

УДК 532.591

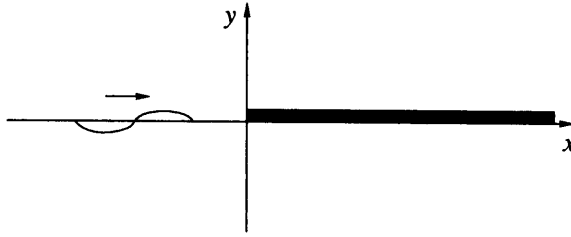
© 2001 г. Л.А. ТКАЧЕВА

## ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА ПЛАВАЮЩЕЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

Изучается дифракция плоских поверхностных волн плавающей полубесконечной пластиной. Построено аналитическое решение этой задачи методом Винера – Хопфа. Получены аналитические формулы для коэффициентов отражения и прохождения и их коротковолновая и длинноволновая асимптотики, а также явное представление для потенциала скоростей жидкости. Исследовано распределение по пластине смещений, деформаций и давления в зависимости от безразмерного параметра – приведенной жесткости пластины и их асимптотическое распределение для случаев больших и малых длин волн.

Поведение плавающей упругой пластины на волнах ранее интенсивно изучалось в связи с исследованием изгибно-гравитационных волн в жидкости с ледовым покровом (обзоры [1, 2]). В настоящее время эта задача привлекает интерес исследователей в связи с проектированием искусственных островов и плавающих аэропортов, а также платформ различного назначения. Существует множество разработанных численных методов решения таких задач. Однако все эти методы дают достоверные результаты только в области больших и умеренных длин волн и становятся некорректными при малых длинах набегающих волн. Аналитическое решение методом Винера – Хопфа было построено в [3] для косога набегающего в жидкости конечной глубины, в [4] для стратифицированной жидкости, в [5] для прямого набегающего в бесконечно глубокой жидкости, в [6] для косога набегающего с уравнением Тимошенко – Миндлина для изгибных колебаний пластины. Численные расчеты проведены только в [6], и то в диапазоне частот  $10^{-1}$ – $10$  рад/с. Это связано, по-видимому, со сложностью полученных формул. Во всех этих работах полученное решение зависит от неизвестных коэффициентов, для определения которых нужно решить систему линейных алгебраических уравнений. Коэффициенты этой системы имеют сложный вид. В данной работе удалось обратить эту систему и найти точные значения искомым коэффициентов, а также простые точные формулы для коэффициентов прохождения и отражения для случая нормально набегающих волн в бесконечно глубокой жидкости. Детально исследовано в широком диапазоне входных параметров задачи поведение пластины и жидкости.

**1. Постановка задачи.** Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает пространство  $y < 0$  (фиг. 1). Поверхность жидкости частично закрыта тонкой упругой пластиной, занимающей полуплоскость  $x > 0$ . Остальная часть поверхности жидкости свободна. Плоская прогрессивная волна набегающая под прямым углом к пластине. Будем предполагать, что амплитуды колебаний малы, длина волны значительно больше, чем толщина пластины. Осадкой платформы в воду будем пренебрегать, граничные условия сносятся на невозмущенную поверхность воды.



Фиг. 1. Схема течения в декартовой системе координат  $x, y$

Потенциал скоростей жидкости  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям в виде

$$\Delta\varphi = 0 \quad (y < 0) \quad (1.1)$$

$$\varphi_y = \eta_t \quad (y = 0) \quad (1.2)$$

$$D\Delta^2\eta + \rho_0 h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = p \quad (y = 0, x > 0) \quad (1.3)$$

$$p = -\rho(\varphi_t + g\eta) \quad (1.4)$$

$$\varphi_t + g\eta = 0 \quad (y = 0, x < 0) \quad (1.5)$$

Здесь  $\eta$  – вертикальное смещение верхней поверхности жидкости (пластины),  $p$  – давление,  $g$  – ускорение свободного падения,  $D$  – цилиндрическая жесткость пластины,  $h$  – ее толщина,  $\rho_0$  – плотность пластины,  $t$  – время. На краю пластины должны обращаться в ноль момент и перерезывающая сила

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (x = 0, y = 0) \quad (1.6)$$

Введем безразмерные переменные

$$\varphi' = \frac{\varphi}{A\sqrt{gl}}, \quad x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad t' = t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

где  $A$  – амплитуда падающей волны,  $2\pi l$  – длина падающей волны. Штрихи в дальнейшем будем опускать. Зависимость всех функций от времени выражается в безразмерном виде множителем  $e^{-it}$ . Представим потенциал  $\varphi$  в виде

$$\varphi = (\varphi_0 + \varphi_1)e^{-it}, \quad \varphi_0 = e^{ix+y}$$

где  $\varphi_0$  – потенциал падающей волны,  $\varphi_1$  – дифрагированный потенциал. Тогда из уравнений (1.1)–(1.6) получим краевую задачу для  $\varphi_1$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0 \quad (y < 0)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \varphi_1 = 0 \quad (y = 0, x < 0) \quad (1.7)$$

$$\left( \beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1 - \gamma \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \varphi_1 = B e^{ix} \quad (y = 0, x > 0)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (x = 0, y = 0) \quad (1.8)$$

$$\beta = D/\rho g l^4, \quad \gamma = \rho_0 h / \rho l, \quad B = \gamma - \beta$$

Здесь  $\beta$  и  $\gamma$  – безразмерные параметры задачи: приведенные жесткость и погонная масса пластины. Кроме этого должны выполняться условия излучения при  $|x| \rightarrow \infty$ , условия затухания при  $y \rightarrow -\infty$  и условия регулярности вблизи передней кромки (локальная ограниченность энергии). Ввиду сделанных предположений параметр  $\gamma \ll 1$ , поэтому в дальнейшем положим  $\gamma$  равным нулю.

**2. Аналитическое решение задачи.** Решение задачи будем строить методом Винера – Хопфа в интерпретации Джонса [7]. Для выполнения условия излучения воспользуемся принципом предельного поглощения [8]. Вместо уравнения Лапласа будем рассматривать уравнение

$$\Delta\varphi + i\delta\varphi = 0 \quad (2.1)$$

при  $\delta \rightarrow 0$ . Потенциал набегающей волны тогда имеет вид

$$\varphi_0 = \exp(ikx + y) \quad (k = \sqrt{1 + i\delta})$$

Функция  $\varphi_1$  удовлетворяет уравнению (2.1), граничному условию (1.7) при  $x < 0$ , а при  $x > 0$

$$\left( \beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1 \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \varphi_1 = B e^{ikx} \quad (B = -\beta k^4) \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1) является уравнением с поглощением. Решение задачи будем искать в классе функций, удовлетворяющих условию

$$|\varphi_1| + |\nabla \varphi_1| + \left| \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right| + \dots + \left| \frac{\partial^5 \varphi_1}{\partial x^4 \partial y} \right| \leq C e^{-d(\delta)|x|} \quad (|x| \gg 1) \quad (2.3)$$

где  $d(\delta) > 0$  и  $C > 0$  – некоторые константы.

Введем в рассмотрение функции комплексного переменного

$$\Phi_+(\alpha, y) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} \varphi_1(x, y) dx, \quad \Phi_-(\alpha, y) = \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} \varphi_1(x, y) dx \quad (2.4)$$

$$\Phi(\alpha, y) = \Phi_+(\alpha, y) + \Phi_-(\alpha, y)$$

Функция  $\Phi(\alpha, y)$  представляет собой образ Фурье для функции  $\varphi_1(x, y)$  и удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - (\alpha^2 - i\delta)\Phi = 0$$

Общее решение этого уравнения

$$\Phi(\alpha, y) = C(\alpha) \exp(y\sqrt{\alpha^2 - i\delta}) \quad (2.5)$$

Из теории интегралов Фурье следует, что ввиду оценки (2.3) функции  $\Phi_+(\alpha, y)$  и  $\Phi_-(\alpha, y)$  регулярны [7] соответственно в полуплоскостях  $\Pi_+ = \{\alpha : \text{Im}\alpha > -d(\delta)\}$ ,  $\Pi_- = \{\alpha : \text{Im}\alpha < d(\delta)\}$ . На комплексной плоскости  $\alpha$  проведем разрезы от точки  $\sqrt{\delta} e^{i\pi/4}$  вертикально вверх и от точки  $-\sqrt{\delta} e^{i\pi/4}$  вертикально вниз. Будем рассматривать тот лист римановой поверхности, на котором  $\text{Re}(\sqrt{\alpha^2 - i\delta}) > 0$ , чтобы обеспечить затухание потенциала при  $y \rightarrow -\infty$ .

Обозначим  $D_\pm(\alpha)$  выражения типа (2.4), где вместо функции  $\varphi_1$  под интегралом стоит левая часть краевого условия (1.7), а через  $F_\pm(\alpha)$  – аналогичные выражения, в которых в качестве подынтегральной функции берется левая часть (2.2). Эти интег-

ралы будем понимать как преобразование Фурье обобщенных функций [9]. Для них выполнены соотношения

$$D_+(\alpha) + D_-(\alpha) = C(\alpha)(\sqrt{\alpha^2 - i\delta} - 1)$$

$$F_+(\alpha) + F_-(\alpha) = C(\alpha)[(\beta\alpha^4 + 1)\sqrt{\alpha^2 - i\delta} - 1]$$

Из краевых условий (1.7) и (2.2) имеем

$$D_-(\alpha) = 0, \quad F_+(\alpha) = -\frac{B}{i(\alpha + k)}$$

С учетом этого

$$D_+(\alpha) = C(\alpha)(\sqrt{\alpha^2 - i\delta} - 1) \tag{2.6}$$

$$F_-(\alpha) - \frac{B}{i(\alpha + k)} = C(\alpha)[(\beta\alpha^4 + 1)\sqrt{\alpha^2 - i\delta} - 1]$$

Из последних двух уравнений получаем

$$D_+(\alpha) = K(\alpha) \left( F_-(\alpha) - \frac{B}{i(\alpha + k)} \right), \quad K(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - i\delta} - 1}{(\beta\alpha^4 + 1)\sqrt{\alpha^2 - i\delta} - 1} \tag{2.7}$$

В соответствии с методом Винера – Хопфа необходимо факторизовать функцию  $K(\alpha)$ , т.е. представить ее в виде

$$K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha) \tag{2.8}$$

где функции  $K_{\pm}(\alpha)$  регулярны соответственно в полуплоскостях  $\Pi_{\pm}$ . Факторизацию проведем так же, как в [5]. Представим  $K(\alpha)$  в виде

$$K(\alpha) = \frac{K_1(\alpha)}{K_2(\alpha)}, \quad K_1(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - i\delta}(\sqrt{\alpha^2 - i\delta} - 1)$$

$$K_2(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - i\delta}[(\beta\alpha^4 + 1)\sqrt{\alpha^2 - i\delta} - 1]$$

Исследуем корни функций  $K_1(\alpha)$  и  $K_2(\alpha)$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Так как  $\sqrt{\alpha^2 - i\delta} \rightarrow |\alpha|$  при  $\delta \rightarrow 0$ , то все корни парные. Если некоторое число  $\alpha$  является корнем, то  $-\alpha$  также является корнем. Каждая из функций  $K_1(\alpha)$  и  $K_2(\alpha)$  имеет корни  $\pm\sqrt{\delta}e^{i\pi/4}$ , которые лежат на разрезах римановой поверхности и в дальнейшем рассматриваться не будут. Кроме этого функция  $K_1(\alpha)$  имеет два корня  $\pm k$ , которые при  $\delta \rightarrow 0$  близки к  $\pm 1$ , причем корень  $k$  лежит в верхней полуплоскости, соответственно  $-k$  – в нижней полуплоскости.

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$\beta\alpha^5 + \alpha - 1 = 0 \tag{2.9}$$

которое соответствует  $K_2(\alpha) = 0$  при  $\delta = 0$  и  $\alpha > 0$ . Уравнение (2.9) имеет один действительный корень  $\alpha_{0+} > 0$  и две пары комплексно-сопряженных корней  $\alpha_{1+}$ ,  $\bar{\alpha}_{1+}$ ,  $\alpha_{2+}$ ,  $\bar{\alpha}_{2+}$ . Функция  $K_2(\alpha)$  имеет на рассматриваемом листе римановой поверхности корни  $\pm\alpha_0$ ,  $\pm\alpha_1$ ,  $\pm\alpha_2$ , которые при  $\delta \rightarrow 0$  сходятся соответственно к корням уравнения (2.9)

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_{0+}, \quad \alpha_1 \rightarrow \alpha_{1+}, \quad \alpha_2 \rightarrow -\bar{\alpha}_{1+}$$

Причем  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  лежат в верхней полуплоскости. Корни  $K_2(\alpha)$ , соответствующие  $\alpha_{2+}$ ,  $\bar{\alpha}_{2+}$ , лежат на другом листе римановой поверхности и нами рассматриваться не будут.

Введем функции

$$g(\alpha) = \frac{g_1(\alpha)}{g_2(\alpha)}, \quad g_1(\alpha) = \frac{K_1(\alpha)}{\alpha^2 - k^2}, \quad g_2(\alpha) = \frac{K_2(\alpha)}{(\alpha^2 - \alpha_0^2)(\alpha^2 - \alpha_1^2)(\alpha^2 - \alpha_2^2)}$$

Функции  $g_i(\alpha)$ ,  $i = 1, 2$ , не имеют на рассматриваемом листе римановой поверхности нулей, ограничены и стремятся на бесконечности к единице. На действительной оси  $g(x)$  – четная функция. При  $\delta \rightarrow 0$  имеем

$$g(x) = \frac{x + \alpha_0}{x + 1} \left| \frac{x + \alpha_1}{x - \alpha_{2+}} \right|^2 \quad (x \geq 0)$$

Факторизуем  $g(\alpha)$  следующим образом [7]:

$$g(\alpha) = g_+(\alpha)g_-(\alpha)$$

$$g_{\pm}(\alpha) = \exp \left[ \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln g(x)}{x - \alpha} dx \right] \quad (2.10)$$

На действительной оси по теореме Сохоцкого имеем

$$g_{\pm}(\alpha) = \sqrt{g(\alpha)} \exp \left[ \pm \frac{1}{2\pi i} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln g(x)}{x - \alpha} dx \right] \quad (2.11)$$

Функции  $K_{\pm}(\alpha)$  определим соответственно выражением

$$K_{\pm}(\alpha) = \frac{(\alpha \pm k)g_{\pm}(\alpha)}{\sqrt{\beta}(\alpha \pm \alpha_0)(\alpha \pm \alpha_1)(\alpha \pm \alpha_2)} \quad (2.12)$$

Уравнения (2.7) с учетом (2.8) запишем в виде

$$K_-(\alpha) \left( F_-(\alpha) - \frac{B}{i(\alpha + k)} \right) = \frac{D_+(\alpha)}{K_+(\alpha)}$$

$$K_-(\alpha)F_-(\alpha) - \frac{B}{i(\alpha + k)}(K_-(\alpha) - K_-(-k)) = \frac{D_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{BK_-(-k)}{i(\alpha + k)}$$

Слева имеем функцию, аналитическую в полуплоскости  $\Pi_-$ , а справа – аналитическую в  $\Pi_+$ . Аналитическим продолжением ее можно определить во всей комплексной плоскости, и по теореме Лиувилля эта функция является полиномом. Степень полинома определим из поведения функций при  $|\alpha| \rightarrow \infty$ . Из условия локальной ограниченности энергии следует, что вблизи кромки пластины скорости имеют особенность не выше, чем  $O(r^{-\lambda})$ , где  $\lambda < 1$ ,  $r$  – расстояние до кромки пластины. Тогда  $F_-(\alpha)$  имеет при  $|\alpha| \rightarrow \infty$  порядок [9] не выше, чем  $O(|\alpha|^{\lambda+3})$ , а  $D_+(\alpha)$  – не выше, чем  $O(|\alpha|^{\lambda-1})$ . Функции  $K_{\pm}(\alpha)$  имеют на бесконечности порядок  $O(|\alpha|^{-2})$ , так как  $g_{\pm}(\alpha) \rightarrow 1$  при  $|\alpha| \rightarrow \infty$ . Следовательно, степень полинома равна единице. Получаем

$$\frac{D_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{BK_-(-k)}{i(\alpha + k)} = (a + b\alpha) \frac{BK_-(-k)}{i}$$

где  $a$  и  $b$  – неизвестные константы, которые будем определять из условий (1.8). Выражая отсюда  $D_+(\alpha)$ , с учетом (2.5) и (2.6) находим

$$\varphi_1(x, y) = \frac{BK_-(-k)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\alpha x + y\sqrt{\alpha^2 - i\delta}) \frac{K_+(\alpha)}{K_1(\alpha)} \left( a + b\alpha - \frac{1}{\alpha + k} \right) d\alpha \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, 0) = \frac{BK_-(-k)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \frac{K_+(\alpha)\sqrt{\alpha^2 - i\delta}}{K_1(\alpha)} \left( a + b\alpha - \frac{1}{\alpha + k} \right) d\alpha \quad (2.14)$$

Рассмотрим случай  $x > 0$ . С учетом (2.8) последнее выражение перепишем в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0) = e^{ix} + \frac{BK_-( -k)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x} \sqrt{\alpha^2 - i\delta}}{K_-(\alpha)K_2(\alpha)} \left( a + b\alpha - \frac{1}{\alpha + k} \right) d\alpha$$

Первый член в правой части – набегающая волна. При  $x > 0$  подынтегральная функция аналитична в нижней полуплоскости с разрезом, за исключением полюсов в точках  $-k, -\alpha_0, -\alpha_1, -\alpha_2$ . Вычет в точке  $-k$  компенсируется набегающей волной. При  $\delta \rightarrow 0$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, 0) = & -BK_-( -k) \sum_{j=0}^2 \frac{e^{i\alpha_j x} \alpha_j}{K_-( -\alpha_j)(5\beta\alpha_j^4 + 1)} \left( a - b\alpha_j - \frac{1}{k - \alpha_j} \right) - \\ & - \frac{BK_-( -k)}{2\pi i} \int_{-i\infty}^0 \frac{e^{-i\alpha x}}{K_-(\alpha)} \left( a + b\alpha - \frac{1}{k + \alpha} \right) \left[ \frac{\sqrt{\alpha^2 - i\delta}}{K_2(\alpha)} \right] d\alpha \end{aligned} \quad (2.15)$$

где в последнем интеграле выражение в квадратных скобках означает скачок этой функции на разрезе. Подставляя полученное выражение в условия (1.8), получим систему линейных алгебраических уравнений второго порядка для определения неизвестных  $a$  и  $b$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$A_{11} = \sum_{j=0}^2 A_j + \frac{i}{\pi} I_3, \quad A_{12} = -A_{21}, \quad A_{21} = \sum_{j=0}^2 \alpha_j A_j - \frac{1}{\pi} I_4$$

$$A_{22} = -\sum_{j=0}^2 \alpha_j^2 A_j - \frac{i}{\pi} I_5, \quad C_1 = \sum_{j=0}^2 \frac{A_j}{1 - \alpha_j} + \frac{i}{\pi} J_3, \quad C_2 = \sum_{j=0}^2 \frac{\alpha_j A_j}{1 - \alpha_j} - \frac{1}{\pi} J_4$$

$$A_j = \frac{\alpha_j^3}{K_-( -\alpha_j)(5\beta\alpha_j^4 + 1)}, \quad I_k = \int_0^{\infty} \frac{\sigma^k d\sigma}{K_-( -i\sigma)[\sigma^2(\beta\sigma^4 + 1)^2 + 1]}$$

$$J_k = \int_0^{\infty} \frac{\sigma^k d\sigma}{K_-( -i\sigma)[\sigma^2(\beta\sigma^4 + 1)^2 + 1]}$$

Систему (2.16) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} U_3 - U_4 & -U_4 + U_5 \\ U_4 - U_5 & -U_5 + U_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$U_m = \sum_{j=0}^2 \frac{\alpha_j^m}{(1 + \alpha_j)K_-( -\alpha_j)(5\beta\alpha_j^4 + 1)} - \frac{i^m}{\pi} J_m$$

Покажем, что коэффициенты  $U_5$  и  $U_6$  равны нулю, и тогда полученную систему можно точно обратить. Так как  $\alpha_j$  при  $\delta \rightarrow 0$  являются корнями уравнения (2.9), то  $U_5$  и  $U_6$  можно представить в виде

$$U_m = \frac{(-1)^m}{2\pi i\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \sqrt{\alpha^2 - i\delta})\alpha^{m-5} d\alpha}{(1 + \alpha)K_-(\alpha)K_2(\alpha)} \quad (m = 5, 6)$$

Домножая числитель и знаменатель на  $K_+(\alpha)$ , с учетом (2.8) получим

$$U_m = \frac{(-1)^{m-1}}{2\pi i\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^{m-5} K_+(\alpha) d\alpha}{(1 + \alpha)} \quad (m = 5, 6)$$

Подынтегральная функция регулярна в верхней полуплоскости и убывает при  $|\alpha| \rightarrow \infty$  не медленнее, чем  $\alpha^{-2}$ . Следовательно,  $U_5 = U_6 = 0$ . Из системы (2.17) находим, что  $a = 1$ ,  $b = -1$ . Выражение (2.13) для потенциала  $\varphi_1$  тогда перепишем в виде

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, 0) &= -\frac{BK_-(-k)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \frac{K_+(\alpha)\alpha^2 d\alpha}{(1+\alpha)K_1(\alpha)} = \\ &= -\frac{BK_-(-k)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \frac{\alpha^2 d\alpha}{K_-(\alpha)(1+\alpha)K_2(\alpha)}\end{aligned}\quad (2.18)$$

Найдем отраженную и прошедшую волну. Потенциал при  $|x| \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\varphi_1(x, 0) = Re^{-ix} \quad (x \rightarrow -\infty), \quad \varphi_1(x, 0) = Te^{i\alpha_0 x} \quad (x \rightarrow \infty)$$

Для  $R$  и  $T$  получаем следующие выражения:

$$R = \beta K_-(-k)K_+(k)/2$$

$$T = 2\beta K_-(-k)\sqrt{\beta} \frac{\alpha_0^3(\alpha_0 + \alpha_1)(\alpha_0 + \alpha_2)}{(1 - \alpha_0^2)g_-(\alpha_0)(5\beta\alpha_0^4 + 1)}$$

Используя (2.11)–(2.12), получим

$$|R| = \frac{1}{(1 + \alpha_0)|1 + \alpha_2|^2|1 - \alpha_{2+}|^2}$$

$$|T| = \frac{2\beta\alpha_0^{5/2}|\alpha_0 + \alpha_2||\alpha_0 - \alpha_{2+}|}{(1 - \alpha_0^2)(5\beta\alpha_0^4 + 1)|(1 + \alpha_2)(1 - \alpha_{2+})|}$$

$$|1 - \alpha_2|^2|1 - \alpha_{2+}|^2 = |(1 - \alpha_1)(1 - \bar{\alpha}_1)(1 - \alpha_{2+})(1 - \bar{\alpha}_{2+})| = \frac{P_5(1)}{\beta(1 - \alpha_0)}$$

где  $P_5(\alpha)$  – полином, соответствующий левой части уравнения (2.9). Для  $|R|$  получаем простую формулу

$$|R| = \frac{1 - \alpha_0}{1 + \alpha_0}\quad (2.19)$$

Упростим выражение для  $|T|$

$$\begin{aligned}|\alpha_0 + \alpha_2||\alpha_0 - \alpha_{2+}| &= \sqrt{(\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \bar{\alpha}_1)(\alpha_0 - \alpha_{2+})(\alpha_0 - \bar{\alpha}_{2+})} = \\ &= \sqrt{\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{P_5(\alpha) - P_5(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}} = \sqrt{5\beta\alpha_0^4 + 1}\end{aligned}$$

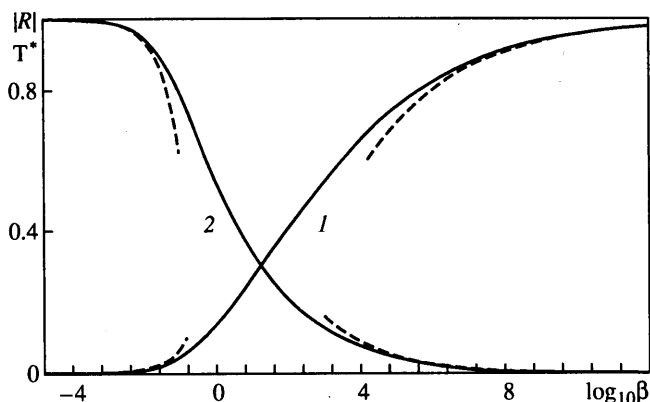
$$|T| = \frac{2}{(1 + \alpha_0)\sqrt{5\beta\alpha_0^4 + 1}} = \frac{2}{1 + \alpha_0} \sqrt{\frac{\alpha_0}{5 - 4\alpha_0}}\quad (2.20)$$

В [10] получено точное соотношение между амплитудами  $|R|$  и  $|T|$  для случая конечной глубины жидкости. Аналогичным образом его можно вывести и для бесконечно глубокой жидкости

$$|R|^2 + |T|^2(5 - 4\alpha_0) = 1$$

Полученные выражения (2.19)–(2.20) для амплитуд удовлетворяют ему.

**3. Коэффициенты отражения и прохождения.** Перемещения пластины далеко от края можем вычислить, взяв вычет в точке  $-\alpha_0$  в выражении (2.14), и с учетом (1.2).



Фиг. 2. Коэффициенты отражения  $|R|$  (кривая 1) и прохождения  $T^*$  (кривая 2) в зависимости от  $\beta = D/\rho g l^4$ , где  $D$  – цилиндрическая жесткость пластины,  $\rho$  – плотность воды,  $2\pi l$  – длина набегающей волны (штриховые линии соответствуют асимптотическим значениям)

Переходя к размерным переменным, получим

$$\eta(x) = i\alpha_0 A T e^{i\alpha_0 x}, \quad |\eta| = A\alpha_0 |T|$$

Введем коэффициенты отражения и прохождения как отношение амплитуды возвышения в отраженной и проходящей волне к амплитуде возвышения набегающей волны. Тогда амплитуда  $|R|$  будет представлять собой коэффициент отражения ввиду сделанной нормировки, а коэффициент прохождения будет равен

$$T^* = |\eta| / A = \alpha_0 |T|$$

Найдем асимптотику коэффициентов отражения и прохождения при больших и малых значениях  $\beta$ . При  $\beta \rightarrow 0$   $\alpha_0 = 1 - \beta + O(\beta^2)$ , поэтому

$$|R| = \beta/2 + O(\beta^2), \quad |T| = 1 - 2\beta + O(\beta^2)$$

При  $\beta \rightarrow \infty$  введем малое число  $\varepsilon = \beta^{-1/2}$ . Тогда  $\alpha_0 = \varepsilon + O(\varepsilon^2)$ . Получаем

$$|R| = 1 - 2\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad |T| = 2\sqrt{\varepsilon/5} + O(\varepsilon^{3/2})$$

Зависимость коэффициентов отражения и прохождения от безразмерного параметра  $\beta$ , характеризующего жесткость пластины, показана на фиг. 2. При малых значениях  $\beta$  пластина ведет себя, как тонкая пленка, и практически не препятствует распространению волны. Коэффициент отражения мал, коэффициент прохождения близок к единице. При больших значениях  $\beta$  пластина очень жесткая, коэффициент отражения стремится к единице, а коэффициент прохождения к нулю. Из графика видно, что при  $\beta \rightarrow 0$  асимптотика применима при  $\beta < 0,03$ , а при  $\beta \rightarrow \infty$  асимптотическими значениями можно пользоваться при  $\beta > 10^6$ .

**4. Прогиб и деформации пластины, возвышение свободной границы.** Обозначим  $\eta_+(x)$  вертикальное смещение пластины. Используя (1.2), из (2.15) получим

$$\eta_+(x) = \beta K_-(-1) \left\{ i \sum_{j=0}^2 e^{i\alpha_j x} \frac{\alpha_j^3}{(1 - \alpha_j) K_-(-\alpha_j) (5\beta\alpha_j^4 + 1)} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sigma^3 d\sigma}{(1 - i\sigma) K_-(-i\sigma) [\sigma^2(\beta\sigma^4 + 1)^2 + 1]} \right\} \quad (4.1)$$



Из формулы (4.1) следует, что вертикальные перемещения пластины складываются из незатухающей волны с волновым числом  $\alpha_0$  и краевых эффектов, которые затухают вдали от края. Наименьшую скорость затухания по  $x$  имеет интегральный член – степенную, пропорциональную  $x^{-4}$ . Два других члена затухают экспоненциально.

Длина волны в пластине  $\lambda$  в безразмерных переменных определяется формулой  $\lambda = 2\pi/\alpha_0$ . При  $\beta \leq 1$   $\alpha_0 \approx 1$  и длина волны в пластине такая же, как у набегающей волны. С ростом  $\beta$  значение  $\alpha_0$  уменьшается, соответственно увеличивается длина волны в пластине. При  $\beta \rightarrow \infty$ , что соответствует коротким набегающим волнам,  $\alpha_0 \rightarrow 0$ . В размерных переменных длина волны в пластине равна  $2\pi l/\alpha_0$ . Введем характерную длину [11]  $L = (D/\rho g)^{1/4}$ . Так как  $\alpha_0 \sim \beta^{-1/5}$  при  $\beta \rightarrow \infty$ , то длина волны в пластине имеет порядок  $O(L(l/L)^{1/5})$ . Таким образом, при  $\beta \rightarrow \infty$  длина волны в пластине стремится к нулю.

Для возвышения свободной границы  $\eta_-(x)$ , используя представление (2.18), находим

$$\eta_-(x) = ie^{ix} - \frac{BK_-(-1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \frac{\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - i\delta} K_+(\alpha) d\alpha}{(k + \alpha)(\sqrt{\alpha^2 - i\delta} - 1)}$$

Подынтегральная функция аналитична в верхней полуплоскости с разрезом, за исключением полюса при  $\alpha = k$ . Так как  $K_-(-\alpha) = K_+(\alpha)$  при  $\delta \rightarrow 0$  имеем

$$\eta_-(x) = ie^{ix} + \frac{i\beta K_+^2(1)}{2} e^{-ix} - \frac{\sqrt{\beta} K_+(1)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{\alpha x} \frac{\sigma^3 g_+(i\sigma) d\sigma}{(1 + \sigma^2)(i\sigma + \alpha_0)(i\sigma + \alpha_1)(i\sigma + \alpha_2)} \quad (4.2)$$

Первый член представляет собой падающую волну, второй член – отраженную волну, а интеграл – рассеянное поле от взаимодействия с пластиной. Интегральный член затухает при больших  $x$  также пропорционально  $x^{-4}$ .

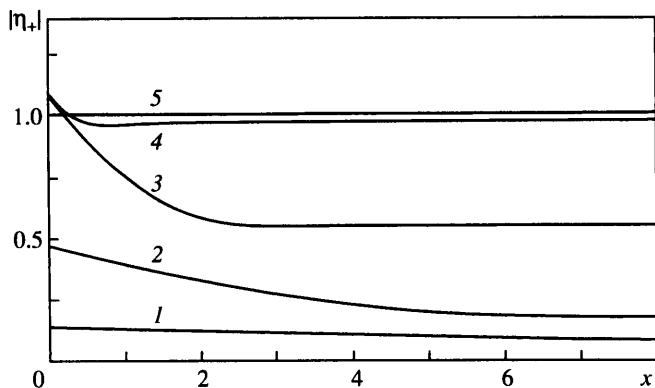
Проведено численное исследование распределения смещений пластины и возвышения свободной границы в зависимости от параметра  $\beta$  (фиг. 3). При всех значениях  $\beta$  максимальные смещения пластины наблюдаются вблизи кромки. Расчеты показали, что при всех значениях параметра  $\beta$  краевые эффекты затухают достаточно быстро, на расстоянии 1,5 длины проходящей волны поправка не превышает 0,1%.

Смещения пластины и свободной границы вблизи кромки различны (фиг. 4). При малых значениях  $\beta$  пластина ведет себя, как тонкая пленка, и практически не препятствует распространению волны, амплитуды колебаний пластины близки к единице. С увеличением значения  $\beta$  амплитуда колебаний кромки пластины растет и достигает максимума при  $\beta \approx 0,158$ , затем монотонно убывает и стремится к нулю при  $\beta \rightarrow \infty$ .

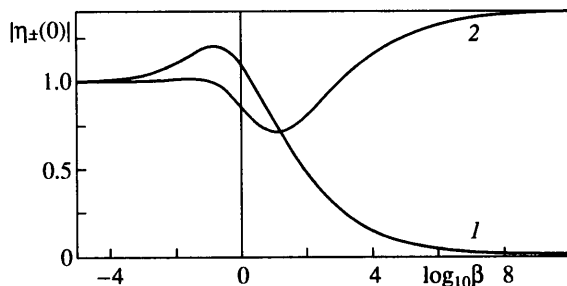
Амплитуда колебаний жидкости вблизи кромки практически равна единице при  $\beta < 0,1$ . С ростом значения  $\beta$  она начинает падать и достигает минимума при  $\beta \approx 10$ , затем монотонно увеличивается в достигает асимптотического значения приблизительно 1,4, которое соответствует абсолютно жесткой пластине. Сравнение графиков показывает, что при малых значениях  $\beta$  амплитуда колебаний пластины вблизи кромки больше, чем жидкости. При больших значениях  $\beta$  пластина почти не колеблется, а амплитуда колебаний жидкости максимальна. С ростом  $\beta$  амплитуда разности уровней монотонно увеличивается (фиг. 5). Если толщина пластины меньше, чем амплитуда разности уровней, то край пластины будет периодически выходить из воды и затем хлопать по ней. Тогда надо учитывать эффект удара и применять другую модель для описания явления.

Деформации пластины и амплитуда деформаций в проходящей волне вычисляются по формулам

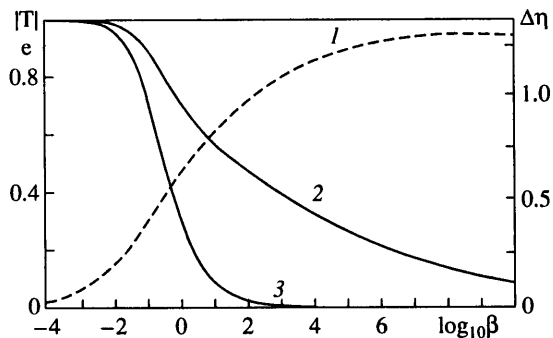
$$e_{xx} = \frac{hd^2 \eta_+}{2\partial x^2}, \quad |e_{xx}| = \frac{Ah}{2l^2} e, \quad e = \alpha_0^3 |T|$$



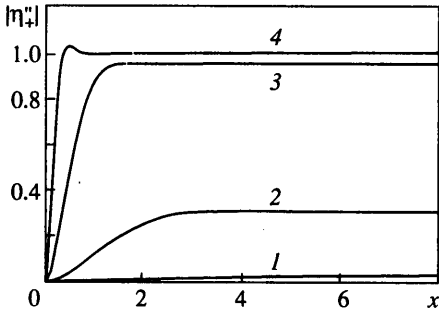
Фиг. 3. Распределение амплитуды смещений  $|\eta_{\pm}|$  и пластины по  $x$  при  $\beta = 10^4, 10^2, 1, 10^{-2}, 10^{-4}$  (кривые 1–5)



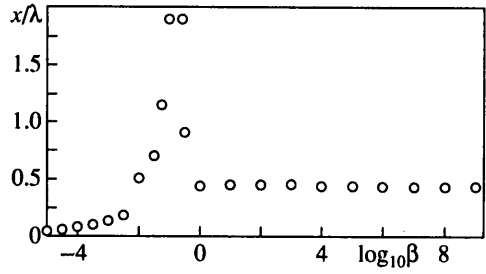
Фиг. 4. Зависимость амплитуд колебаний пластины  $|\eta_{+}(0)|$  (1) и жидкости  $|\eta_{-}(0)|$  вблизи кромки от  $\beta$



Фиг. 5. Зависимости амплитуды разностей уровней  $\Delta\eta$  пластины и жидкости вблизи края (кривая 1), амплитуды потенциала  $|T|$  (кривая 2) и деформаций пластины  $e = \alpha_0^3 |T|$  (кривая 3) в проходящей волне в зависимости от  $\beta$  ( $\alpha_0$  – волновое число в проходящей волне)



Фиг. 6



Фиг. 7

Фиг. 6. Распределение амплитуды деформаций  $|\eta''|$  по  $x$  при  $\beta = 10^2, 1, 10^{-3}, 10^{-4}$  (кривые 1-4)

Фиг. 7. Положение точек максимальных деформаций в зависимости от  $\beta$

При  $\beta \rightarrow 0$   $\alpha_0 \rightarrow 1$ , длина и амплитуда волны не меняются при распространении в пластину (фиг. 5). При больших значениях  $\beta$  платформа практически не деформируется. Из графика видно, что перемещения платформы далеко от края практически равны нулю при  $\beta > 10^3$ , а деформации – при  $\beta > 10^7$ .

Распределение деформаций вдоль пластины характеризуется функцией  $\eta''(x)$  (фиг. 6). На кромке деформации равны нулю в силу краевого условия, на некотором расстоянии от кромки амплитуда деформаций достигает максимума и затем уменьшается до соответствующего значения в проходящей волне. С ростом  $\beta$  деформации в пластине уменьшаются. Точки максимальных деформаций являются точками максимальных напряжений, именно в них наиболее вероятны поломки и трещины. Эти зоны расположены достаточно близко к краю пластины (фиг. 7).

**5. Давление на пластине.** Гидродинамическое давление на пластине вычислим с помощью уравнений (1.2) и (1.4):  $p = \text{Arg}i(\varphi - \varphi_y)$ . Подставляя в эту формулу представление (2.13) для потенциала, найдем выражение для давления на пластине в безразмерных переменных

$$p(x, 0) = -\frac{BK_-(-k)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \frac{\alpha^2(1 - \sqrt{\alpha^2 - i\delta})d\alpha}{(\alpha + k)K_-(\alpha)[\sqrt{\alpha^2 - i\delta}(\beta\alpha^4 + 1) - 1]} \quad (5.1)$$

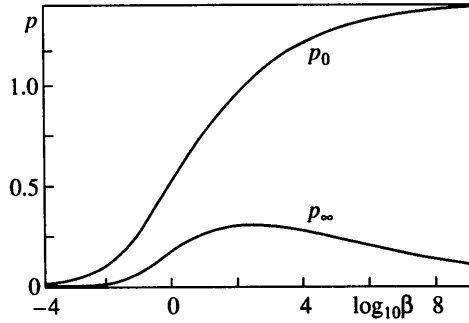
Подынтегральная функция аналитична в нижней полуплоскости с разрезом, за исключением полюсов в точках  $-\alpha_0, -\alpha_1, -\alpha_2$ . При  $\delta \rightarrow 0$  согласно с выбором ветви имеем

$$\sqrt{\alpha_0^2 - i\delta} \rightarrow \alpha_0, \quad \sqrt{\alpha_1^2 - i\delta} \rightarrow \alpha_1, \quad \sqrt{\alpha_2^2 - i\delta} \rightarrow -\alpha_2$$

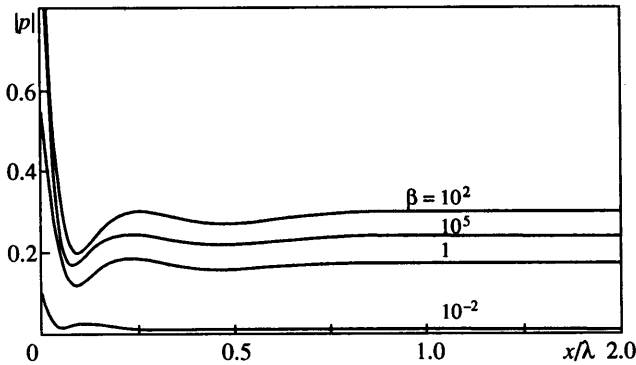
Поэтому из (5.1) получаем

$$p(x) = i\beta K_-(-1) \left\{ \sum_{j=0}^1 e^{i\alpha_j x} \frac{\alpha_j^2(\alpha_j + \alpha_0)(\alpha_j + \alpha_1)(\alpha_j + \alpha_2)}{(1 + \alpha_j)g_-(-\alpha_j)(5\beta\alpha_j^4 + 1)} - \frac{e^{-i\alpha_2 x} 2\alpha_2^3(\alpha_2 + \alpha_0)(\alpha_2 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_2)g_-(-\alpha_2)(5\beta\alpha_2^4 + 1)} - \frac{\beta}{i\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sigma x} \sigma^7(i\sigma + \alpha_0)(i\sigma + \alpha_1)(i\sigma + \alpha_2)d\sigma}{(1 + \sigma^2)g_-(-i\sigma)[\sigma^2(\beta\sigma^4 + 1)^2 + 1]} \right\} \quad (5.2)$$

Первый член суммы представляет собой давление в проходящей волне, а остальные члены представляют собой влияние кромки и затухают вдали от нее. Максимальная амплитуда давления наблюдается на кромке (фиг. 8, 9). При  $\beta \rightarrow 0$  давление стремится к нулю. С ростом  $\beta$  амплитуда давления в кромке монотонно растет до некоторого конечного значения, соответствующего жесткой пластине, а амплитуда



Фиг. 8. Зависимость амплитуды давления  $p_0$  в кромке и на бесконечности  $p_\infty$  от  $\beta$



Фиг. 9. Распределение по  $x$  амплитуды давления  $|p|$  при  $\beta = 10^{-2}, 1, 10^5, 10^2$  (кривые 1-4)

давления в проходящей волне имеет максимум и стремится к нулю при  $\beta \rightarrow \infty$ . Хотя все члены формулы (5.2) с ростом  $x$  монотонно затухают по абсолютной величине, несовпадение фаз приводит к немонотонности амплитуды давления по  $x$  (фиг. 9).

Рассмотрим асимптотическое поведение давления при  $\beta \rightarrow \infty$ . Случай  $\beta = \infty$  соответствует абсолютно жесткой платформе. В этом случае вместо граничного условия (1.8) на поверхности платформы имеем условие непротекания

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (y = 0, x > 0)$$

Похожая задача, а именно установившиеся волны при наличии полубесконечной жесткой пластины, рассматривалась в [12, 13]. Аналогичным образом или с помощью метода Винера – Хопфа можно получить и решение дифракции поверхностных волн на жесткой пластине. Давление на жесткой пластине определяется формулой

$$p_s(x) = \frac{\sqrt{2}e^{-i\pi/8}}{\pi} \int_0^\infty e^{-\tau x} \frac{\Lambda(\tau) d\tau}{\tau(1+\tau^2)} \quad (x > 0)$$

$$\Lambda(\tau) = \sqrt{\tau}(1+\tau^2)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_0^\tau \frac{\ln \sigma}{1+\sigma^2} d\sigma\right)$$

Из этих формул следует, что давление на жесткой пластине монотонно убывает при увеличении расстояния от кромки. По лемме Ватсона [14] получаем, что при

$x \rightarrow \infty$   $p_s(x) = O(x^{-1/2})$ , т.е. давление на жесткой пластине убывает обратно пропорционально  $\sqrt{x}$ .

Оценим теперь давление на упругой пластине. Найдем прежде всего представления для значений функции  $g_-(\alpha)$ , входящих в формулу (5.2). Из (2.10) ввиду четности функции  $g(x)$  при вещественных  $x$  имеем

$$g_-(-i\sigma) = \exp \left[ \frac{\sigma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln g(x)}{x^2 + \sigma^2} dx \right]$$

Рассмотрим вспомогательную функцию  $F(\tau)$  и найдем ее производную

$$F(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(x + \tau)}{x^2 + 1} dx, \quad F'(\tau) = \frac{\pi\tau/2 - \ln \tau}{1 + \tau^2}$$

Так как  $F(0) = 0$ , то, интегрируя, находим

$$F(\tau) = \frac{\pi}{4} \ln(1 + \tau^2) - J(\tau), \quad J(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau} \frac{\ln x}{1 + x^2} dx \quad (5.3)$$

Функция  $J(\tau)$  обладает свойством  $J(\tau) = J(1/\tau)$ .

При  $\tau \rightarrow 0$   $J(\tau) = O(\tau \ln \tau)$ . Теперь для  $g_-(-i\sigma)$  получаем выражение

$$g_-(-i\sigma) = \left( \frac{\sigma^2 + \alpha_0^2}{\sigma^2 + 1} \right)^{1/4} \left| \frac{\sigma^2 + \alpha_1^2}{\sigma^2 + \alpha_{2+}^2} \right|^{1/2} \times \\ \times \exp \left[ J(\sigma) - J\left(\frac{\sigma}{\alpha_0}\right) - 2 \operatorname{Re} \left\{ J\left(\frac{\alpha_1}{\sigma}\right) - J\left(-\frac{\alpha_{2+}}{\sigma}\right) \right\} \right]$$

При  $\sigma \rightarrow 0$   $g_-(-i\sigma) \rightarrow \sqrt{\alpha_0} |\alpha_1| / |\alpha_{2+}|$ .

Аналогичным образом из (2.11) получаем представление для  $g_-(-\alpha_0)$

$$g_-(-\alpha_0) = \sqrt{\frac{2\alpha_0}{1 + \alpha_0}} \left| \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_0 - \alpha_{2+}} \right| \exp \left[ \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\ln g(x/\alpha_0)}{x^2 - 1} dx \right]$$

Рассмотрим вспомогательную функцию  $F_1(\tau)$  и ее производные

$$F_1(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(x + \tau)}{x^2 - 1} dx$$

$$F_1'(\tau) = \frac{\ln \tau}{1 - \tau^2}, \quad F_1(0) = \frac{\pi^2}{4}$$

Отсюда

$$F_1(\tau) = \frac{\pi^2}{4} + \int_0^{\tau} \frac{\ln \tau}{1 - \tau^2} d\tau$$

И для  $g_-(-\alpha_0)$  получаем выражение

$$g_-(-\alpha_0) = \sqrt{\frac{2\alpha_0}{1 + \alpha_0}} \left| \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_0 - \alpha_{2+}} \right| \exp \left[ \frac{1}{\pi i} \left( \int_{\alpha_0}^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx + 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\alpha_{2+}/\alpha_0}^{\alpha_1/\alpha_0} \frac{\ln x}{1 - x^2} dx \right\} \right) \right]$$

При  $\beta \rightarrow \infty$  введем малое число  $\varepsilon = \beta^{-1/5}$ . Тогда

$$\alpha_0 = \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \alpha_1 = \varepsilon e^{i2\pi/5} + O(\varepsilon^2), \quad \alpha_{2+} = \varepsilon e^{i4\pi/5} + O(\varepsilon^2)$$

Поэтому  $g_-(-\alpha_0) = O(\sqrt{\varepsilon})$ .

Оценим порядок членов в формуле (5.2) при больших значениях  $x$  и  $\beta \rightarrow \infty$ . Первый член имеет порядок  $O(\sqrt{\epsilon})$ , два других экспоненциально малы, а интегральный член – порядка  $O(\beta^2 x^{-8} \epsilon^{5/2})$ . Первый и последний члены будут одного порядка, если  $x = O(\beta^{1/5})$ , т.е. на расстояниях порядка длины волны в пластине. Следовательно, на расстояниях порядка длины волны в пластине давление на упругой пластине имеет порядок  $O(\beta^{-1/10})$  при  $\beta \rightarrow \infty$  и такой же порядок давления для жесткой пластины. При  $x \gg \beta^{1/5}$  имеем разный порядок давления для упругой и жесткой пластин. Таким образом, при  $\beta \rightarrow \infty$  получаем неравномерную асимптотику для давления на пластине.

**Заключение.** Построено точное решение задачи дифракции поверхностных волн на плавающей упругой полубесконечной пластине в жидкости бесконечной глубины при нормальном падении волны. Получены простые аналитические формулы для коэффициентов отражения и прохождения, а также их длинноволновая и коротковолновая асимптотики. Очень длинные волны проходят в пластину, почти не отражаясь и не меняя своей длины. Очень короткие волны практически полностью отражаются, и пластина почти не деформируется. Наибольшие прогибы и деформации пластины наблюдаются при длинных набегающих волнах. Максимальные амплитуды колебаний пластины и жидкости, а также давления сосредоточены в кромке. Краевые эффекты практически затухают на расстояниях 1,5 длины проходящей волны. Зоны максимальных напряжений пластины, где возможны разрушения, находятся на небольшом расстоянии от кромки.

Полученное точное решение может использоваться в качестве теста для оценки погрешности существующих численных и асимптотических методов.

Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта № 1 СО РАН.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Squire V.A., Dugan J.P., Wadhams P. et al.* Of ocean waves and sea ice // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1995. V. 27. P. 115–168.
2. *Марченко А.* Изгибно-гравитационные волны // *Динамика волн на поверхности жидкости.* Тр. ИОФАН. 1999. Т. 56. С. 65–111.
3. *Evans D.V., Davies T.V.* Wave-ice interaction. New Jersey: Davidson Lab., Stevens Inst. Technol., 1968. Rep. 1313. 103 p.
4. *Варламов В.В.* О рассеянии внутренних волн краем упругой пластины // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1985. Т. 25. № 3. С. 413–421.
5. *Гольдштейн Р.В., Марченко А.В.* Дифракция плоских гравитационных волн на кромке ледяного покрова // *ПММ.* 1989. Т. 53. № 6. С. 924–930.
6. *Balmforth N.J., Craster R.V.* Ocean waves and ice sheets // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 395. P. 89–124.
7. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
8. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
9. *Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
10. *Fox C., Squire V.A.* On the oblique reflexion and transmission of ocean waves at shore fast sea ice // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1994. V. 347. № 1682. P. 185–218.
11. *Suzuki H., Yoshida K.* Design flow and strategy for safety of very large floating structure // *Proc. Intern. Workshop on Very Large Floating Structures*, 1996. Hayama, Japan: Ship Res. Inst., 1996. P. 21–28.
12. *Friedrichs K.O., Lewy H.* The dock problem // *Comm. Pure Appl. Math.* 1948. V. 1. № 2. P. 135–148.
13. *Holford R.L.* Short surface waves in the presence of a finite dock. I // *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1964. V. 60. Pt 4. P. 957–983.
14. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.