

УДК 532.529:532.517.4

© 2001 г. В.М. АЛИПЧЕНКОВ, Л.И. ЗАЙЧИК

ЧАСТОТА СТОЛКНОВЕНИЙ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Представлена аналитическая модель для определения частоты столкновений частиц в турбулентном потоке с учетом эффектов сдвига скорости и силы тяжести. Выполнено тестирование модели путем сопоставления с результатами прямых численных расчетов в изотропной турбулентности, приосевой области плоского канала, потоке с однородным сдвигом и бинарной смеси частиц разной плотности.

Определение частоты столкновений (или времени между столкновениями) частиц в турбулентных потоках необходимо при анализе многих метеорологических и промышленных процессов, например при расчете скорости коагуляции аэрозолей и капель. Вследствие большого практического интереса к настоящему времени выполнено значительное количество теоретических исследований процессов столкновений и коагуляции частиц, обусловленных турбулентностью. Относительно простые решения этой задачи могут быть получены, по-видимому, только в приближении одно-родной изотропной турбулентности.

Наиболее известные решения найдены в предельных случаях малых (безынерционных) и больших (очень инерционных) частиц [1, 2]. Решение [1] справедливо для частиц, время динамической релаксации которых меньше микромасштаба турбулентности ($\tau_p < \tau_k$, τ_k – временной масштаб Колмогорова) и, следовательно, полностью вовлеченных в турбулентное движение несущего потока. В этом случае при определении частоты столкновений ω_{12} можно ограничиться рассмотрением взаимодействия частиц с мелкомасштабным турбулентным движением, ответственным за диссипацию энергии турбулентности. Решение [2] действительно для противоположного предела и относится к частицам, τ_p которых много больше временного макро-масштаба турбулентности ($\tau_p \gg T_L$, T_L – интегральный масштаб Лагранжа). Такие частицы движутся статистически независимо, т.е. их относительное движение некоррелировано и подобно хаотическому движению молекул в кинетической теории разреженных газов (гипотеза молекулярного хаоса). В этом случае достаточно рассмотреть взаимодействие частиц с энергосодержащими турбулентными вихрями, а вкладом взаимодействия с мелкомасштабной турбулентностью в частоту столкновений можно пренебречь.

Наибольшие трудности в определении частоты столкновений возникают при конечных ($\tau_k < \tau_p < T_L$) значениях отношений времени релаксации частиц к микро- и макромасштабам турбулентности, когда необходимо принимать во внимание взаимодействия частиц как с мелко-, так и с крупномасштабными вихрями и, кроме того, учитывать коррелированность движения частиц. По-видимому, первое решение, включающее эти особенности, получено в [3]; однако оно недостаточно корректно описывает взаимодействие частиц с мелкомасштабными вихрями и поэтому не обеспечивает предельный переход для безынерционных частиц к решению [1].

Взаимодействие частиц одновременно с мелкомасштабными и энергоемкими вихрями принимается во внимание в [4], но коэффициент корреляции скоростей двух

частиц определен неправильно и для частиц одинакового размера оказывается равным единице; вследствие этого вклад взаимодействия с энергоемкими вихрями в частоту столкновений одинаковых частиц равен нулю и предельный переход к решению [2] для крупных частиц не реализуется. Корректные для достаточно инерционных одинаковых частиц ($\tau_p \gg \tau_k$) выражения для коэффициента корреляции и времени между столкновениями получены в [5] на основе допущения о нормальном распределении скоростей несущего потока и дисперсной примеси. Путем решения уравнения диффузии, вытекающего из кинетического уравнения для плотности вероятности скоростей двух частиц, в [6] определена частота столкновений, учитывающая вклад взаимодействия частиц как с энергоемкими, так и с мелкомасштабными турбулентными вихрями. Однако предсказываемое этим решением стремление коэффициента корреляции с ростом инерционности частиц не к нулю, а к единице не обеспечивает предельного перехода к решению [2].

На основании нормальных распределений скоростей и их производных в [7] определено время между столкновениями, также учитывающее наряду с вовлечением частиц в крупномасштабное турбулентное движение их взаимодействие с мелкомасштабными пульсациями. Однако решение, полученное в [7] (так же, как в [4]), базируется на так называемой цилиндрической формулировке задачи, обычно используемой в кинетической теории газов для вычисления частоты столкновений молекул и связывающей ω_{12} со средним значением относительной скорости двух частиц. Для нахождения частоты столкновений малоинерционных частиц вследствие их вовлечения в мелкомасштабное турбулентное движение несущего потока, как показано в [8], более точной является сферическая формулировка задачи, выражающая ω_{12} через среднее значение радиальной компоненты относительной скорости частиц (для характеристик столкновений инерционных частиц, обусловленных их вовлечением в крупномасштабное турбулентное движение, обе формулировки приводят к одинаковым результатам).

Разница в результатах для мелких частиц обусловлена различием в продольной и поперечной корреляционных функциях и их пространственных масштабах для поля скоростей в двух точках, проявляющимся при определении продольных и поперечных компонент тензора диссипации турбулентной энергии [9]. Наконец, на основе раздельного рассмотрения взаимодействия частиц с мелкомасштабными и энергосодержащими вихрями в [10] выведены две зависимости, качественно правильно, хотя и не очень точно определяющие частоту столкновений соответственно для малоинерционных и крупных частиц. Таким образом, до настоящего времени единая аналитическая зависимость для частоты столкновений во всем диапазоне изменения их инерционности, обеспечивающей правильные переходы к предельным решениям [1] и [2], по-видимому, не получена.

Численные решения рассматриваемой задачи для относительно небольших частиц с конечным (ненулевым) временем релаксации на основе метода прямого моделирования (DNS) для однородной изотропной турбулентности представлены в [10, 11], а для течения в плоском канале – в [12] (течение в приосевой зоне канала может считаться приближенно изотропным). Скорость столкновений мелких частиц в однородном турбулентном поле с наложенным постоянным поперечным градиентом скорости вычислена в [3]. Хотя течение со сдвигом скорости не является изотропным, вследствие локальной изотропности мелкомасштабной структуры оно представляет интерес для теоретического анализа совместных эффектов турбулентности и сдвига скорости на частоту столкновений безынерционных частиц. Для моделирования столкновений крупных частиц ($\tau_p \gg \tau_k$) в турбулентных потоках, когда взаимодействие с мелкомасштабными вихрями не играет существенной роли, может использоваться менее трудоемкий и "дорогостоящий" по сравнению с DNS метод крупных вихрей (LES). Такие расчеты проведены в [5, 14], причем в [14] рассматривается бинарная смесь, когда существенную роль играет относительное осредненное движение (относительный дрейф) частиц разной плотности в поле силы тяжести.

В настоящей статье представлена аналитическая модель для определения частоты столкновений, индуцированных турбулентностью, во всем диапазоне изменения инерционности частиц. Анализ проводится для тяжелых частиц, плотность которых много больше плотности сплошной среды (газа). Кроме того, модели обобщаются на случаи, когда существенным становится вклад в столкновения осредненной составляющей скорости, обусловленной относительным движением частиц разной инерционности (например, в поле силы тяжести) или сдвигом скорости несущего потока. Поскольку здесь рассматриваются столкновения частиц, индуцированные только двумя механизмами: турбулентными пульсациями скоростей и осредненным относительным движением частиц, броуновское движение, гидродинамическое взаимодействие частиц, а также влияние сил притяжения или отталкивания не принимаются во внимание. Для тестирования представленной модели используются результаты численного моделирования [10–14].

1. Частота столкновений, индуцированная турбулентностью. В данном разделе определяется частота столкновений, обусловленных вовлечением частиц в турбулентное движение несущего потока, т.е. турбулентными пульсациями скоростей частиц. В рамках сферической формулировки задачи частота столкновений частицы сорта 1 с частицами сорта 2 определяется соотношением [8]

$$\omega_{12} = 2\pi\sigma^2 \langle |w_r| \rangle N_2 = \beta N_2 \quad (1.1)$$

где $\sigma = r_1 + r_2$; r_α – радиус частиц сорта α ; N_α – число частиц сорта α в единице объема; $\alpha = 1, 2$; $w_r = \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}$ – радиальная компонента относительной скорости $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ между двумя частицами; \mathbf{v}_α – скорость частиц сорта α ; \mathbf{r} – единичный вектор, направленный от центра первой частицы к центру второй; β – ядро (вероятность) столкновений двух частиц.

Плотность вероятности пульсационной составляющей радиальной относительной скорости в соответствии с общепринятым допущением задается распределением Гаусса

$$P(w_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle w_r'^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{w_r'^2}{2\langle w_r'^2 \rangle}\right) \quad (1.2)$$

где $w_r = W_r + w_r'$; W_r , w_r' – осредненная и пульсационная составляющие радиальной относительной скорости.

Согласно (1.2), при отсутствии относительного дрейфа ($W_r = 0$) средний модуль радиальной относительной скорости связан со среднеквадратичной радиальной относительной скоростью соотношением

$$\langle |w_r| \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |w_r| P(w_r) dw_r = \left(\frac{2}{\pi} \langle w_r'^2 \rangle\right)^{1/2} \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что турбулентная составляющая ядра столкновений в (1.1) выражается в виде

$$\beta_r = (8\pi\langle w_r'^2 \rangle)^{1/2} \sigma^2 \quad (1.4)$$

При допущении, что диаметры частиц меньше пространственного масштаба Колмогорова, интенсивность квадрата пульсаций радиальной относительной скорости представляется в виде (например, [4, 7])

$$\langle w_r'^2 \rangle = \langle v_{1r}'^2 \rangle + \langle v_{2r}'^2 \rangle - 2\langle v_{1r}' v_{2r}' \rangle + r_1^2 \left\langle \left(\frac{\partial v_{1r}'}{\partial r}\right)^2 \right\rangle + r_2^2 \left\langle \left(\frac{\partial v_{2r}'}{\partial r}\right)^2 \right\rangle + 2r_1 r_2 \left\langle \frac{\partial v_{1r}'}{\partial r} \frac{\partial v_{2r}'}{\partial r} \right\rangle \quad (1.5)$$

где r – расстояние вдоль линии, соединяющей центры частиц.

В изотропной однородной турбулентности величина $\langle v_r'^2 \rangle$ непосредственно связывается с турбулентной энергией несущего потока $k = \langle u_k' u_k' \rangle / 2$ (например, [15])

$$\langle v_r'^2 \rangle = \frac{2}{3} k_p = \frac{2}{3} f_u k, \quad f_u = \frac{1}{\tau_p} \int_0^{\infty} \Psi_u(\xi) \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_p}\right) dt \quad (1.6)$$

где $k_p = \langle v_k' v_k' \rangle / 2$ – кинетическая пульсационная энергия частиц; f_u – коэффициент вовлечения частиц в пульсационное движение несущего потока; $\Psi_u(\xi)$ – лагранжева автокорреляционная функция пульсаций скорости газа вдоль траектории частицы; τ_p – время динамической релаксации частицы.

Выражение для коэффициента вовлечения f_u в (1.6) справедливо для тяжелых частиц, плотность которых много больше плотности несущего потока (газа), когда единственно существенной из межфазных сил является сила аэродинамического сопротивления.

Для вычисления корреляционного момента скоростей двух частиц $\langle v_{1r}' v_{2r}' \rangle$ совместная плотность вероятности скоростей частиц и газа принимается в виде распределения Гаусса [5]. В соответствии с этим предположением функция плотности вероятности скоростей двух частиц в точке соударения описывается коррелированным нормальным распределением

$$P_{12}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{27 N_1 N_2}{64 \pi^3 (1 - f_{u1} f_{u2})^{3/2}} \times \exp\left[-\frac{3}{4(1 - f_{u1} f_{u2})} \left(\frac{v_{1k} v_{1k}}{k_{p1}} - \frac{2 f_{u1}^{1/2} f_{u2}^{1/2} v_{1k} v_{2k}}{k_{p1}^{1/2} k_{p2}^{1/2}} + \frac{v_{2k} v_{2k}}{k_{p2}} \right)\right] \quad (1.7)$$

В соответствии с (1.7) корреляционный момент скоростей двух частиц равен

$$\langle v_{1r}' v_{2r}' \rangle = \frac{2}{3} R_{12} k_{p1}^{1/2} k_{p2}^{1/2}, \quad R_{12} = f_{u1}^{1/2} f_{u2}^{1/2} \quad (1.8)$$

Коэффициент R_{12} в (1.8) локальным образом учитывает коррелированность скоростей частиц в точке соударения через их взаимодействие с полем скорости газа в той же точке.

Так как вклад членов с производными скоростей в (1.5) существен только для очень мелких частиц, время релаксации которых τ_p одного порядка с микромасштабом τ_k , то с целью упрощения эти члены определяются в предположении о полном вовлечении этих частиц в мелкомасштабное движение несущего потока

$$\left\langle \left(\frac{\partial v_r'}{\partial r} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} \frac{\partial v_{2r}}{\partial r} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial u_r'}{\partial r} \right)^2 \right\rangle \quad (1.9)$$

В изотропной турбулентности

$$\left\langle \left(\frac{\partial u_r'}{\partial r} \right)^2 \right\rangle = \frac{\varepsilon}{15\nu} \quad (1.10)$$

где ε – скорость диссипации турбулентной энергии; ν – молекулярная вязкость газа.

С учетом (1.5), (1.6) и (1.8)–(1.10) из (1.4) получается выражение для турбулентной составляющей ядра столкновений

$$\beta_t = \left(\frac{8\pi}{3} \right)^{1/2} \sigma^2 \left[2(k_{p1} + k_{p2} - 2R_{12} k_{p1}^{1/2} k_{p2}^{1/2}) + \frac{\varepsilon}{5\nu} \sigma^2 \right]^{1/2} \quad (1.11)$$

Первая и вторая группы членов в квадратных скобках в (1.11) учитывают соответственно вклад в столкновения частиц, обусловленный их вовлечением в крупномасштабное и мелкомасштабное турбулентное движение несущего потока. Стохастическое движение крупных частиц ($\tau_p \gg T_L$) некоррелировано ($R_{12} \approx 0$) и, кроме того, вкладом вовлечения таких частиц в мелкомасштабное турбулентное движение можно пренебречь. В этом случае из (1.11) следует [2]

$$\beta_l = 4 \left(\frac{1}{3} \pi \right)^{1/2} \sigma^2 (k_{p1} + k_{p2})^{1/2} \quad (1.12)$$

Для очень мелких частиц вследствие их полного вовлечения в пульсационное движение несущего потока ($f_u = R_{12} = 1$), напротив, вклад первой группы членов в (1.11) исчезает и ядро столкновений частиц определяется флуктуациями градиента скорости газа [1]

$$\beta_l = \left(\frac{8\pi \varepsilon}{15 \nu} \right)^{1/2} \sigma^3 \quad (1.13)$$

Для вычисления коэффициента f_u необходимо задать автокорреляционную функцию $\Psi_u(\xi)$. Наиболее часто с этой целью используется одномасштабная экспоненциальная функция

$$\Psi_u(\xi) = \exp\left(-\frac{\xi}{T_L}\right) \quad (1.14)$$

Зависимость (1.14) хорошо описывает автокорреляционную функцию при больших числах Рейнольдса, однако не является корректной в окрестности $\xi = 0$. Поэтому (1.14) может использоваться для вычисления f_u только при больших числах Рейнольдса для достаточно инерционных частиц ($\tau_p > \tau_T$, где τ_T – временной микромасштаб турбулентности Тейлора), когда взаимодействие частиц с мелкомасштабными вихрями не играет существенной роли. Для определения f_u не только при больших, но и при малых значениях τ_p/τ_T , а также при умеренных числах Рейнольдса привлекается двухмасштабная параболоэкспоненциальная аппроксимация для автокорреляционной функции [16]

$$\Psi_u(\xi) = \begin{cases} 1 - \frac{\xi^2}{\tau_T^2}, & \xi < \xi_0 \\ \frac{2\xi_0 T_{L0}}{\tau_T^2} \exp\left(-\frac{\xi - \xi_0}{T_{L0}}\right), & \xi > \xi_0 \end{cases} \quad (1.15)$$

удовлетворяющая при $\xi_0 = \sqrt{T_{L0}^2 + \tau_T^2} - T_{L0}$ условиям

$$\Psi_u(\xi_0 - 0) = \Psi_u(\xi_0 + 0), \quad \Psi'_u(\xi_0 - 0) = \Psi'_u(\xi_0 + 0)$$

Интегральный масштаб Лагранжа, согласно (1.15), равен

$$T_L = \int_0^{\infty} \Psi_u(\xi) d\xi = \xi_0 - \frac{\xi_0^3}{3\tau_T^2} + \frac{2\xi_0 T_{L0}^2}{\tau_T^2} \quad (1.16)$$

Микромасштаб Тейлора определяется соотношением

$$\tau_T = \left(\frac{2 \operatorname{Re}_\lambda \nu}{15^{1/2} a_0 \varepsilon} \right)^{1/2} \quad (1.17)$$

Здесь $Re_\lambda = (20k^2/3\varepsilon\nu)^{1/2}$ – число Рейнольдса, построенное по пространственному микромасштабу Тейлора. Величина a_0 в (1.17) связана с амплитудой флуктуаций ускорения в изотропной турбулентности $\langle a_i a_j \rangle = a_0 \varepsilon^{3/2} \nu^{-1/2} \delta_{ij}$. Для определения a_0 при умеренных числах Рейнольдса в диапазоне $20 < Re_\lambda < 100$ можно привлечь формулу [17]

$$a_0 = 0.13 Re_\lambda^{0.64} \quad (1.18)$$

аппроксимирующую данные прямого численного моделирования [18]. Отметим, что формулу (1.18) не следует использовать при больших значениях Re_λ , так как при $Re_\lambda \rightarrow \infty$ величина a_0 , по-видимому, должна стремиться к постоянному значению (в качестве асимптотического значения в [19] принимается $a_0 = 3$, однако, согласно экспериментам [20], $a_0 = 7$ при $Re_\lambda > 1000$).

Интегральный масштаб турбулентности при больших числах Рейнольдса определяется соотношением

$$T_{L\infty} = \frac{4k}{3C_0\varepsilon} \quad (1.19)$$

где асимптотическое значение постоянной Колмогорова $C_0 = 7$ при $Re_\lambda \rightarrow \infty$ в соответствии с [17].

Данные прямого численного моделирования [18] для интегрального масштаба турбулентности при умеренных числах Re_λ согласуются с (1.16) при представлении T_{L0} с учетом (1.19) в виде

$$T_{L0} = 0.19 \frac{k}{\varepsilon} \left(1 + \frac{17}{Re_\lambda} \right) \quad (1.20)$$

Следует отметить, что более точно автокорреляционная функция (1.15) должна определяться дифференциальным и интегральным масштабами Лагранжа пульсаций скорости газа, вычисленными вдоль траектории частицы. Это масштабы, характеризующие взаимодействие частицы – турбулентность, совпадают с соответствующими масштабами Лагранжа пульсаций скорости газа только для безынерционных частиц, а с ростом их инерционности должны стремиться к соответствующим временным масштабам Эйлера, определенным в движущейся со средней скоростью потока системе координат. Однако до сих пор в литературе рассматривалось только влияние инерционности частиц на интегральный временной масштаб взаимодействия с турбулентными вихрями для простейших одномасштабных экспоненциальной и гауссовой автокорреляционных функций (например, [21, 22]), а влияние на дифференциальный масштаб не анализировалось. Поэтому временные масштабы в (1.15) описываются соотношениями (1.17) с (1.18) и (1.20) без учета этого эффекта.

Коэффициент вовлечения в (1.6) с учетом (1.15) определяется выражением

$$f_u = 1 + \frac{2\tau_p^2}{\tau_1^2} \left[\exp \left(- \frac{\sqrt{T_{L0}^2 + \tau_T^2} - T_{L0}}{\tau_p} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{T_{L0}^2 + \tau_T^2} - T_{L0}}{\tau_p + T_{L0}} \right) - 1 \right] \quad (1.21)$$

При малых и больших значениях τ_p из (1.21) соответственно следует

$$\lim_{\tau_p \rightarrow 0} f_u = 1 - \frac{2\tau_p^2}{\tau_T^2}, \quad \lim_{\tau_p \rightarrow \infty} f_u = \frac{2T_{L0}^3}{3\tau_1^2 \tau_p} \left[\left(1 + \frac{\tau_T^2}{T_{L0}^2} \right)^{3/2} - 1 \right] \quad (1.22)$$

Из (1.21) при больших числах Рейнольдса ($Re_\lambda \rightarrow \infty, \tau_T/T_{L0} \rightarrow 0$) получается выражение для коэффициента вовлечения, соответствующее автокорреляционной функции (1.14)

$$f_u = \left(1 + \frac{\tau_p}{T_L}\right) \quad (1.23)$$

Как видно из (1.23), особенно большая погрешность при использовании автокорреляционной функции (1.14) возникает для малоинерционных частиц, взаимодействие которых с турбулентностью, согласно (1.22), характеризуется дифференциальным, а не интегральным масштабом.

В случае одинаковых частиц ядро столкновений (1.11) с учетом (1.6) и (1.8) принимает вид

$$\beta_l = \left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/2} \sigma^2 \left[4f_u(1-f_u)k + \frac{\varepsilon}{5\nu} \sigma^2\right]^{1/2} \quad (1.24)$$

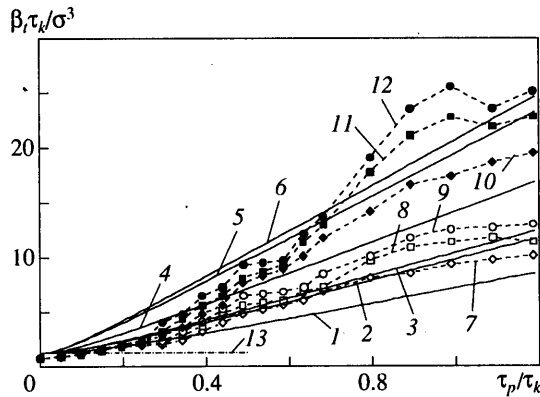
На фиг. 1–4 представлены результаты сравнения зависимости (1.24) с данными прямых численных расчетов в изотропном турбулентном поле [10, 11]. Следует отметить, что результаты сравнения с численными данными [10] включают варианты, выходящие за границу применимости представленной модели $\sigma/\eta < 1$. Поэтому сопоставление с вариантами, когда $\sigma/\eta \geq 1$, является не совсем корректным. На фиг. 1 продемонстрировано сравнение для малоинерционных частиц ($\tau_p \ll \tau_T$), когда (1.24) с учетом (1.17) и (1.22) представляется в виде

$$\beta_l = \left(\frac{8\pi}{15} \frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{1/2} \sigma^3 \left[1 + 30a_0 \left(\frac{\tau_p}{\tau_k}\right)^2 \left(\frac{\eta}{\sigma}\right)^2\right]^{1/2} \quad (1.25)$$

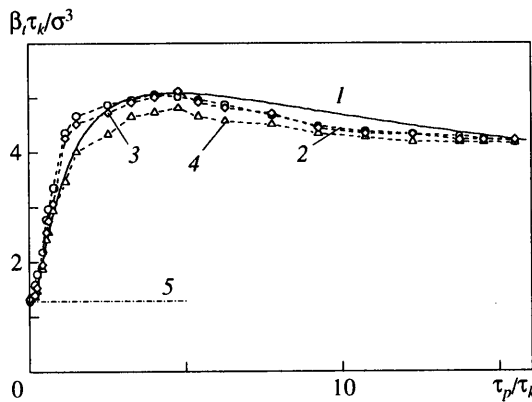
где $\tau_k = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$, $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ – временной и пространственный микромасштабы Колмогорова.

Из фиг. 1 видно, что зависимость (1.25) качественно правильно описывает результаты [10], показывая возрастание β_l с увеличением τ_p по закону, близкому к линейному при $30a_0(\tau_p/\tau_k)^2(\eta/\sigma)^2 \gg 1$, от значения, даваемого формулой (1.13) при $\tau_p = 0$. В соответствии с данными [10] зависимость (1.25) предсказывает рост ядра столкновений с уменьшением отношения диаметра частиц к пространственному микромасштабу турбулентности σ/η и увеличением числа Рейнольдса Re_λ .

Фигуры 2 и 3 представляют β_l в зависимости от времени релаксации частиц, отнесенному соответственно к колмогоровскому и интегральному эйлерову ($T_E = 2k/3\varepsilon$) масштабам. Численные результаты изображены для различных схем расчета соударений частиц, приводящих к слегка отличным значениям для β_l . Видно, что поведение аналитических и численных зависимостей β_l от τ_p качественно подобно и характеризуется наличием максимумов. Первоначальный рост β_l обусловлен снижением коррелированности движения частиц (уменьшением коэффициента корреляции R_{12}) с увеличением их инерционности, а последующее падение β_l после достижения максимума связано со снижением вовлечения частиц в турбулентное движение (уменьшением коэффициента вовлечения f_u). Одной из причин некоторого количественного различия между аналитическими и численными результатами является неучет влияния инерционности частиц на время их взаимодействия с турбулентными вихрями. На фиг. 3 приведена также аналитическая зависимость, полученная в [10] на основе одномасштабной треугольной автокорреляционной функции. Как уже было отмечено, использование одномасштабных автокорреляционных функций может приводить к большой погрешности при определении частоты столкновений малоинерционных частиц.



Фиг. 1. Ядро столкновений малоинерционных частиц в изотропной турбулентности: 1-6 – формула (1.25); 7-12 – расчеты [10]; 1, 7 – $Re_\lambda = 45$, $\eta/\sigma = 1$; 2, 8 – 59, 1; 3, 9 – 75, 1; 4, 10 – 45, 2; 5, 11 – 59, 2; 6, 12 – 75, 2; 13 – формула (1.13)

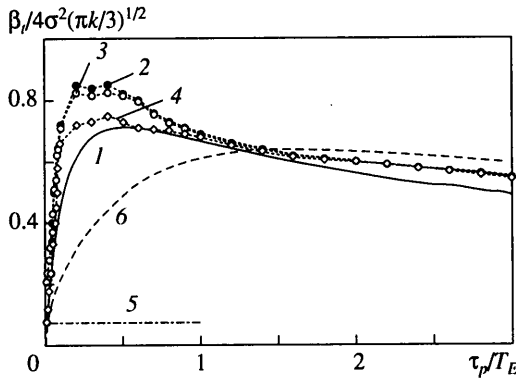


Фиг. 2. Влияние инерционности частиц на ядро столкновений в изотропной турбулентности при $Re_\lambda = 24$ и $\sigma/\eta = 1.78$: 1 – формула (1.24); 2, 3, 4 – расчеты [10]; 5 – формула (1.13)

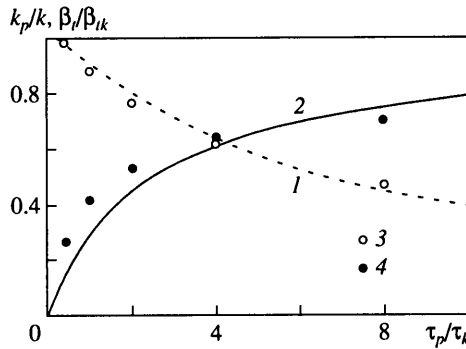
Фигура 4 показывает влияние инерционности частиц на их кинетическую энергию k_p , отнесенную к энергии турбулентности k , и ядро столкновений β_p , нормированное на соответствующую величину, вычисленную без учета коррелированности движения β_{ik} согласно (1.12) (в приближении кинетической теории). Видно согласие аналитических зависимостей (1.6) и (1.24) с численными результатами [11]. Стремление β_p/β_{ik} к единице иллюстрирует уменьшение эффекта коррелированности движения частиц с ростом их инерционности.

На фиг. 5 зависимость (1.24) сопоставляется с результатами прямого численного моделирования [12] в приосевой зоне плоского канала, где характеристики турбулентности близки к изотропным. Время релаксации и диаметр частиц обезразмерены введением динамической скорости (скорости трения) u_* , т.е. $\tau_+ = \tau_p u_*^2 / \nu$ и $\sigma_+ = \sigma u_* / \nu$.

2. Влияние осредненной относительной скорости на частоту столкновений. Определим частоту и ядро столкновений в результате совместных эффектов турбулентности и осредненной составляющей относительной скорости между частицами,



Фиг. 3. Влияние инерционности частиц на ядро столкновений в изотропной турбулентности при $Re_\lambda = 45$ и $\sigma/\eta = 1$: 1 – формула (1.24); 2, 3, 4 – расчеты [10], 5 – формула (1.13); 6 – аналитическая зависимость [10]



Фиг. 4. Влияние инерционности на кинетическую энергию частиц и ядро столкновений в изотропной турбулентности при $Re_\lambda = 54.2$ и $\sigma/\eta = 0.36$: 1, 3 – k_p/k ; 2, 4 – β_i/β_{ik} ; 1, 2 – формулы (1.6) и (1.24); 3, 4 – расчеты [11]

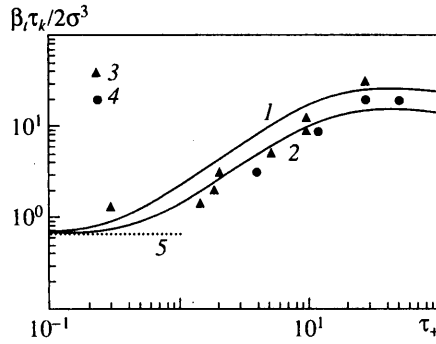
обусловленной сдвигом скорости несущего потока или действием силы тяжести. В этом случае для вычисления средней радиальной компоненты относительной скорости $\langle |w_r| \rangle$ в (1.1) необходимо выполнить осреднение по случайному распределению w_r и телесному углу, характеризующему пространственную ориентацию вектора скорости w относительно соединяющего центры сталкивающихся частиц вектора \mathbf{r}

$$\langle |w_r| \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} |w_r| P(w_r) \sin \phi d\psi d\phi dw_r \quad (2.1)$$

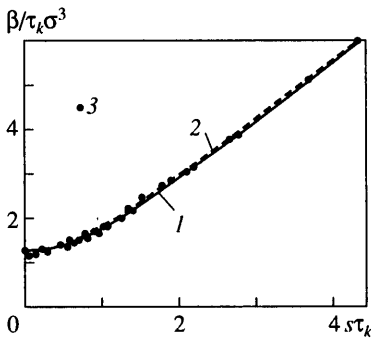
где ψ – полярный угол между вектором \mathbf{r} и осью z , направленной вертикально вверх; ϕ – азимутальный угол в плоскости (x, y) .

Выполним интегрирование в (2.1) по w_r с учетом распределения Гаусса (1.2)

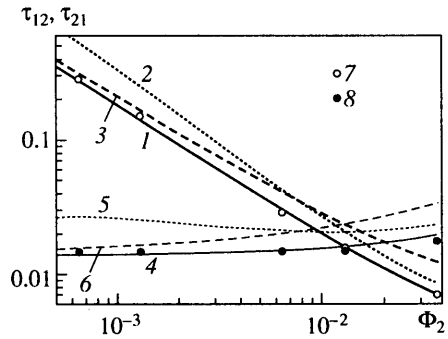
$$\langle |w_r| \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\left(\frac{2\langle w_r'^2 \rangle}{\pi} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{W_r^2}{2\langle w_r'^2 \rangle} \right) + W_r \operatorname{erf} \left(\frac{W_r}{2\langle w_r'^2 \rangle} \right) \right] \sin \phi d\psi d\phi \quad (2.2)$$



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Фиг. 5. Влияние инерционности частиц на ядро столкновений в приосевой зоне канала: 1, 2 – формула (1.24); 3, 4 – расчеты [12]; 1, 3 – $\sigma_* = 0.498$; 2, 4 – $\sigma_* = 0.840$; 5 – формула (1.13)

Фиг. 6. Ядро столкновений в турбулентном потоке с однородным сдвигом скорости: 1 – 2 – формулы (2.4) и (2.6), 3 – расчеты [13]

Фиг. 7. Времена между столкновениями частиц в бинарной смеси: 1, 2, 3, 7 – τ_{12} ; 4, 5, 6, 8 – τ_{21} ; 1, 4 – формулы (2.9) и (2.7); 2, 5 – (2.9) и (1.12); 3, 6 – (2.9) и (2.8); 7, 8 – расчеты [14]

При отсутствии осредненной относительной скорости ($W_r = 0$) выражение (2.2) переходит в (1.3).

Поле скорости несущего потока задается в виде однородного сдвига $\mathbf{U} = (sz, 0, 0)$ и принимается, что частицы полностью вовлечены в осредненное движение, т.е. $\mathbf{V} = \mathbf{U}$. Тогда радиальная компонента w_r обусловлена сдвигом скорости и силой тяжести

$$W_r = s\sigma \cos \psi \sin \varphi \cos \varphi + W_g \cos \varphi \quad (2.3)$$

где $W_g = |\tau_{p1} - \tau_{p2}|g$ – разность скоростей седиментации двух частиц.

При отсутствии эффекта гравитации ($W_g = 0$) из (1.1) и (2.2) с учетом (2.3) получается ряд, описывающий влияние сдвига скорости на ядро столкновений

$$\beta = (8\pi \langle w_r'^2 \rangle)^{1/2} \sigma^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\Gamma(2n+1)\Gamma(n+1/2)}{2^{3n+1}\Gamma^2(n+1)\Gamma(2n+3/2)} \left(\frac{s^2\sigma^2}{\langle w_r'^2 \rangle} \right)^n + \frac{\Gamma(2n+3)\Gamma(n+3/2)}{2^{3n+3}(2n+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+2)\Gamma(2n+7/2)} \left(\frac{s^2\sigma^2}{\langle w_r'^2 \rangle} \right)^{n+1} \right] \right\} \quad (2.4)$$

При $(s\sigma)^2/\langle w_r'^2 \rangle \rightarrow \infty$ ряд (2.4) сходится к решению Смолуховского [23]

$$\beta_s = \frac{4}{3} s \sigma^3 \quad (2.5)$$

На фиг. 6 показано сравнение зависимости (2.4) с результатами численных расчетов для малоинерционных частиц, когда турбулентная составляющая ядра столкновений определяется соотношением (1.13). Видно хорошее согласие (2.4) с численными результатами. Выражение (2.4) может быть аппроксимировано простой формулой

$$\beta = (\beta_r^2 + \beta_s^2)^{1/2} \quad (2.6)$$

где составляющая ядра столкновений за счет сдвига скорости определяется согласно (2.5). Зависимости (2.4) и (2.6) на фиг. 6 практически неразличимы.

При отсутствии сдвига скорости ($s = 0$) из (1.1) и (2.2) с учетом (2.3) получается выражение для ядра столкновений, описывающее совместное влияние турбулентности и силы тяжести

$$\beta = (8\pi\langle w_r'^2 \rangle)^{1/2} \sigma^2 \left[\frac{1}{2} \exp(-\Sigma^2) + \frac{1}{2} \pi^{1/2} \left(\Sigma + \frac{1}{2} \Sigma^{-1} \right) \operatorname{erf} \Sigma \right] \quad (2.7)$$

$$\Sigma = W_g / (2\langle w_r'^2 \rangle)^{1/2}$$

где Σ – параметр, характеризующий отношение эффектов гравитации и турбулентности на ядро столкновений. При малых значениях Σ из (2.7) следует выражение для β , совпадающее с решением [1] при слабом влиянии гравитации

$$\beta = \beta_r \left(1 + \frac{1}{3} \Sigma^2 \right)$$

При $\Sigma \rightarrow \infty$ (2.7) переходит в хорошо известное выражение для ядра столкновений частиц под действием силы тяжести

$$\beta_g = \pi \sigma^2 W_g \quad (2.8)$$

Зависимость (2.7) справедлива для описания эффекта осредненной относительной скорости на ядро столкновений в изотропной турбулентности в поле не только силы тяжести, но и любой другой массовой силы, вызывающей относительное движение частиц.

Фигура 7 представляет результаты сопоставления времен между столкновениями частиц разного сорта, определенных на основе зависимости (2.7), с данными прямого численного интегрирования стохастических уравнений движения частиц в турбулентном поле, моделируемом методом крупных вихрей [14], для смеси двух сортов частиц одинакового размера ($r_\alpha = 0.325$ мм), но разной плотности ($\rho_{p1} = 117.5$, $\rho_{p2} = 235$ кг/м³). Объемная концентрация частиц сорта 1 фиксировалась $\Phi_1 = 1.3 \cdot 10^{-2}$, а сорта 2 варьировалась (объемная и числовая концентрации частиц связаны соотношением $\Phi_\alpha = 4\pi r_\alpha^3 N_\alpha / 3$). Времена между столкновениями частицы сорта 1 с частицами сорта 2 и частицы сорта 2 с частицами сорта 1 равны

$$\tau_{12} = \omega_{12}^{-1} = (\beta N_2)^{-1}, \quad \tau_{21} = \omega_{21}^{-1} = (\beta N_1)^{-1} \quad (2.9)$$

Так как рассматриваемые частицы достаточно крупные, коррелированность их движения и взаимодействие с мелкомасштабной турбулентностью не играют роли и поэтому в (2.7) можно положить $\langle w_r'^2 \rangle = 2(k_{p1} + k_{p2})/3$. На фиг. 7 также показаны времена между столкновениями, рассчитанные по зависимостям, описывающим эффекты турбулентности без учета относительного дрейфа (1.12) и силы тяжести без

вклада турбулентности (2.8). Видно, что каждая из этих зависимостей приводит к завышению τ_{12} и τ_{21} по отношению к расчетным значениям [14], особенно (1.12) при малых концентрациях и (2.8) при больших Φ_2 . Следует отметить, что с ростом концентрации Φ_2 вследствие увеличения частоты столкновений ω_{12} разница между осредненными скоростями частиц сорта 1 и 2, т.е. относительная скорость дрейфа W_g , уменьшается и поэтому (2.8) лучше описывает τ_{12} и τ_{21} при малых, а (1.12) при больших Φ_2 . Формула (2.7), одновременно учитывающая эффекты турбулентности и гравитации, дает достаточно хорошее согласие с данными [14], особенно с учетом того, что интенсивность пульсаций скоростей частиц вследствие наличия осредненной вертикальной компоненты скорости, не является изотропной.

Заключение. Развита теоретическая модель для определения частоты столкновений, обусловленных турбулентными пульсациями скоростей и относительным осредненным движением частиц. Выполнено сравнение развитой модели с результатами прямых численных расчетов характеристик столкновений частиц в изотропных и неізотропных турбулентных течениях. Результаты проведенного сравнения позволяют сделать вывод, что предложенная модель адекватно описывает влияние инерционности частиц, сдвига скорости и силы тяжести на частоту столкновений в турбулентных потоках.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 99-02-17001).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Saffman P.G., Turner J.S. On the collision of drops in turbulent clouds // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. Pt. 1. P. 16–30.
2. Abrahamson J. Collision rates of small particles in a vigorously turbulent fluid // Chem. Engng. Sci. 1975. V. 30. № 11. P. 1371–1379.
3. Williams J.J., Crane R.I. Particle collision rate in turbulent flow // Intern. J. Multiphase Flow. 1983. V. 9. № 4. P. 421–435.
4. Yuu S. Collision rate of small particles in a homogeneous and isotropic turbulence // AIChE Journal. 1984. V. 30. № 5. P. 802–807.
5. Laviéville J., Deutsch E., Simonin O. Large eddy simulation of interactions between colliding particles and a homogeneous isotropic turbulence field // Proc. 6th Intern. Symp. on Gas-Particle Flows. ASME FED. 1995. V. 228. P. 347–357.
6. Деревич И.В. Столкновения частиц в турбулентном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 2. С. 104–116.
7. Зайчик Л.И. Оценка времени между столкновениями дисперсных частиц в турбулентном потоке // Теплофизика высоких температур. 1998. Т. 36. № 3. С. 456–460.
8. Wang L.-P., Wexler A.S., Zhou Y. Statistical mechanical descriptions of turbulent coagulation // Phys. Fluids. 1998. V. 10. № 10. P. 2647–2651.
9. Хинце И.О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
10. Zhou Y., Wexler A.S., Wang L.-P. On the collision rate of small particles in isotropic turbulence. II. Finite inertia case // Phys. Fluids. 1998. V. 10. № 5. P. 1206–1216.
11. Sundaram S., Collins L.R. Collision statistics in isotropic particle-laden turbulent suspension. Pt 1. Direct numerical simulations // J. Fluid Mech. 1997. V. 335. P. 75–109.
12. Chen M., Kontomaris K., McLaughlin J.B. Direct numerical simulation of droplet collisions in a turbulent channel flow. Pt II: collision rates // Intern. J. Multiphase Flow. 1998. V. 24. № 7. P. 1105–1138.
13. Mei R., Hu K.C. On the collision rate of small particles in turbulent flows // J. Fluid Mech. 1999. V. 391. P. 67–89.
14. Gourdel C., Simonin O., Brunier E. Modelling and simulation of gas-solid turbulent flows with a binary mixture of particles // Proc. 3rd Intern. Conf. on Multiphase Flow. Lyon, 1998. P. 1–8.
15. Зайчик Л.И., Першуков В.А. Проблемы моделирования газодисперсных турбулентных течений с горением или фазовыми переходами // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 5. С. 3–19.

16. Деревич И.В., Ерошенко В.М., Зайчик Л.И. Влияние частиц на турбулентное течение в каналах // Изв. РАН. МЖГ. 1985. № 1. С. 40–48.
17. Sawford B.L. Reynolds number effects in Lagrangian stochastic models of turbulent dispersion // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. № 6. P. 1577–1586.
18. Yeung P.K., Pope S.B. Lagrangian statistic from direct numerical simulations of isotropic turbulence // J. Fluid Mech. 1989. V. 207. P. 531–586.
19. Pope S.B. Lagrangian PDF methods for turbulent flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 1994. V. 26. P. 23–63.
20. Voth G.A., Satyanarayan K., Bodenschatz E. Lagrangian acceleration measurements at large Reynolds numbers // Phys. Fluids. V. 10. № 9. P. 2268–2280.
21. Wang L.P., Stock D.E. Dispersion of heavy particles by turbulent motion // J. Atmosph. Sci. 1993. V. 50. № 13. P. 1897–1913.
22. Зайчик Л.И., Алипченков В.М. Время взаимодействия сталкивающихся частиц с турбулентными вихрями // Теплофизика и аэромеханика. 1999. Т. 6. № 4. С. 529–537.
23. Smoluchowski M.V. Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetik kolloider Lösungen // Z. Phys. Chem. 1917. V. B. 2. S. 129–168.

Москва

Поступила в редакцию
23.III.2000