

УДК 532.516.5.013.4

© 2001 г. А.М. ШИХВАТОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ОПОРЫ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛОЖЕНИИ РОТОРА

Исследована устойчивость по первому приближению сферической газодинамической опоры, профилированной спиральными канавками, при малых зазорах в центральном положении ротора. Для вычисления запаса устойчивости опоры произведена дискретизация уравнений газовой смазки методом Бубнова – Галеркина.

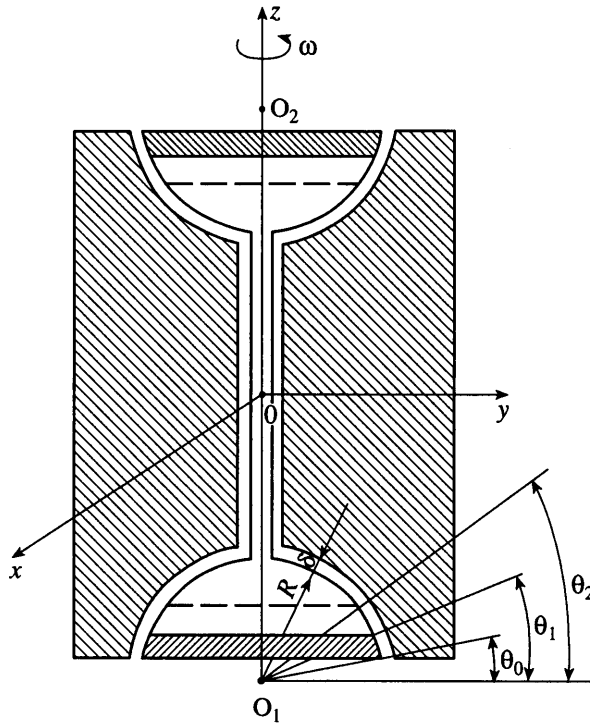
В подшипниках с газовой смазкой, используемых в качестве опор в гироскопических приборах, толщина смазочного слоя составляет 1,5–2 мкм и сравнима с длиной свободного пробега молекул газа. Газовую среду в этих условиях уже нельзя рассматривать как сплошную. Количественной мерой, характеризующей влияние данного фактора, является число Кнудсена K_n . Как показано в [1–3], необходимость учета молекулярных процессов в газовом смазочном слое возникает при значениях $K_n > 0.01$. В этом случае граничные условия прилипания на смазываемых поверхностях заменяются условиями проскальзывания первого и второго порядка. При этом для чисел $K_n < 0.1$ достаточно рассматривать условия первого порядка.

Исследование устойчивости стационарного режима газодинамического подшипника в данной работе сводится к анализу устойчивости стационарной точки нелинейной системы, состоящей из уравнения Рейнольдса (выведенного при условии $K_n < 0.1$) и интегродифференциальных уравнений, описывающих перемещение ротора. Устойчивость стационарной точки определяется методом малых возмущений путем вычисления спектра линеаризованной в стационарной точке системы. Если стационарная точка соответствует центральному положению ротора, то спектр полученной системы распадается, что позволяет эффективно вычислять его методом Бубнова – Галеркина.

Работа посвящена изучению влияния числа Кнудсена на запас устойчивости сферического газодинамического подшипника, профилированного спиральными канавками.

1. Рассматривается газодинамическая опора ротора гироскопа, состоящая из двух полусферических подшипников, профилированных спиральными канавками, нанесенными на неподвижную поверхность (см. фиг. 1). Обозначим: R – радиус каждого из подшипников, δ – зазор в центральном положении ротора, ω – скорость вращения ротора, $\tau = \omega t$, t – время, M_r – масса ротора, P – давление в смазочном слое подшипников, отнесенное к атмосферному давлению p_a , μ – динамический коэффициент вязкости газа, $K_n = l_p/\delta$ – число Кнудсена, l_p – длина свободного пробега молекулы газа, K – число канавок, β – угол наклона канавок к направлению вращения, κ – отношение ширины канавки к ширине пары канавка – выступ, Δ_1 – глубина канавки, $\Delta_0 = \Delta_1/\delta$.

Пусть O_1 и O_2 – центры подшипников. Поместим начало неподвижной декартовой системы координат $Oxuz$ в середину отрезка O_1O_2 . Ось Oz направим из точки O_1 в точку O_2 . Введем сферические координаты (θ, φ) с центрами в точках O_1 и O_2 ,



Фиг. 1. Схема сферической газодинамической опоры

$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Область, занимаемая смазочным слоем, для первого подшипника определяется неравенством $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_2$, а для второго – $-\theta_2 \leq \theta \leq -\theta_0$. Профилированная зона для первого подшипника имеет вид $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, а для второго $-\theta_1 \leq \theta \leq -\theta_0$. (На фиг. 1 профилированные зоны заштрихованы, смазываемые зоны отделены пунктирными линиями.)

Пусть O' – центр ротора. Вектор $OO' = (e_1, e_2, e_3)$ называется вектором смещения. Положим $\varepsilon_k = e_k/\delta$, $k = 1, 2, 3$. Толщина смазочного слоя подшипников H , отнесенная к зазору δ , равна $H_c(\theta, \varphi) = \varepsilon_1 \cos \theta \cos \varphi - \varepsilon_2 \cos \theta \sin \varphi - \varepsilon_3 \sin \theta$, где H_c – толщина слоя в центральном положении ротора. Функция $H_c(\theta, \varphi)$ обладает двумя важными свойствами: она четна по переменной θ и имеет период T по переменной φ , $T = 2\pi/K$.

Если число Кнудсена $Kn < 0.1$, то давление P удовлетворяет уравнению Рейнольдса [4, 5]

$$2\Lambda \cos \theta \frac{\partial(HP)}{\partial \tau} = \frac{\partial(\cos \theta Q_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.1)$$

$$Q_\theta = G \frac{\partial P}{\partial \theta}, \quad Q_\varphi = \frac{G}{\cos \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \Lambda HP \cos \theta$$

$$G = H^3 P + 6KnH^2, \quad \Lambda = \frac{6\mu\omega R^2}{\rho_a \delta^2}$$

Здесь Λ – параметр сжимаемости, $\mathbf{Q} = (Q_\theta, Q_\varphi)$ – вектор расхода газа. Пусть $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ – главный вектор внешних сил, действующих на ротор.

Присоединим к уравнению (1.1) уравнения движения ротора

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varepsilon_1}{d\tau^2} &= K_f(f_1 - \iint_D P \cos^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi) \\ \frac{d^2\varepsilon_2}{d\tau^2} &= K_f(f_2 - \iint_D P \cos^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi) \\ \frac{d^2\varepsilon_3}{d\tau^2} &= K_f(f_3 - \iint_D P \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi)\end{aligned}\quad (1.2)$$

$$f_i = \frac{F_i}{p_a R^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad K_f = \frac{p_a R^2}{M_r \omega^2 \delta}$$

$$D = (\theta_0 \leq |\theta| \leq \theta_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

Функция $P(\tau, \theta, \varphi)$ должна удовлетворять еще граничным условиям

$$\begin{aligned}P(\tau, \pm \theta_0, \varphi) &= P(\tau, \pm \theta_2, \varphi) = 1, \quad P(\tau, \theta, \varphi + 2\pi) = \\ &= P(\tau, \theta, \varphi), \quad (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n})_- = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n})_+\end{aligned}\quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{n} – единичный вектор, направленный по нормали к границе канавки, $(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n})_{\pm}$ – пределы изнутри и извне канавки скалярного произведения $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}$.

Решением системы (1.1) – (1.3) является система функций $(P(\tau, \theta, \varphi), \varepsilon_1(\tau), \varepsilon_2(\tau), \varepsilon_3(\tau))$, удовлетворяющая уравнению (1.1) в каждой области, где функция $H(\tau, \theta, \varphi)$ непрерывна, а также уравнениям (1.2) и граничным условиям (1.3). Функция $P(\tau, \theta, \varphi)$ предполагается непрерывной при $\tau \geq 0, \theta_0 \leq |\theta| \leq \theta_2, -\infty < \varphi < \infty$. Решение $(P, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ стационарное, если не зависит от τ .

Пусть $(P_0, \varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \varepsilon_3^0)$ – стационарное решение. Линеаризуем уравнение (1.1) в окрестности этого решения, положив $P = P_0 + u(\theta, \varphi)e^{\lambda\tau}$, $\varepsilon_i = \varepsilon_i^0 + \Delta\varepsilon_i e^{\lambda\tau}$, $i = 1, 2, 3$, где $u(\theta, \varphi)$ – комплекснозначная функция, $\Delta\varepsilon_i, \lambda$ – комплексные числа, $u, \Delta\varepsilon_i$ – малые возмущения. Тогда получим

$$\frac{\partial(\cos \theta q_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} = 2\Lambda \lambda \cos \theta (H_0 u + P_0 \Delta H)\quad (1.4)$$

$$q_\theta = G_0 \frac{\partial u}{\partial \theta} + \Delta G \frac{\partial P_0}{\partial \theta}$$

$$q_\varphi = \frac{1}{\cos \theta} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \Delta G \frac{\partial P_0}{\partial \varphi} \right) - \Lambda \cos \theta (H_0 u + P_0 \Delta H)$$

$$G_0 = H_0^3 P_0 + 6KnH_0^2, \quad \Delta G = H_0^3 u + C\Delta H$$

$$H_0 = H_c - \varepsilon_1^0 \cos \theta \cos \varphi - \varepsilon_2^0 \cos \theta \sin \varphi - \varepsilon_3^0 \sin \theta,$$

$$\Delta H = -(\Delta\varepsilon_1 \cos \theta \cos \varphi + \Delta\varepsilon_2 \cos \theta \sin \varphi + \Delta\varepsilon_3 \sin \theta), \quad C = 3H_0^2 P_0 + 12KnH_0$$

Аналогичным образом, линеаризуя уравнения (1.2), находим

$$\begin{aligned}-K_f \iint_D u \cos^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi &= \lambda^2 \Delta\varepsilon_1 \\ -K_f \iint_D u \cos^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi &= \lambda^2 \Delta\varepsilon_2 \\ -K_f \iint_D u \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi &= \lambda^2 \Delta\varepsilon_3\end{aligned}\quad (1.5)$$

Наконец, линеаризуя граничные условия (1.3), получаем

$$u(\pm\theta_0, \varphi) = u(\pm\theta_2, \varphi) = 0, \quad u(\theta, \varphi + 2\pi) = u(\theta, \varphi) \quad (1.6)$$

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})_+ = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})_-, \quad \mathbf{q} = (q_\theta, q_\varphi)$$

Пусть λ_k – собственные числа задачи (1.4) – (1.6). Число $\lambda^* = -\max_k \operatorname{Re} \lambda_k$ назовем запасом устойчивости ротора. Если $\lambda^* > 0$, то ротор устойчив, а при $\lambda^* < 0$ – неустойчив [6].

2. Предположим, что нагрузка, действующая на ротор, отсутствует, т.е. $\mathbf{F} = 0$. В этом случае стационарное решение имеет вид $(P_0, 0, 0, 0)$, причем функция $P_0(\theta, \varphi)$ – четна по переменной θ и периодична по φ с периодом T . Далее, $H_0 = H_c$. Представим функцию u в виде $u = u_1 + u_2$, где u_1 и u_2 – четная и нечетная части функции u .

Подставив функцию $u = u_1 + u_2$ в (1.4), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\cos \theta q_\theta^1)}{\partial \theta} + \frac{\partial q_\varphi^1}{\partial \varphi} - 2\Lambda \lambda \cos \theta (H_c u_1 + P_0 \Delta H_1) = \\ = 2\Lambda \lambda \cos \theta (H_c u_2 + P_0 \Delta H_2) - \frac{\partial(\cos \theta q_\theta^2)}{\partial \theta} - \frac{\partial q_\varphi^2}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$q_\theta^i = G_0 \frac{\partial u_i}{\partial \theta} + \Delta G_i \frac{\partial P_0}{\partial \theta}, \quad i = 1, 2$$

$$q_\varphi^i = \frac{1}{\cos \theta} \left(G_0 \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} + \Delta G_i \frac{\partial P_0}{\partial \varphi} \right) - \Lambda \cos \theta (H_0 u_i + P_0 \Delta H_i)$$

$$\Delta G_i = H_c^3 u_i + C \Delta H_i$$

$$\Delta H_1 = -\cos \theta (\Delta \varepsilon_1 \cos \varphi + \Delta \varepsilon_2 \sin \varphi), \quad \Delta H_2 = -\Delta \varepsilon_3 \sin \theta$$

Видно, что левая часть равенства (2.1) – четная по переменной θ , а правая – нечетная, поэтому обе части равны нулю, т.е.

$$\frac{\partial(\cos \theta q_\theta^i)}{\partial \theta} + \frac{\partial q_\varphi^i}{\partial \varphi} = 2\Lambda \lambda \cos \theta (H_c u_i + P_0 \Delta H_i), \quad i = 1, 2 \quad (2.2)$$

Подставляя теперь функцию $u = u_1 + u_2$ в (1.5), находим

$$-2K_f \iint_{D_1} u_1 \cos^2 \theta \cos \varphi \, d\theta \, d\varphi = -\lambda^2 \Delta \varepsilon_1 \quad (2.3)$$

$$-2K_f \iint_{D_1} u_1 \cos^2 \theta \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi = -\lambda^2 \Delta \varepsilon_2$$

$$-2K_f \iint_{D_1} u_2 \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = -\lambda^2 \Delta \varepsilon_3 \quad (2.4)$$

$$D_1 = (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

Наконец, из граничных условий (1.6) получаются условия

$$u_i(\pm\theta_0, \varphi) = u_i(\pm\theta_2, \varphi) = 0, \quad u_i(\theta, \varphi + 2\pi) = u_i(\theta, \varphi)$$

$$(\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{n})_+ = (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{n})_-, \quad \mathbf{q}_i = (q_\theta^i, q_\varphi^i), \quad i = 1, 2 \quad (2.5)$$

Таким образом, спектр задачи (1.4) – (1.6) распадается на две группы. К первой группе относятся собственные числа (экваториальные), которым соответствуют

собственные формы вида $(u_1, \Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2, 0)$, причем функция $u_1(\theta, \varphi)$ – четна по переменной θ . Ко второй группе относятся собственные числа (осевые), формы которых имеют вид $(u_2, 0, 0, \Delta \varepsilon_3)$, причем функция $u_2(\theta, \varphi)$ нечетна по θ . Соответствующие запасы устойчивости обозначим через λ' и λ'' .

Лемма. Пусть $f(\varphi)$ – произвольная периодичная с периодом 2π кусочно-гладкая функция, определенная на всей вещественной оси. Тогда ее можно представить в виде

$$f(\varphi) = \frac{1}{2} g_0(\varphi) + \sum_{l=1}^{K_1} f_l(\varphi) \quad (2.6)$$

где K_1 – целая часть $K/2$, а функции $f_l(\varphi)$ имеют вид

$$f_l(\varphi) = g_l(\varphi) \cos l\varphi + h_l(\varphi) \sin l\varphi \quad (2.7)$$

Причем функции $g_l(\varphi)$, $l = 0, \dots, K_1$; $h_l(\varphi)$, $l = 1, \dots, K_1$ – кусочно-гладкие и периодичны с периодом T . Разложение (2.6) – единственно, а (2.7) – единственно при $l < K/2$.

Доказательство. Разложим функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi$$

Положим при $0 < l < K/2$

$$\alpha_{ml} = a_{mK-l} + a_{mK+l}, \quad \beta_{ml} = b_{mK-l} + b_{mK+l}$$

$$\gamma_{ml} = b_{mK+l} - b_{mK-l}, \quad \delta_{ml} = a_{mK-l} - a_{mK+l}$$

$$g_l(\varphi) = a_l + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{ml} \cos mK\varphi + \beta_{ml} \sin mK\varphi$$

$$h_l(\varphi) = b_l + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{ml} \cos mK\varphi + \delta_{ml} \sin mK\varphi$$

Если K – четное и $l = K/2$, то функции g_l, h_l определяются теми же выражениями, только правую часть следует умножить на $1/2$. Определим функции $f_l(\varphi)$ по формулам (2.7), тогда равенство (2.6) проверяется непосредственной подстановкой. Функции $g_l(\varphi), h_l(\varphi)$ периодичны с периодом T . Коэффициенты Фурье функций $g_l(\varphi/K), h_l(\varphi/K)$ при $l < K/2$ совпадают с коэффициентами Фурье функций

$$\frac{2}{K} \sum_{k=1}^K f(\theta_k) \cos l \theta_k, \quad \frac{2}{K} \sum_{k=1}^K f(\theta_k) \sin l \theta_k$$

где $\theta_k = [\varphi + 2\pi(k-1)]/K$. Следовательно

$$g_l(\varphi) = \frac{2}{K} \sum_{k=1}^K f[\varphi + T(k-1)] \cos l [\varphi + T(k-1)]$$

$$h_l(\varphi) = \frac{2}{K} \sum_{k=1}^K f[\varphi + T(k-1)] \sin l [\varphi + T(k-1)]$$

Если K – четное и $l = K/2$, то в последних равенствах вместо множителя $2/K$ следует считать множитель $1/K$. Из этих равенств следует, что функции $g_l(\varphi), h_l(\varphi)$ удовлетворяют тем же условиям гладкости, что и $f(\varphi)$. Если промежутки непрерывности функции $f(\varphi)$ не меняются при сдвиге на величину T , то они останутся промежутками непрерывности и для функций $g_l(\varphi)$ и $h_l(\varphi)$. Единственность разложений (2.6) и (2.7) (при $l < K/2$) следует из ортогональности в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ системы функций g_0, f_1, \dots, f_{K_1} и функций $g_l \cos l\varphi, h_l \sin l\varphi$.

Лемма доказана.

Представим теперь функции $u_i(\theta, \varphi)$, согласно лемме, в виде

$$u_i(\theta, \varphi) = u_{i0}(\theta, \varphi) + \sum_{k=1}^{K_1} u_{ik}(\theta, \varphi)$$

$$u_{ik}(\theta, \varphi) = v_{ik}(\theta, \varphi) \cos k\varphi + w_{ik}(\theta, \varphi) \sin k\varphi$$

$$i = 1, 2, k = 1, \dots, K_1$$

Функции u_{i0}, v_{ik}, w_{ik} обладают теми же свойствами гладкости, что и функции u_i , и периодичны по переменной φ с периодом T .

Подставляя функции $u_i(\theta, \varphi)$ в уравнения (2.2) и воспользовавшись единственностью разложения (2.6), находим

$$\frac{\partial(\cos \theta q_{\theta}^{ik})}{\partial \theta} + \frac{\partial q_{\varphi}^{ik}}{\partial \varphi} = 2\Lambda \lambda \cos \theta [H_c u_{ik} + \delta_{ik} P_0 \Delta H_i] \quad (2.8)$$

$$q_{\theta}^{ik} = G_0 \frac{\partial u_{ik}}{\partial \theta} + \Delta G_{ik} \frac{\partial P_0}{\partial \theta}, \quad q_{\varphi}^{ik} = \frac{1}{\cos \theta} \left(G_0 \frac{\partial u_{ik}}{\partial \varphi} + \Delta G_{ik} \frac{\partial P_0}{\partial \varphi} \right) - \Lambda \cos \theta (H_c u_{ik} + \delta_{ik} P_0 \Delta H_i), \quad \Delta G_{ik} = H_c^3 u_{ik} + C \Delta H_i \delta_{ik}$$

Здесь $\delta_{ik} = 1$, если $i = 1, k = 1$ или $i = 2, k = 0$, в остальных случаях $\delta_{ik} = 0$.

Далее, подставляя функции (2.7) в (2.3) и (2.4), получаем

$$2K_f \iint_{D_1} u_{11} \cos^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi = -\lambda^2 \Delta \varepsilon_1 \quad (2.9)$$

$$2K_f \iint_{D_1} u_{11} \cos^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi = -\lambda^2 \Delta \varepsilon_2$$

$$2K_f \iint_{D_1} u_{20} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = -\lambda^2 \Delta \varepsilon_3 \quad (2.10)$$

Наконец, из граничных условий (2.5) находим

$$u_{ik}(\pm \theta_0, \varphi) = u_{ik}(\pm \theta_2, \varphi) = 0, \quad u_{ik}(\theta, \varphi + 2\pi) = u_{ik}(\theta, \varphi) \quad (2.11)$$

$$(\mathbf{q}_{ik} \cdot \mathbf{n})_+ = (\mathbf{q}_{ik} \cdot \mathbf{n})_-, \quad \mathbf{q}_{ik} = (q_{\theta}^{ik}, q_{\varphi}^{ik}), \quad i = 1, 2, k = 0, \dots, K_1$$

Таким образом, и экваториальный и осевой спектры распадаются на $K_1 + 1$ группу. Далее будем интересоваться спектром задачи (2.8) – (2.11) при $k = 1, i = 1$ и $k = 0, i = 2$, поскольку остальные собственные числа соответствуют чисто газодинамическим возмущениям (т.е. таким, при которых все $\Delta \varepsilon_i = 0$). Обозначим $u_{11} = y_1, w_{11} = y_2$, тогда $u_{11} = y_1 \cos \varphi + y_2 \sin \varphi$ и система уравнений, описывающих экваториальные возмущения, примет вид

$$\frac{\partial(\cos \theta r_{11})}{\partial \theta} + \frac{\partial r_{21}}{\partial \varphi} + r_{22} = 2\Lambda \lambda \cos \theta (H_c y_1 - P_0 \Delta \varepsilon_1 \cos \theta) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial(\cos \theta r_{12})}{\partial \theta} + \frac{\partial r_{22}}{\partial \varphi} - r_{21} = 2\Lambda \lambda \cos \theta (H_c y_2 - P_0 \Delta \varepsilon_2 \cos \theta)$$

$$K_f \iint_{D_1} y_i \cos^2 \theta d\theta d\varphi = -\lambda^2 \Delta \varepsilon_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.13)$$

$$y_i(\theta_0, \varphi) = y_i(\theta_2, \varphi) = 0, \quad y_i(\theta, \varphi + T) = y_i(\theta, \varphi) \quad (2.14)$$

$$(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n})_+ = (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n})_-, \quad \mathbf{r}_i = (r_{1i}, r_{2i}), \quad i = 1, 2$$

$$r_{1i} = G_0 \frac{\partial y_i}{\partial \theta} + (H_c^3 y_i - C \cos \theta \Delta \epsilon_i) \frac{\partial P_0}{\partial \theta}$$

$$r_{2i} = \frac{1}{\cos \theta} \left[G_0 \left(\frac{\partial y_i}{\partial \varphi} + (-1)^{3-i} y_{3-i} \right) + (H_c^3 y_i - C \cos \theta \Delta \epsilon_i) \frac{\partial P_0}{\partial \varphi} \right] - \Lambda \cos \theta (H_c y_i - P_0 \cos \theta \Delta \epsilon_i)$$

Обозначим $u_{20} = y_3$, $q_\theta^{20} = s_1$, $q_\varphi^{20} = s_2$, тогда система уравнений, описывающих осевые возмущения, будет иметь вид

$$\frac{\partial(\cos \theta s_1)}{\partial \theta} + \frac{\partial s_2}{\partial \varphi} = 2 \Lambda \lambda \cos \theta (H_c y_3 - P_0 \Delta \epsilon_3 \sin \theta) \quad (2.15)$$

$$2K_f \iint_{D_1} y_3 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = -\lambda^2 \Delta \epsilon_3 \quad (2.16)$$

$$y_3(\theta_0, \varphi) = y_3(\theta_2, \varphi) = 0, \quad y_3(\theta, \varphi + T) = y_3(\theta, \varphi) \quad (2.17)$$

$$(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})_+ = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})_-, \quad \mathbf{s} = (s_1, s_2)$$

$$s_1 = G_0 \frac{\partial y_3}{\partial \theta} + (H_c^3 y_3 - C \sin \theta \Delta \epsilon_3) \frac{\partial P_0}{\partial \theta}$$

$$s_2 = \frac{1}{\cos \theta} \left[G_0 \frac{\partial y_3}{\partial \varphi} + (H_c^3 y_3 - C \sin \theta \Delta \epsilon_3) \frac{\partial P_0}{\partial \varphi} \right] - \Lambda \cos \theta (H_c y_3 - P_0 \sin \theta \Delta \epsilon_3)$$

Функция P_0 считается известной и вычисляется заранее при решении статической задачи. В данной работе функция P_0 находилась приближенно методом Ньютона.

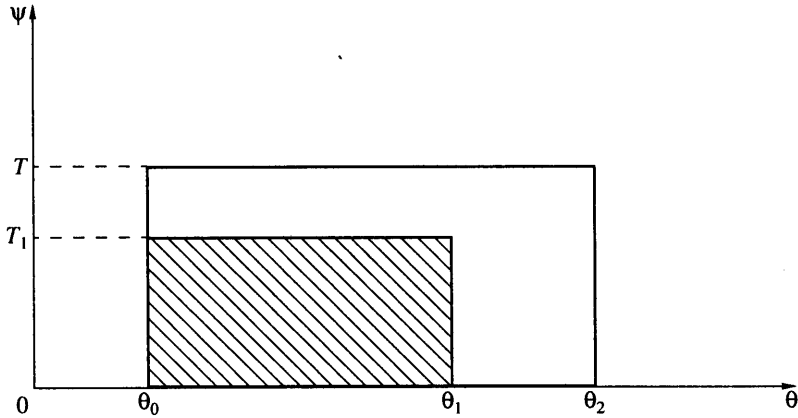
3. Предположим, что канавки сделаны по кривой $\varphi = g(\theta)$. Из разд. 2 следует, что функции y_i достаточно рассматривать в области $D_0 = (g(\theta) \leq \varphi \leq g(\theta) + T)$. Произведем замену переменных $\varphi = \psi + g(\theta)$, $\theta = \theta$. Тогда область D_0 перейдет в прямоугольник $(\theta_0 \leq \theta \leq \theta_2, 0 \leq \psi \leq T)$ (см. фиг. 2, где заштрихована область канавки). Функция $H_c(\theta, \psi)$ будет равна 1 + Δ_0 в заштрихованной части прямоугольника и единице в остальных его точках.

Обозначим $T_1 = \kappa T$. Разобьем отрезок $[0, T_1]$ на M_p частей, а отрезок $[T_1, T]$ на M_g частей, $M = M_p + M_g$. Обозначим через $\alpha_m(\psi)$, $m = 1, \dots, M$, базис сплайнов первой степени, соответствующих разбиению отрезка $[0, T]$ и удовлетворяющих условию периодичности с периодом T . Далее, разобьем отрезок $[\theta_0, \theta_1]$ на N_p частей, а отрезок $[\theta_1, \theta_2]$ на N_g частей, $N = N_p + N_g$. Обозначим через $\gamma_n(\theta)$, $n = 2, \dots, N$, базис сплайнов первой степени, соответствующих разбиению отрезка $[\theta_0, \theta_2]$ и равных нулю на концах этого отрезка. Неизвестные функции y_i будем искать в виде

$$y_i(\theta, \psi) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=2}^N y_{imn} \gamma_m(\theta) \alpha_n(\psi), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

где y_{imn} – неизвестные коэффициенты, используя процедуру метода Бубнова – Галеркина. Размерности алгебраических систем уравнений относительно неизвестных y_{imn} и параметра λ , полученных в результате дискретизации систем (2.12) – (2.14) и (2.15) – (2.17), соответственно равны $2M(N-1) + 4$ и $M(N-1) + 2$. Кроме (3.1) использовалась также аппроксимация

$$y_i(\theta, \psi) = \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{2} y'_{i0n} + \sum_{m=1}^M y'_{imn} \cos mK\psi + y''_{imn} \sin mK\psi \right) \gamma_n(\theta) \quad (3.2)$$



Фиг. 2. Область изменения переменных θ, ψ

Размерности соответствующих алгебраических систем в этом случае равны $2(2M' + 1)(N - 1) + 4$ и $(2M' + 1)(N - 1) + 2$. Собственные числа λ этих систем являются приближенными значениями собственных чисел задач (2.12) – (2.14) и (2.15) – (2.17). Вычислив их, можно найти приближенные значения запасов устойчивости λ' и λ'' . Для нахождения собственных чисел λ алгебраических систем были применены алгоритмы, основанные на QR-методе и методе обратной итерации.

В качестве примера рассмотрим газовую опору со следующими параметрами: $R = 7,5$ мм; $\delta = 2$ мкм; $\Delta_1 = 4$ мкм; $\beta = 30^\circ$; $\kappa = 0,7$; $\theta_0 = 0^\circ$; $\theta_1 = 40^\circ$; $\theta_2 = 65^\circ$; $M_r = 70$ г; $\mu = 2,122 \cdot 10^{-5}$ кг/(м · с); $p_a = 10^5$ Па. Результаты вычислений приведены ниже. В таблице показана зависимость пороговых значений угловых скоростей ω' , ω'' (при которых происходит потеря устойчивости подшипника по экваториальной и осевой форме соответственно) от числа Кнудсена Кп. Вычисления проводились для подшипника с числом канавок $K = 6$. В табл. 2 приводится зависимость пороговой скорости ω'' от числа канавок K при $K_n = 0$. Все результаты получены с использованием аппроксимации (3.2) при $M' = 3$, $N = 20$.

| Кп | ω' , об/мин | ω'' , об/мин |
|-----|--------------------|---------------------|
| 0 | $188,5 \cdot 10^3$ | $166 \cdot 10^3$ |
| 0.1 | $174 \cdot 10^3$ | $183 \cdot 10^3$ |

Заключение. Из таблицы следует, что пороговые скорости данного подшипника довольно высоки. Поэтому различия пороговых скоростей ω' , ω'' при числах Кнудсена $K_n = 0$ и $0,1$, составляющие примерно 15%, не существенны.

Результаты вычислений, приведенные ниже, показывают существенную зависимость устойчивости подшипника от числа канавок K : она резко увеличивается с ростом K .

| | | | | |
|---------------------|------------------|------------------|--------------------|------------------|
| K | 6 | 8 | 10 | 12 |
| ω'' , об/мин | $166 \cdot 10^3$ | $181 \cdot 10^3$ | $193,5 \cdot 10^3$ | $210 \cdot 10^3$ |

Одной из основных целей данной работы является освобождение вычислительного процесса при центральном положении ротора от числа канавок K с возможностью

определять устойчивость подшипника при любом их числе. Однако полностью этой цели не удалось достигнуть, поскольку оказалось, то число разбиений N отрезка $[\theta_0, \theta_2]$ необходимо увеличивать с ростом K для получения нужной точности, но это вполне преодолимо с помощью современных ЭВМ.

Все вычисления в данной работе проводились на ЭВМ серии IBM RS/6000.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ганс. Теория смазки при произвольном числе Кнудсена // Проблемы трения и смазки. 1985. Т. 107. № 3. С. 111–114.
2. Синг, Маланоски. Влияние средней длины свободного пробега молекул на характеристики упорных подшипников со спиральными канавками // Проблемы трения и смазки. 1969. Т. 91. № 1. С. 77–87.
3. Шидловский В.П. Введение в динамику разряженного газа. М.: Наука, 1965. 218 с.
4. Борисов Ю.В., Григорьев Б.С., Коваленко А.Я., Прокулевич Л.А. Влияние эффекта проскальзывания первого порядка на работоспособность сферических газовых подшипников со спиральными канавками // Смазка и трение в судовых машинах. Николаев: НКИ, 1991. С. 32–39.
5. Прокулевич Л.А. Характеристики сферических опор на газовой смазке: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л.: ЛПИ, 1988. 16 с.
6. Шейнберг С.А., Жедь В.П., Шишеев М.Д. и др. Опоры скольжения с газовой смазкой. М.: Машиностроение, 1979. 336 с.

Николаев

Поступила в редакцию
12.И.2000