало, а вибрационные ускорения играют определяющую роль. В земных условиях значительный интерес представляет взаимодействие гравитационных и вибрационных явлений.

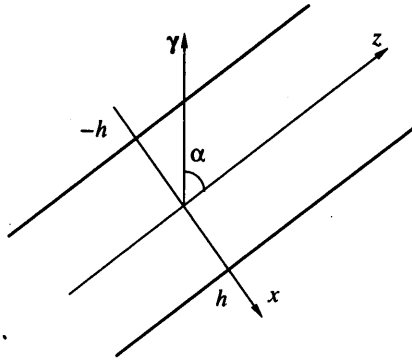
Во многих задачах частота внешнего воздействия на неоднородно нагретую жидкость не настолько велика, чтобы были существенны эффекты сжимаемости, но достаточна для того, чтобы диссипация при пульсационном движении являлась пренебрежимо малой. В этом случае для описания осредненной динамики жидкости применимы уравнения термовибрационной конвекции.

Неоднородно нагретая жидкость может находиться в состоянии механического равновесия только при строго вертикальном градиенте температуры [1]. При наличии высокочастотных вибраций в большинстве случаев имеет смысл говорить о квазиравновесии, т.е. об отсутствии осредненного течения на фоне пульсаций. Подробное описание работ, посвященных исследованию этого состояния, можно найти в [2]. Особое внимание в [2] уделяется изучению квазиравновесия жидкости в плоских слоях различной ориентации, причем наиболее интересным представляется рассмотрение наклонного слоя.

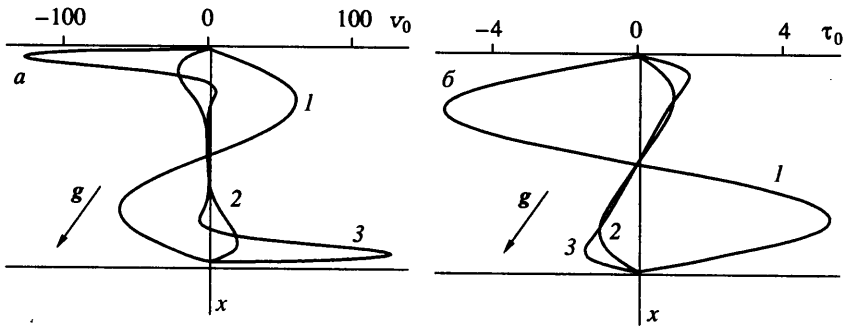
Условия реализации квазиравновесия и его устойчивость в плоском наклонном слое жидкости изучены в [3] для различных направлений оси вибраций и градиента температуры. Показано, что квазиравновесие возможно лишь при выполнении определенного алгебраического соотношения, связывающего управляющие параметры. Решена, в частности, задача об устойчивости квазиравновесия при вертикальных вибрациях и горизонтальном градиенте температуры для любого угла наклона слоя.

Если условие квазиравновесия не выполняется, то в жидкости возникает осредненное течение. Влияние гармонических высокочастотных вибраций на плоскопараллельное адвективное течение жидкости в горизонтальном слое рассматривается в [4]. Изучаются продольные и поперечные к слою вибрации; характеристикой интенсивности течения служит расход жидкости в одном из встречных потоков. В [5] исследовалось течение в наклонном слое для продольного градиента температуры и произвольного направления оси вибраций.

Результаты, относящиеся к устойчивости адвективного течения в случае вертикальных вибраций, получены в [6]. Показано, что высокочастотные поперечные вибрации повышают устойчивость течения для всех значений числа Прандтля.



Фиг. 1. Геометрия задачи



Фиг. 2. Профиль скорости (а) и добавки к температуре (б) основного течения. Линии 1–3 соответствуют $Q = -81, 1024$ и $4 \cdot 10^4$ ($\alpha = 45^\circ$)

В [7] исследована линейная устойчивость конвективного течения в плоском вертикальном слое, подогреваемом сбоку, при наличии продольных вибраций. Для чисел Прандтля от 0 до 10 определены границы устойчивости течения с кубическим профилем скорости относительно монотонных возмущений. Обнаружено дестабилизирующее действие вибраций на устойчивость конвективного течения.

Работы [3, 6, 7] являются частным случаем задачи устойчивости течения в подверженном вертикальным вибрациям наклонном слое жидкости, на границах которого поддерживается горизонтальный градиент температуры. Анализ этой задачи для плоских и спиральных возмущений посвящена [8]. В настоящей работе в длинноволновом пределе рассматриваются произвольные пространственные возмущения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим достаточно протяженный наклонный слой жидкости толщиной $2h$. Выберем систему координат, как показано на фиг. 1. Наклон слоя характеризуется единичным вертикальным вектором $\gamma(-\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$. На твердых идеально теплопроводных границах поддерживается линейное распределение температуры $T(x = \pm h) = A(\pm h \cos\alpha + z \sin\alpha)$: градиент температуры равен по величине A и направлен вдоль горизонтального единичного вектора $m(\cos\alpha, 0, \sin\alpha)$. Слой подвергается высокочастотным вертикальным вибрациям с частотой ω и амплитудой a .

Будем предполагать, что период колебаний намного меньше всех характерных гидродинамических и тепловых времен, т.е. $\omega \gg \max\{v/h^2, \chi/h^2\}$, а амплитуда удовлетворяет соотношению $a \ll 1/\beta A$. Здесь v, χ и β – коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и объемного расширения соответственно. В этих условиях возможно разделение конвективных движений на пульсационные (с частотой ω) и осредненные (с характерным диссипативным временем). Для описания

осредненного движения жидкости применимы уравнения и граничные условия вибрационной конвекции [9]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \text{Ra} T \boldsymbol{\gamma} + \text{R}_v (\mathbf{w} \nabla) (T \mathbf{n} - \mathbf{w}) \quad (1.1)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \Delta T, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{rot} \mathbf{w} = \nabla T \times \mathbf{n}, \quad \text{div} \mathbf{w} = 0 \quad (1.3)$$

$$x = \pm 1: \quad \mathbf{v} = \mathbf{w}_x = 0, \quad T = \pm \cos \alpha + z \sin \alpha \quad (1.4)$$

$$\text{Ra} = \frac{g \beta A h^4}{\nu \chi}, \quad \text{R}_v = \frac{(\omega \beta A)^2 h^4}{2 \nu \chi}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$$

Кроме того, в предположении замкнутости слоя на бесконечности необходимо поставить условие отсутствия потока вдоль оси z для осредненной и пульсационной компонент скорости:

$$\int_{-1}^1 \langle v_z \rangle dx = 0, \quad \int_{-1}^1 \langle w_z \rangle dx = 0 \quad (1.5)$$

Угловыми скобками обозначено осреднение по оси y .

Здесь $\mathbf{v}$, T , p – осредненные скорость, температура и давление; $\mathbf{w}$ – амплитуда пульсационной компоненты скорости, $\mathbf{n} = \boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх. Задача (1.1)–(1.5) записана в безразмерной форме, в качестве единиц измерения времени, расстояния, осредненной и пульсационной компонент скорости, температуры и давления выбраны h^2/ν , h , χ/h , $\omega \beta A h$, $A h$, $\rho \nu \chi / h^2$ соответственно (ρ – плотность жидкости, считаемая постоянной). Система уравнений (1.1)–(1.2) содержит три безразмерных параметра: Ra – число Рэлея, R_v – вибрационное число Рэлея, Pr – число Прандтля.

2. Плоскопараллельное течение. В данных условиях возможно возникновение плоскопараллельного течения со следующим распределением температуры, осредненной и пульсационной компонент скорости:

$$T_0 = \mathbf{r} \mathbf{m} + \tau_0(x), \quad \mathbf{v}_0 = (0, 0, v_0(x)), \quad \mathbf{w}_0(x) = (0, 0, w_0(x) \cos \alpha) \quad (2.1)$$

$$4s^4 = Q > 0$$

$$v_0 = \frac{\varepsilon}{2s^2 \Lambda} \left(\frac{\text{sh } sx \cos sx}{\text{sh } s \cos s} - \frac{\text{ch } sx \sin sx}{\text{ch } s \sin s} \right) \quad (2.2)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{\Lambda \cos \alpha} \left(\frac{\text{ch } sx \sin sx}{\text{sh } s \cos s} + \frac{\text{sh } sx \cos sx}{\text{ch } s \sin s} - \Lambda x \right)$$

$$\Lambda = \text{th} s \text{ctg} s + \text{cth} s \text{tg} s$$

$$-q^4 = Q < 0$$

$$v_0 = -\frac{\varepsilon}{2q^2} \left(\frac{\text{sh } qx}{\text{sh } q} - \frac{\sin qx}{\sin q} \right), \quad \tau_0 = \frac{1}{2 \cos \alpha} \left(\frac{\text{sh } qx}{\text{sh } q} + \frac{\sin qx}{\sin q} - 2x \right) \quad (2.3)$$

$$Q = 0$$

$$v_0 = -\frac{\varepsilon}{6} (x^3 - x), \quad \tau_0 = -\frac{\varepsilon \sin \alpha}{360} (3x^5 - 10x^3 + 7x) \quad (2.4)$$

$$\varepsilon = \text{Ra} + \text{R}_v \cos \alpha \sin \alpha, \quad Q = \text{R}_{ve} - \text{R}_e, \quad \text{R}_{ve} = \text{R}_v \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha, \quad \text{R}_e = -\text{Ra} \cos \alpha \sin \alpha$$

Здесь R_e и R_{ve} – эффективные гравитационное и вибрационное числа Рэлея. Положительные значения R_e соответствуют горячей верхней стенке слоя, отрицательные – холодной (ниже, имея в виду продольную к слою компоненту градиента температуры, будем говорить о первой ситуации как о подогреве снизу, а о второй как о нагреве сверху). Форма плоскопараллельного течения определяется продольными по отношению к слою проекциями характерных векторов (вертикального вектора γ , оси вибраций $\mathbf{n}$ и градиента температуры $\mathbf{m}$). Действительно, составляя число Рэлея по проекции ускорения свободного падения $-g\cos\alpha$ и градиента температуры $Asin\alpha$ на ось z , получим R_e . Аналогично, заменяя a на $a\cos\alpha$ и A на $Asin\alpha$ в вибрационном числе Рэлея, получим R_{ve} . Сходная ситуация имеет место и в том случае, когда направление всех трех векторов произвольно.

Положительным значениям q соответствует нагрев сверху или достаточно интенсивные вибрации при подогреве снизу. Отрицательным Q отвечает подогрев снизу при относительно слабых вибрациях. Очевидно, что $Q = 0$ в одном из трех случаев: $\alpha = 0$, 180° , $\alpha = 90^\circ$ и $\varepsilon = 0$. В первом из них имеем течение в вертикальном слое для случая вертикальных вибраций и подогрева сбоку. Во втором получим адвективное течение в горизонтальном слое с продольным градиентом температуры и поперечной осью вибрации.

При обращении в нуль параметра ε осредненное плоскопараллельное течение отсутствует и возникает так называемое квазиравновесное состояние: пульсационное движение покоящейся в среднем жидкости. Температура T_0 и амплитуда пульсационного поля скорости w_0 являются линейными функциями поперечной координаты. Условие, при котором существует квазиравновесное состояние, получено в [3] для произвольно направленных векторов γ , $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$. В рассматриваемом в данной работе случае ($\gamma \parallel \mathbf{n}$, $\gamma \perp \mathbf{m}$) это условие принимает вид

$$Ra + R_{ve}\cos\alpha\sin\alpha = 0 \quad (2.5)$$

т.е. квазиравновесному состоянию отвечает $R_e = R_{ve}$.

Профили скорости и добавки к температуре для различных значений параметра Q приведены на фиг. 2, а и б. Как видно, подъемно-опускное течение (2.2) усиливается по мере увеличения Q , сдвигаясь при этом к границам слоя. При достаточно интенсивных вибрациях течение имеет погранслоистый характер (линия 3 на фиг. 2).

При подогреве снизу по мере приближения параметра q к значению π , интенсивность течения неограниченно возрастает. Это связано с тем, что при $q = \pi$ в слое возникают длинноволновые возмущения, имеющие такую же симметрию, как и основное течение (2.1). Аналогичные явления характерны для течений в вертикальных или наклонных слоях (каналах) при наличии продольной компоненты градиента температуры [5, 10]. В отсутствие вибраций неограниченный рост скорости можно объяснить развитием в наклонном слое неустойчивости такого же типа, что приводит к возникновению конвекции в вертикальном слое при подогреве снизу. Пороговое значение числа Рэлея для плоской длинноволновой моды неустойчивости равно π^4 [1]. В задаче о наклонном слое R_e играет роль "продольного" числа Рэлея, что дает условие $R_e = \pi^4$.

Сходные с (2.2)–(2.4) профили скорости и температуры получены в [5] для течения в наклонном слое жидкости при продольном градиенте температуры. В данном случае также можно подавить осредненное течение при определенных условиях.

3. Линейная задача устойчивости. Для исследования устойчивости течения (2.1)–(2.4) внесем малые возмущения температуры, давления, осредненной и пульсационной компонент скорости. Рассматривая поведение крупномасштабных возмущений (проведенные численные исследования показали, что трехмерные ячейчатые

возмущения не являются наиболее опасными), представим производные по продольным координатам и возмущенные поля в виде рядов по формальному малому параметру μ :

$$\frac{\partial}{\partial y} = \mu \frac{\partial}{\partial \eta} + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \mu \frac{\partial}{\partial \zeta} + \dots \quad (3.1)$$

$$v = v_0 + \mu(v_x^{(1)}, v_y^{(1)}, v^{(1)}) + \dots, \quad w = w_0 + \mu(w_x^{(1)}, w_y^{(1)}, w^{(1)}) + \dots$$

$$T = T_0 + \mu \vartheta^{(1)} + \dots, \quad p = p_0 + C + \mu p^{(1)} + \dots$$

Индексы z в разложении осредненной и пульсационной z -компонент скорости опущены; p_0 – давление, соответствующее основному течению (2.1)–(2.4).

Второе слагаемое в разложении p соответствует "быстрому" изменению давления в плоскости слоя (продольные градиенты давления имеют нулевой порядок малости). Этот член обращается в нуль для спиральных возмущений. Подставляя разложения (3.1) в уравнения и граничные условия (1.1)–(1.5), получим в первом порядке малости:

$$v_x^{(1)} = w_x^{(1)} = 0, \quad C = \text{const}_1(x), \quad w_y = \text{const}_2(x)$$

$$v_y'' = \frac{\partial C}{\partial \eta}, \quad v'' + \text{Ra} \cos \alpha \vartheta + \text{R}_v \cos \alpha \sin \alpha w = \frac{\partial C}{\partial \zeta} \quad (3.2)$$

$$\vartheta'' - \sin \alpha v = 0, \quad w' = \vartheta' \cos \alpha, \quad \frac{\partial w_y}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \eta} (w - \vartheta \cos \alpha) \quad (3.3)$$

$$x = \pm 1: \quad v = v_y = \vartheta = 0 \quad (3.4)$$

Верхние индексы для всех переменных опущены, штрихом обозначается производная по координате x .

Кроме того, на осредненную и пульсационную компоненты скорости необходимо наложить условия замкнутости, которые можно получить, интегрируя уравнения непрерывности (вторые уравнения в (1.2) и (1.3)) с нулевыми граничными условиями на u_x и w_x :

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \int_{-1}^1 v \, dx + \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-1}^1 v_y \, dx = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_{-1}^1 w \, dx + \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-1}^1 w_y \, dx = 0 \quad (3.5)$$

Нетрудно убедиться, что задача (3.2)–(3.5) является замкнутой. Действительно, система уравнений имеет седьмой порядок и содержит дополнительно две неизвестные постоянные (медленные функции продольных координат): давление и y -компоненту пульсационной скорости. Для определения девяти констант имеются шесть граничных условий (3.4), два условия замкнутости (3.5) и последнее уравнение (3.3), определяющее w_y . Подчеркнем, что задача (3.2)–(3.5) не содержит числа Прандтля.

Ввиду того, что x -компонента скорости мала по сравнению с y - и z -компонентами, движение жидкости в основном происходит в плоскости слоя. В дальнейшем v_z и w_z будут называться продольными составляющими, а v_y и w_y – поперечными (по отношению к основному течению).

Будем искать решение задачи (3.2)–(3.5) в виде плоских волн, предполагая все неизвестные функции пропорциональными $\exp(ik_y \eta + ik_z \zeta)$. Вводя вместо двух компонент волнового вектора его длину k и угол наклона δ к оси y (так что $k = k(0, \cos \delta, \sin \delta)$), нетрудно убедиться, что в задачу входит лишь последний параметр.

Предельные случаи $\delta = 0$ и $\delta = 90^\circ$ соответствуют спиральным и плоским возмущениям, рассмотренным в [8].

4. Четные уровни неустойчивости. Ввиду симметрии задачи возможны два класса длинноволновых решений (3.2)–(3.5), обладающих различной четностью собственных функций. Можно показать, что решения для нечетных возмущений не зависят от параметра δ и не являются наиболее опасными. Более интересная ситуация наблюдается для четных длинноволновых возмущений. В этом случае решения (3.2)–(3.5) имеют вид

$$v = B \left(\frac{\operatorname{ch} qx}{\operatorname{ch} q} - \frac{\cos qx}{\cos q} \right), \quad \vartheta = \frac{B \sin \alpha}{q^2} \left(\frac{\operatorname{ch} qx}{\operatorname{ch} q} + \frac{\cos qx}{\cos q} - 2 \right) \quad (4.1)$$

$$w = \vartheta \cos \alpha + f, \quad w_y = \operatorname{ctg} \delta f, \quad v_y = \frac{1}{2} C \cos \beta (x^2 - 1) \quad (4.2)$$

Поперечная компонента скорости генерируется поперечным градиентом давления и имеет пуазейлевский вид.

Подставляя (4.1)–(4.2) во второе уравнение (3.2) и условия замкнутости (3.5), получим характеристическое уравнение для определения критического числа Рэлея

$$3q^2 \operatorname{tg}^2 \delta (\operatorname{th} q - \operatorname{tg} q) + \sin^2 \delta R_{ve} (\operatorname{th} q + \operatorname{tg} q - 2q) + 2q(R_{ve} - R_e) = 0 \quad (4.3)$$

Для спиральных и плоских возмущений задача существенно упрощается: $v_y = w_y = f = 0$ (для спиральной моды неустойчивости отсутствует также продольный градиент давления C). Как показано в [8], наиболее опасны в этом случае спиральные возмущения, для которых

$$R_e = (\pi/2)^4 + R_{ve} = R_0 (\delta = 0) \quad (4.4)$$

Вибрационное воздействие приводит к стабилизации течения. Плоские и спиральные длинноволновые возмущения возникают только для течения (2.3).

Учет следующих порядков в разложении (3.1) при $\delta = 0$ показывает, что поправка R_2 к числу Рэлея, определяемому из (4.4), положительна при произвольных R_1 , R_v и углах наклона слоя α в диапазоне от 90° до 180° . Таким образом, длинноволновые спиральные возмущения реализуют минимум на нейтральной кривой $R_a(k_y)$.

Из уравнения (4.3) при произвольных значениях δ следует, что при малых R_{ve} наиболее опасной длинноволновой модой является спиральная. Однако нетрудно показать, что при $R_{ve} > 3\pi^2/4$ критическими становятся возмущения с волновым вектором, направленным под углом к оси y .

Нейтральные кривые $R_c(\delta)$ для разных эффективных вибрационных чисел Рэлея представлены на фиг. 3. Для удобства сопоставления результатов значения R_c отнесены к числу Рэлея спиральной длинноволновой моды R_0 (4.4). Как видно из фиг. 3, по мере увеличения интенсивности вибраций критический угол наклона волнового вектора δ заметно возрастает. Становится более ощутимой разница в пороговых значениях R_c для спиральной и пространственной мод неустойчивости.

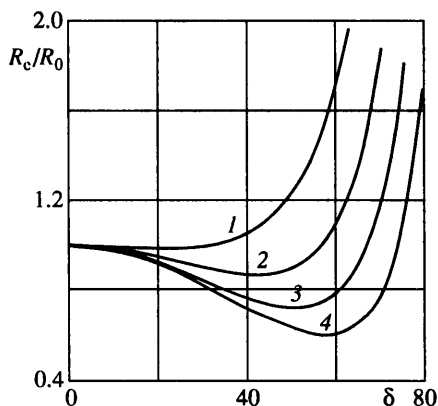
Интересно, что при $R_{ve} > 30$ появляется интервал углов δ , в котором критическое значение R_c меньше, чем R_{ve} , т.е. неустойчивым по отношению к длинноволновым возмущениям становится течение (2.2). В этом случае собственные функции задачи имеют вид

$$v = B \left(\frac{\operatorname{ch} sx \cos sx}{\operatorname{ch} s \cos s} - \frac{\operatorname{sh} sx \sin sx}{\operatorname{sh} s \sin s} \right) \quad (4.5)$$

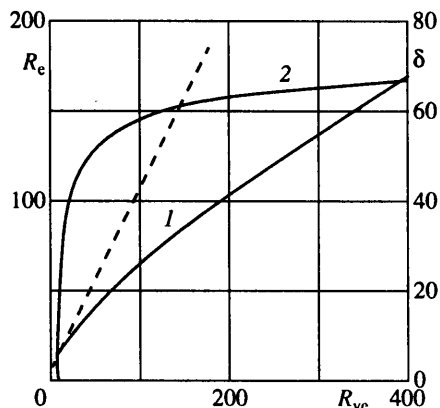
$$\vartheta = \frac{B \sin \alpha}{2s^2} \left(\frac{\operatorname{ch} sx \cos sx - \operatorname{ch} s \cos s}{\operatorname{sh} s \sin s} + \frac{\operatorname{sh} sx \sin sx - \operatorname{sh} s \sin s}{\operatorname{ch} s \cos s} \right) \quad (4.6)$$

и (4.2) для v_y и пульсационных составляющих скорости. Характеристическое уравнение (4.3) меняется следующим образом:

$$6s^2 \operatorname{tg}^2 \delta \frac{\operatorname{sh} 2s - \sin 2s}{\operatorname{ch} 2s + \cos 2s} + \sin^2 \delta R_{ve} \left(\frac{\operatorname{sh} 2s + \sin 2s}{\operatorname{ch} 2s + \cos 2s} - 2s \right) = -2s(R_{ve} - R_e) \quad (4.7)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Нейтральные кривые $R_c(\delta)$ для $R_{vc} = 10, 25, 50, 100$ (линии 1–4)

Фиг. 4. Эффективное число Рэлея R_e (1) и угол наклона волнового вектора δ наиболее опасных возмущений (2) в зависимости от R_{vc}

Отдельного рассмотрения заслуживает предел $R_{vc} = R_e$, соответствующий состоянию квазиравновесия. Поля возмущений для этого случая имеют вид полиномов, а критическое эффективное число Рэлея выражается следующей формулой:

$$R_e = R_{vc} = \frac{30}{\sin^2 2\delta} \quad (4.8)$$

$$v = \frac{B}{2}(x^2 - 1), \quad v_y = -\frac{B \operatorname{tg} \alpha}{2}(x^2 - 1), \quad \vartheta = \frac{B \sin \alpha}{24}(x^4 - 6x^2 + 5) \quad (4.9)$$

$$w = \vartheta \cos \alpha - \frac{B \sin \alpha \cos \alpha}{R_{vc} \cos^2 \delta}, \quad w_y = -\frac{B \sin \alpha \cos \alpha}{R_{vc} \sin \delta \cos \delta} \quad (4.10)$$

Эффективное число Рэлея для наиболее опасных возмущений в зависимости от R_{vc} показано на фиг. 4. Для сравнения штриховой линией изображена аналогичная кривая для спиральных возмущений (4.4). С ростом интенсивности вибраций разница между этими кривыми заметно увеличивается: в пределе больших R_{vc} эффективное число Рэлея для пространственной моды растет как $R_{vc}^{3/4}/\sqrt{2}$, а для спиральной – линейно.

Изменение угла наклона δ волнового вектора критических возмущений по мере усиления вибрационного воздействия представлено на фиг. 4. С ростом эффективного вибрационного числа Рэлея δ значительно возрастает, приближаясь к 90° . В пределе больших R_{vc} справедлив закон

$$\sin \delta = 1 - 4^{1/2} R_{vc}^{-3/8}$$

Для сравнения с экспериментом минимизация по волновому вектору не является необходимой: в эксперименте параметр δ определяется размерами слоя и условиями на торцах слоя, т.е. фиксирован.

Трехмерные длинноволновые возмущения впервые были обнаружены в [11, 12]. Однако в указанных работах основное квазиравновесное состояние являлось двумерным в плоскости слоя (двумерное пульсационное течение или непараллельные проекции градиента температуры и вектора оси вибраций на плоскость слоя). Кроме того, существенно различаются и собственные функции наиболее опасных возмущений. В [11, 12] возмущения продольных компонент осредненной и пульсационной скорости

пропорциональны друг другу, что означает неустойчивость квазиравновесия относительно возникновения плоскопараллельного осредненного течения. В рассматриваемой задаче профили продольных и поперечных компонент скорости различны.

Возникновение плоских и спиральных длинноволновых возмущений может быть объяснено следующим образом: нагретый элемент жидкости всплывает, попадая при этом в еще более холодную жидкость (подогрев снизу). В этом элементе генерируются более интенсивные пульсации температуры, являющиеся основной причиной возникновения осредненной силы инерции. Нетрудно заметить, что архимедова и инерционная силы имеют противоположные проекции на ось z . Таким образом, пульсационное воздействие замедляет движение жидкого элемента, чем и объясняется стабилизирующее влияние вибраций. Появление трехмерных возмущений приводит к снижению интенсивности продольного вибрационного течения, т.е. к уменьшению силы инерции. Как следствие, трехмерные возмущения стабилизируются слабее по сравнению со спиральными при увеличении R_{vc} .

Интересно, что представленные результаты справедливы и для более общей задачи, когда векторы γ , $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ не связаны друг с другом, а направлены произвольным образом в нормальной к слою плоскости:

$$\gamma = (-\sin \alpha, 0, \cos \alpha), \quad \mathbf{n} = (-\sin \varphi, 0, \cos \varphi), \quad \mathbf{m} = (-\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

Здесь φ, θ – углы наклона оси вибраций и градиента температуры на границах к оси z (угол α имеет прежний смысл). Все результаты, относящиеся к трехмерной длинноволновой моде, остаются в силе, меняются лишь определения эффективного гравитационного и вибрационного числа Рэлея:

$$R_e = -Ra \cos \alpha \cos \theta, \quad R_{ve} = R_v \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \quad (4.11)$$

Как следует из (4.11), для длинноволновой моды неустойчивости (как и для плоскопараллельного течения) важны лишь продольные составляющие силы тяжести $-g \cos \alpha$, амплитуды вибраций $a \cos \varphi$ и градиента температуры $A \cos \theta$.

В общем случае (см. [3]) $R_e = R_{ve}$ не является условием гидростатики. Более сложно выглядит и основное течение (2.1)–(2.4).

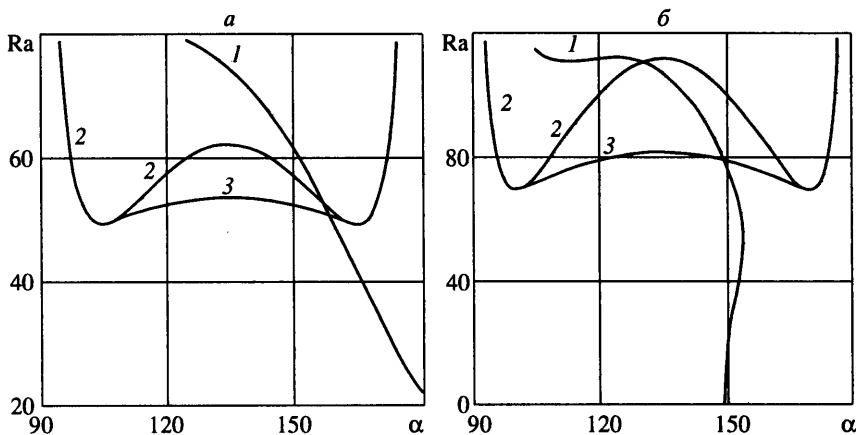
5. Сводные диаграммы устойчивости. Зная зависимость $R_e(R_{ve})$, легко найти критическое число Рэлея длинноволновой моды в зависимости от угла наклона слоя при заданном R_v . Конкуренция длинноволновых и ячеистых мод неустойчивости в диапазоне углов наклона 90° – 180° (подогрев снизу) показана на фиг. 5, а и б. Линии 1 и 2 построены по результатам работы [8]; области неустойчивости расположены выше соответствующих кривых.

Как видно, с увеличением угла наклона α от 90° до 180° наиболее опасны сначала спиральные длинноволновые, затем пространственные длинноволновые и, наконец, плоские ячеистые возмущения. С ростом вибрационного параметра растет область неустойчивости по отношению к плоским возмущениям, что прежде всего связано с потерей устойчивости виброконвективным течением в невесомости (точка пересечения кривой 2 и оси R_a на фиг. 5, б).

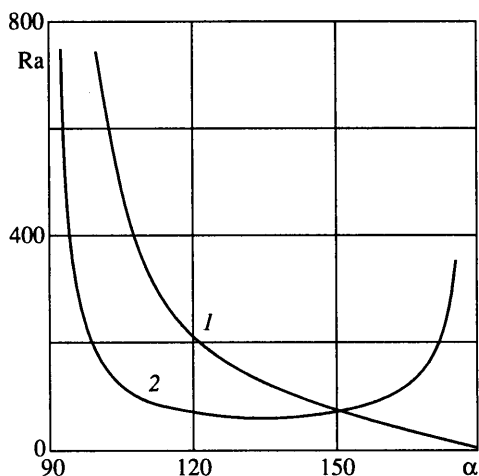
Как видно, вибрации стабилизируют течение по отношению к длинноволновым возмущениям; с увеличением их интенсивности увеличивается диапазон углов наклона α , в котором наиболее опасна пространственная мода неустойчивости. Основную роль трехмерные возмущения играют при $\alpha \approx 135^\circ$, когда эффективное вибрационное число Рэлея максимально при фиксированном R_v .

Еще большее влияние трехмерные возмущения оказывают на устойчивость квазиравновесия (фиг. 6). Нетрудно убедиться из (4.8), что критическое число Рэлея длинноволновой моды для квазиравновесия имеет вид $R_a = -30/(\sin \alpha \cos \alpha)$.

Плоские ячеистые возмущения, обнаруженные в [3], наиболее опасны лишь в диапазоне углов наклона от 150° до 180° , в остальной области существования квазиравновесия неустойчивость вызывается крупномасштабными пространственными возмущениями вида (4.9)–(4.10).



Фиг. 5. Зависимость критического числа Грасгофа от угла наклона слоя: $Pr = 0,1$; $R_v = 100$ (а), 200 (б). Линии 1–3 соответствуют плоской гидродинамической, спиральной длинноволновой и трехмерной длинноволновой модам неустойчивости



Фиг. 6. Карта устойчивости квазиравновесия на плоскости $Ra - \alpha$: 1 – плоские возмущения; 2 – трехмерные длинноволновые

Закключение. Изучается конвекция в наклонном слое жидкости, подверженном вертикальным высокочастотным вибрациям. На границах слоя поддерживается горизонтальный градиент температуры. Получено решение уравнений термовибрационной конвекции в виде плоскопараллельного течения и в длинноволновом приближении аналитически изучена его устойчивость. Расчеты, проведенные в трехмерном случае, показали, что ячейчатые пространственные возмущения менее опасны.

Обнаружена область параметров, в которой неустойчивость течения вызывается длинноволновой пространственной модой. Возмущения имеют вид расположенных в плоскости слоя прямоугольных ячеек, продольные размеры которых значительно превосходят толщину слоя. При этом критическое число Рэлея данной моды зависит от соотношения сторон этих ячеек. Поле возмущений скорости (как осредненное, так и пульсационное) является двумерным: существенны лишь компоненты, направленные в плоскости слоя. Полученные в длинноволновом пределе результаты, могут

быть использованы и в более общем случае: при произвольном направлении оси вибраций и градиента температуры. Результаты длинноволнового анализа не зависят от числа Прандтля.

Вибрации оказывают как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние на устойчивость конвективного течения в наклонном слое. Эффекты дестабилизации в основном связаны с плоскими возмущениями и наиболее ярко выражены при не слишком больших (до 30°) отклонениях слоя от вертикали. В целом картина кризиса имеет достаточно сложный вид, что обусловлено разнообразием механизмов неустойчивости.

Работа выполнена при частичном финансировании в рамках программы поддержки ведущих научных школ (грнат № 00-01-96112).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Gershuni G.Z., Lyubimov D.V. Thermal vibrational convection. N.Y. etc.: Wiley, 1998. 358 p.
3. Demin V.A., Gershuni G.Z., Verkholanisev I.V. Mechanical quasi-equilibrium and thermovibrational convective instability in an inclined fluid layer // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1996. V. 39. № 9. P. 1979–1991.
4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Плоскопараллельные адвективные течения в вибрационном поле // Инж.-физ. журн. 1989. Т. 56. № 2. С. 238–242.
5. Бирих Р.В. О вибрационной конвекции в плоском слое с продольным градиентом температуры // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 4. С. 12–15.
6. Бирих Р.В., Катанова Т.Н. О стабилизации адвективного течения поперечными вибрациями // Вибрационные эффекты в гидродинамике. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1998. С. 25–37.
7. Шарифулин А.Н. Устойчивость конвективного движения в вертикальном слое при наличии продольных вибраций // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 2. С. 186–188.
8. Демин В.А., Шкляев С.В. Об устойчивости виброконвективного течения в наклонном слое при подогреве сбоку // Вибрационные эффекты в гидродинамике. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2000. Вып. 2.
9. Зеньковская С.М., Симоненко И.Б. О влиянии вибраций высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 5. С. 51–55.
10. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
11. Браверман Л.М. К вопросу о вибрационно-конвективной неустойчивости плоского слоя жидкости в невесомости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 178–180.
12. Браверман Л.М. О некоторых типах вибрационно-конвективной неустойчивости плоского слоя жидкости в невесомости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 4–7.

Пермь

Поступила в редакцию
22.XI.2000