

УДК 532.5.013.4

© 2001 г. Ю.К. БРАТУХИН, С.О. МАКАРОВ, О.В. ТЕПЛОВА

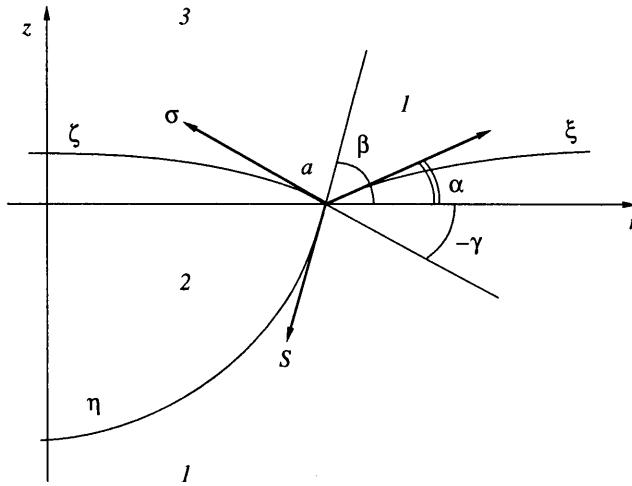
О РАВНОВЕСНЫХ ФОРМАХ И УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАВАЮЩИХ КАПЕЛЬ

Численными и аналитическими методами решена задача (в плоском и трехмерном вариантах) о форме и устойчивости тяжелой капли, удерживаемой на поверхности менее плотной жидкости капиллярными силами.

Системы с линиями контакта трех капиллярных жидкостей стали изучаться сравнительно недавно [1]. По-видимому, первой работой в этом направлении следует считать статью [2], которая, как и многие последующие (например, [3–5]), была посвящена исследованию трехфазных систем в условиях внутренней задачи. Из перечисленных статей наиболее последовательной представляется работа [4], где сформулированы условия равновесия и устойчивости таких систем на основе вариационных принципов. В монографии [6] сделана оценка предельной массы тяжелой капли, удерживаемой на поверхности менее плотной жидкости силами поверхностного натяжения. По причине многопараметричности задачи и для упрощения аналитических и численных расчетов использовалось правило Г.Н. Антонова [7] и предполагалось, что практически всюду верхняя поверхность капли плоская. Для такой постановки получены кривые равновесия в координатах критическая масса – отношение плотностей жидкостей. Из оценки равновесных размеров капель тяжелых и легких масел, плавающих на поверхности воды, получено [8], что пленка масляного пятна на поверхности воды возможна только в том случае, если поверхностное натяжение масла на границе раздела с водой больше разности поверхностных натяжений воды и масла на границе их с воздухом. Следовательно, задача о равновесных конфигурациях системы трех капиллярных жидкостей представляет интерес как метод измерения поверхностного натяжения [9].

В данной статье показано, что в подобного рода задачах, вообще говоря, необходим учет линейного натяжения [9], поскольку молекулы жидкостей на условной линии раздела трех фаз находятся в поле ван-дер-ваальсовских сил притяжения со стороны всех трех жидкостей. Молекулы, которые расположены на поверхностях раздела фаз, взаимодействуют только с двумя жидкостями. Потенциальная энергия этих молекул определяется поверхностным натяжением, потенциальная энергия первых – линейным натяжением. Из-за малости линейное натяжение обычно несущественно и проявляется только в исключительном случае. Именно таким является рассматриваемый пример, в котором определяется предельная масса тяжелой капли в условиях, когда обычные капиллярные силы уже не могут быть уравновешены силой тяжести, и эта малая поправка начинает играть решающую роль.

1. Постановка задачи. Рассмотрена задача о равновесных формах тяжелой капли, помещенной на свободную границу менее плотной жидкости, заполняющей полупространство (условия внешней задачи). Система существенно нелинейных дифференциальных уравнений с краевыми и интегральными условиями для достаточно малых капель решена различными методами при следующих допущениях.



Фиг. 1. Сечение рассматриваемой системы плоскостью $\varphi = 0$

Предполагается, что на поверхности жидкости с плотностью ρ_1 , заполняющей нижнее полупространство (фаза 1), плавает капля другой жидкости плотностью ρ_2 (фаза 2), не смешивающейся при данных условиях с первой. Верхнее полупространство (фаза 3) заполнено невесомым газом. Поверхностные натяжения на границах раздела сред равны σ_{12} , σ_{23} и σ_{13} . Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , направив ось z вверх, вдоль оси аксиальной симметрии капли, против ускорения силы тяжести g . В однородном поле тяжести g линией соприкосновения всех трех фаз должна быть окружность некоторого радиуса a_0 , определяемого массой капли M и всеми остальными параметрами задачи: $g, \rho_1, \rho_2, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}$. Эту окружность будем считать расположенной в плоскости $z = 0$; z -е координаты поверхностей разделов 1 и 3, 1 и 2, 2 и 3 обозначим соответственно ξ, η и ζ (фиг. 1).

Если капля находится в равновесии, то функции ξ, η и ζ удовлетворяют системе уравнений, следующих из требования непрерывности нормальных напряжений при переходе через границу раздела фаз [10] (см. также [6], где приведен подробный вывод, основанный на принципе минимальности энергии системы в равновесном состоянии) и геометрически очевидных условий (фиг. 1)

$$\left[\frac{\xi''}{(1+\xi'^2)^{3/2}} + \frac{\xi'}{r(1+\xi'^2)^{1/2}} \right] - \xi + q_1 = 0 \quad (1.1)$$

$$s \left[\frac{\eta''}{(1+\eta'^2)^{3/2}} + \frac{\eta'}{r(1+\eta'^2)^{1/2}} \right] + (\rho-1)\eta + q_1 - q_2 = 0 \quad (1.2)$$

$$\sigma \left[\frac{\zeta''}{(1+\zeta'^2)^{3/2}} + \frac{\zeta'}{r(1+\zeta'^2)^{1/2}} \right] - \rho\zeta + q_2 = 0 \quad (1.3)$$

$$r=0: \quad \zeta' = \eta' = 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \xi' = \xi'' = 0 \quad (1.4)$$

$$r=a: \quad \xi = \eta = \zeta = 0; \quad \xi' = \operatorname{tg} \alpha; \quad \eta' = \operatorname{tg} \beta; \quad \zeta' = \operatorname{tg} \gamma$$

Здесь штрихами обозначены производные по координате r . Уравнения записаны в безразмерном виде; в качестве единиц длины, давления и массы выбраны соответственно $(\sigma_{13}/\rho_1/g)^{1/2}$, $(\sigma_{13}\rho_1g)^{1/2}$ и $2\pi\rho_2(\sigma_{13}/\rho_1/g)^{3/2}$. Безразмерными параметрами задачи являются: масса капли

$$M = \int_0^a (\zeta - \eta) r dr \quad (1.5)$$

ее плотность $\rho = \rho_2/\rho_1$, коэффициенты поверхностного натяжения капли на границе с воздухом $\sigma = \sigma_{23}/\sigma_{13}$ и с внешней жидкостью $s = \sigma_{12}/\sigma_{13}$, горизонтальный радиус капли $a = a_0/(\sigma_{13}/\rho_1/g)^{1/2}$, постоянные давления в фазах 1 и 2 q_1 и q_2 и три угла смачивания α , β и γ , которые будем отсчитывать от горизонтального направления в плоскости $\varphi = 0$ против часовой стрелки до касательных к меридиональным сечениям капли в точке соприкосновения трех фаз. В соответствии с этим определением для выпуклой поверхности ζ угол $\gamma < 0$, что согласуется с определением знака у производной $\zeta' = \operatorname{tg} \gamma$ на границе $r = a$. Уравнения (1.1) – (1.4) остаются справедливыми при любом соотношении между ρ_1 и ρ_2 .

Поскольку бесконечно большая масса первой жидкости не может быть параметром задачи, достаточно учитывать только постоянство массы капли (1.5).

Кроме того, на линии контакта трех сред должны быть выполнены модифицированные условия Юнга – Неймана [8]. В проекциях на горизонтальное и вертикальное направления эти условия имеют вид

$$\cos \alpha = s \cos \beta + \sigma \cos \gamma + \frac{\tau}{a}, \quad \sin \alpha = s \sin \beta + \sigma \sin \gamma \quad (1.6)$$

Добавка с линейным поверхностным натяжением τ в (1.6), пропорциональная кривизне линии контакта трех фаз $1/a$, для достаточно больших капель может быть отброшена и уравнение вырождается для таких случаев в треугольник Неймана [9].

В рассматриваемом случае тяжелой капли поверхность ξ выпуклая и поднимается над уровнем $z = 0$ ($\xi' > 0$, $\xi'' < 0$). Поэтому q_1 (1.1), которое по физическому смыслу давление на бесконечности во второй среде на уровне $z = 0$, всегда больше нуля. С полной определенностью утверждать то же самое про давление в капле q_2 нельзя из-за присутствия в системе растягивающих каплю капиллярных сил: вывод о знаке q_2 можно сделать только на основе решения всех уравнений равновесия. Знак разности $q_1 - q_2$ в формуле (1.2) априори также неизвестен.

Определим соотношения между углами α , β и γ , а также области изменения σ и s , допускаемые уравнениями (1.6). Как видно из фиг. 1, топологически для тяжелой капли допустимы следующие области изменения углов: $\pi > \alpha > 0$; $\pi > \beta > 0$; $\pi > \gamma > -\pi$. Жидкости, близкие по полярности, смешиваются друг с другом во всех отношениях, поэтому для них $s = 0$ [7]. Для ограниченно растворимых друг в друге взаимно насыщенных жидкостей обычно используется так называемое правило Г.Н. Антонова (1907) $s \equiv 1 - \sigma$. Это правило приближенное и в теории параметры s и σ следует рассматривать как независимые. Учитывая этот факт, можно показать с помощью соответствующих преобразований формул (1.6) в пренебрежении линейным натяжением, что теоретически возможные значения σ и s на плоскости (σ, s) заключены в полосе между лучами, выходящими из точек $(0, 1)$ и $(1, 0)$ под углами $\pm 45^\circ$ к осям σ и s . Однако не все теоретически возможные точки на плоскости (σ, s) могут быть физически реализуемы. Так, в природе нет веществ, для которых $s > 1$, а для тяжелых капель, кроме того, $\sigma < 1$. Поэтому реальная область существования плавающих тяжелых капель ограничена областью $s < 1$; $\sigma < 1$; $s + \sigma > 1$.

2. Приближенное решение задачи. Систему уравнений (1.1) – (1.6) для достаточно малых a можно решить аналитически с помощью разложения в ряд по степеням g .

При этом, естественно, форма ξ останется неопределенной, но давление $q_1 = \xi_\infty$, равное высоте поднятия поверхности на бесконечности ξ_∞ , можно определить из условий баланса действующих на каплю внешних сил. Сумма направленных вверх сил поверхностного натяжения и гидростатического давления, действующего на каплю, должна равняться весу капли

$$2\pi a_0 \sigma_{13} \sin \alpha + 2\pi g \rho_1 \int_0^a (\xi_\infty - \eta) r dr = 2\pi g \rho_2 \int_0^a (\zeta - \eta) r dr$$

(Капиллярные силы, определяемые натяжениями σ_{12} и σ_{23} , являются внутренними и в уравнение равновесия не входят.) В безразмерном виде это условие, заменяющее уравнение (1.1) при решении задачи этим методом, приобретает вид

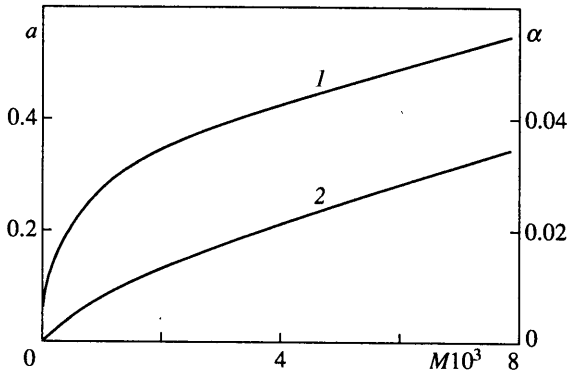
$$2a \sin \alpha + q_1 a^2 + 2 \int_0^a (-\eta) r dr = 2\rho \int_0^a (\zeta - \eta) r dr \quad (1.7)$$

Решение задачи (1.2) – (1.7) будем искать в виде рядов по четным степеням r (коэффициенты при нечетных степенях исчезают из-за инвариантности уравнений равновесия к смене знака), ограничившись пятью первыми членами разложений. (Были проведены вычисления также и с десятью слагаемыми, что, однако, на результаты практически не повлияло.)

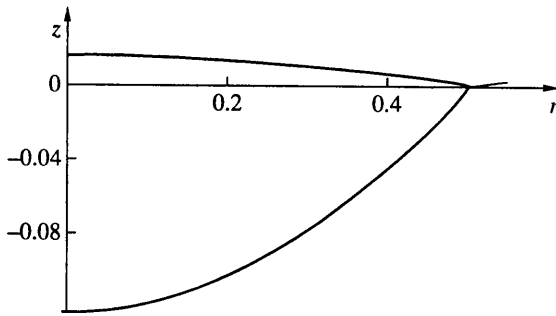
Подставив разложение в уравнения (1.2) – (1.7), для избранных значений угла α вычисляем, варьируя давления q_1 и q_2 , радиус капли a и ее массу M . (Углы смачивания β и γ определяются формулами Юнга – Неймана.) Необходимо отметить, что неизвестные заранее давления в капле q_1 , q_2 , угол α и радиус a определяются всеми пятью независимыми параметрами ρ , σ , s , τ и массой капли M . Однако при счете удобнее фиксировать ρ , σ , s , τ и, например, q_1 , а не массу M , а последнюю определять на завершающем этапе расчетов. Действуя по этой программе, можно построить график зависимости параметров α , a и др. от M , решая таким образом задачу определения зависимости всех неизвестных параметров от массы капли для заданной гетерогенной системы. Расчеты, выполненные для небольших по размеру капель ($a < 0.5$) насыщенного водой анилина, плавающего на поверхности насыщенной анилином воде ($\sigma = 0,9095$, $s = 0,1034$, $\rho = 1,022$, $\tau = 0,000444$), показали, что единственной формой такой капли является двояковыпуклая линза (фиг. 2 и 3).

Параллельный расчет краевой задачи (1.1)–(1.6) методом Рунге – Кутты с помощью аналитического пакета MapleV выявил принципиально важный момент. При использовании классического условия Неймана без учета линейного поверхностного натяжения по мере увеличения массы капли треугольник Неймана поворачивается против часовой стрелки. При этом поверхность ζ может для некоторых из рассмотренных гетерогенных систем из выпуклой превратиться в вогнутую, а давление q_2 при этом, пройдя через нуль для $\zeta = 0$, может стать отрицательным. (Именно так вела себя капля анилина на воде.)

Учет линейного поверхностного натяжения, превращая треугольник Неймана в четырехугольник, делает углы α , β и γ зависимыми от кривизны линии раздела трех фаз, что в свою очередь исключает возможность смены знака у давления q_2 , а поверхность ζ всегда остается выпуклой. Этот результат можно объяснить следующим образом. При увеличении массы капли в соответствии с известными результатами классической задачи о плавающей иголке, смазанной жиром [11], угол α увеличивается. Однако уже при достаточно малом угле α_* давление q_2 в капле обращается в нуль, верхняя поверхность ζ уплощается и капля становится похожей на плосковыпуклую линзу. В результате удерживающие каплю на плаву капиллярные силы оказываются не в состоянии противостоять положительному внешнему давлению q_1 и силам тяжести – капля свертывается в шар и тонет. Эти результаты



Фиг. 2. Зависимость горизонтального радиуса капли a (кривая 1) и угла наклона к горизонту α поверхности внешней жидкости в точке раздела трех фаз (кривая 2) от массы капли M для взаимно насыщенных анилина и воды



Фиг. 3. Равновесная форма капли анилина на поверхности воды. Жидкости взаимно насыщены, $q_1 = 0,01$; $q_2 = 0,2$; $M = 0,00866$. Масштаб по вертикали увеличен

доказывают принципиальную необходимость введения линейного поверхностного натяжения при рассмотрении задач о равновесии малых капель в трехфазных гетерогенных системах.

Задачи о плавающей тяжелой капле и о равновесной форме поверхности жидкости с плавающей на ней засаженной иголкой [11] разительно различаются. Так, для иголки критический угол $\alpha_* > \pi/2$ (внешняя жидкость нависает над иголкой карнизом), в то время как для капель допустимые уравнения углы α_* обычно не превышают десять долей радиана. Кроме того, гантелеобразных в вертикальном направлении капель среди равновесных форм не обнаружено.

3. Постановка и решение плоской задачи. Для выяснения принципиальной возможности появления равновесной формы капли в виде выпукло-вогнутой линзы необходимо иметь точное аналитическое решение краевой задачи. Поскольку в трехмерном случае такого решения не существует, рассмотрим цилиндрическую каплю, плавающую на поверхности менее плотной жидкости. (Вопросы рэлеевской устойчивости таких плавающих жидких цилиндров рассмотрены ниже. Здесь предполагается, что цилиндрические жидкие тела существуют и устойчивы от распада на обычные капли).

Пусть на поверхности жидкости с плотностью ρ_1 , заполняющей нижнее полупространство (фаза 1), плавает цилиндрическая капля другой жидкости плотности ρ_2

(фаза 2) (фиг. 1, которую для плоской задачи нужно рассматривать как нормальное сечение правой половины прямого цилиндрического тела капли, не смешивающейся при данных условиях с первой фазой). Верхнее полупространство заполнено невесомым газом. Поверхностные натяжения на границах раздела сред равны σ_{12} , σ_{23} и σ_{13} . Введем декартову систему координат (r, y, z) , направив ось z вверх, вдоль оси зеркальной симметрии капли, против ускорения силы тяжести g . (Первую декартову координату обозначим, чтобы не менять рисунок, буквой r .) В однородном поле тяжести g линией соприкосновения всех трех фаз должна быть полоса ширины $2a$, определяемая массой капли M на единицу ее длины и всеми остальными параметрами задачи: $g, \rho_1, \rho_2, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}$. Эту полосу будем считать расположенной в плоскости $z = 0$; z -е координаты поверхностей разделов 1 и 3, 1 и 2, 2 и 3 обозначим соответственно ξ, η и ζ .

Перейдем к безразмерным величинам, выбрав в качестве единиц длины, давления и массы на единицу длины соответственно $(\sigma_{13}/\rho_1/g)^{1/2}$, $(\sigma_{13}\rho_1g)^{1/2}$ и $2\rho(\sigma_{13}/\rho_1/g)$. В этих переменных математическая постановка задачи для плоской капли оказывается идентичной рассмотренной выше, если в уравнениях (1.1)–(1.3) в квадратных скобках вычеркнуть вторые слагаемые, которые определяют кривизну капли вдоль оси y . Кроме того, для плоской капли исчезают множитель r в (1.5) и слагаемое с линейным натяжением в уравнениях Неймана (1.6).

Уравнения (1.1)–(1.3) для плоской задачи можно проинтегрировать, представив решение в параметрической форме, содержащей квадратные корни. Такие нерегулярные функции многозначны [12]. Поэтому при выборе знаков у радикалов необходимо учитывать все топологически и физически возможные варианты решения, которые сводятся к следующим требованиям. Для тяжелой капли, плавающей на поверхности более легкой жидкости, краевой угол α и давление q_1 должны быть больше нуля. Полуширина полосы a также всегда положительна. Из физических соображений следует также, что поверхность $\xi = \xi(r)$ должна быть выпуклой и монотонно стремиться к асимптоте $\xi(r \rightarrow \infty) = q_1$. Поверхность $\eta = \eta(r)$ должна быть вогнутой, лежащей ниже уровня $z = 0$. Экстремальная точка $\zeta_* = \zeta(0)$ должна находиться над точкой $\eta_* = \eta(0)$. Углы α, β и γ в принципе могут меняться в следующих пределах: $\pi > \alpha > 0$; $\pi > \beta > 0$; $\pi > \gamma > -\pi$. Знак производной $\eta'(a)$ противоположен знаку проекции плотности капиллярной силы s на горизонтальное направление.

Точные решения уравнений равновесия (1.1)–(1.6) представим в параметрической форме

$$\zeta_{1,2} = \frac{q_2 \mp \sqrt{q_2^2 - 2\rho\sigma(\cos\varphi - \cos\gamma)}}{\rho}, \quad r_\zeta(\varphi) = \mp \sigma \int_0^\varphi \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{q_2^2 - 2\rho\sigma(\cos\varphi - \cos\gamma)}} \quad (3.1)$$

$$\eta = \frac{q_2 - q_1 + \sqrt{(q_2 - q_1)^2 - 2(\rho - 1)s(\cos\varphi - \cos\beta)}}{(\rho - 1)},$$

$$r_\eta(\varphi) = s \int_0^\varphi \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{(q_1 - q_2)^2 - 2(\rho - 1)s(\cos\varphi - \cos\beta)}} \quad (3.2)$$

Верхний (нижний) знак в (3.1) соответствует выпуклой (вогнутой) поверхности ζ , которая формирует в капле положительное (отрицательное) давление q_2 . Поскольку поверхность $\eta = \eta(r)$ вогнутая, то проблемы выбора знаков перед радикалами не возникает. Известное решение уравнения (1.1) для плоской задачи, определяющее форму поверхности $\xi(r)$, выписывать здесь не будем (см. [10]).

Ширина полуполосы a вычисляется по формулам

$$a = \mp \sigma \int_0^{\gamma} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{q_2^2 - 2\rho\sigma(\cos \varphi - \cos \gamma)}} = s \int_0^{\beta} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{(q_1 - q_2)^2 - 2(\rho - 1)s(\cos \varphi - \cos \beta)}}$$

Расчеты, выполненные для капли анилина, плавающей на поверхности воды, показали, что цилиндрическая капля всегда имеет выпуклую внешнюю поверхность $\zeta > 0$, а угол α и ширина полосы a растут с массой капли. Предельное значение угла $\alpha_* \leq 0,013$ рад.: при достижении угла α_* давление q_2 , монотонно уменьшаясь со значения 1,775 при $\alpha = 0,00001$ (практически невесомость), стремится к нулю, при всех значениях параметров оставаясь положительным. Качественно результаты расчетов для трехмерной и плоской задач совпадают. (Количественное совпадение исключено уже из-за разной "размерности" массы в этих задачах). В частности, и в том и в другом случае не обнаружено равновесных форм капель типа выпукло-вогнутой линзы, что позволяет предложить новый метод измерения межфазного натяжения на границе двух несмешивающихся жидкостей. Поскольку непосредственно перед коллапсом капли ее внешняя поверхность становится практически плоской, то, измерив в этот момент краевые углы α , β и γ , можно по предложенным формулам вычислить σ_{12} .

4. Условия устойчивости равновесных состояний капиллярной жидкости. При определении условий устойчивости стационарных состояний часто используется эвристический метод [1], при котором дифференциальные уравнения заменяются определенными интегральными условиями, основанными на принципе минимума потенциальной энергии. При таком подходе к решению уравнение нормальных напряжений исключается из рассмотрения, а искомая форма поверхности раздела фаз постулируется из соображений физической очевидности и математической простоты.

В соответствии с данной методикой для определения критериев устойчивости тяжелой капли, плавающей на поверхности менее плотной жидкости, составим выражения для полной энергии системы и найдем первую и вторую вариации этой энергии при дополнительных условиях постоянства масс обеих жидкостей.

Равновесной формой плавающей капли в невесомости являются слепленные основаниями сферические сегменты, а поверхность $\xi = 0$ [1]. Примем, что формой капли и в земных условиях являются сферические сегменты, а при аппроксимации формы ξ учтем, что при стремлении $r \rightarrow \infty$ поверхность ξ должна быть горизонтальной. Самой простой поверхностью, имеющей асимптоту в форме горизонтальной плоскости, является гиперболоид в форме "воронки", пересекающей поверхность $z = 0$ по линии раздела трех фаз

$$(\zeta - a \operatorname{ctg} \gamma)^2 + r^2 = (a \operatorname{csc} \gamma)^2, \quad (\eta - a \operatorname{ctg} \beta)^2 + r^2 = (a \operatorname{csc} \beta)^2, \quad \xi = a \operatorname{tg} \alpha (1 - ar^{-1}) \quad (4.1)$$

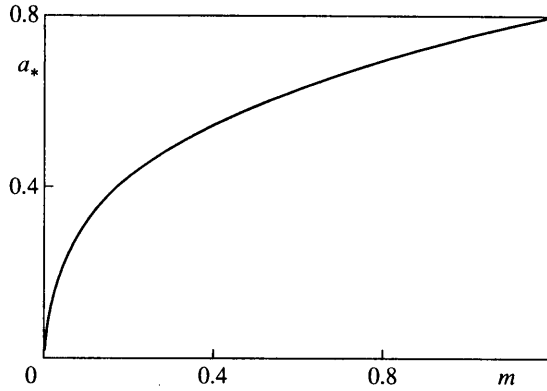
Углы α , β и γ , радиус капли a и ее масса M связаны между собой условиями (1.5) и (1.6)

$$\tau = a(\cos \alpha - s \cos \beta - \sigma \cos \gamma), \quad \alpha = \operatorname{Arcsin}(\sigma \sin \gamma + s \sin \beta) \quad (4.2)$$

$$M = a^3 \left\{ \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{2} + \frac{\operatorname{ctg}^2 \gamma - 1}{3 \sin^3 \gamma} - \frac{\operatorname{ctg} \beta}{2} + \frac{1 - \operatorname{ctg} \beta}{3 \sin^3 \beta} \right\}$$

Полную энергию E системы представим в виде суммы капиллярной и гравитационной частей

$$E = \int_{\xi} dS_{\xi} + \sigma \int_{\varsigma} dS_{\varsigma} + \int_{\eta} dS_{\eta} + \int_1 dV_1 + \rho \int_2 dV_2 + 2\pi a \tau$$



Фиг. 4. Критический радиус плавающей на поверхности воды капли анилина a_* как функция критической массы $m = 2\pi r M_*$ для взаимно насыщенных жидкостей

Первые три интеграла берутся по поверхностям ξ , η и ζ ; два последних – по объемам первой и второй фаз соответственно, слагаемое $2\pi a\tau$ учитывает вклад линейного натяжения. После вычислений интегралов с помощью формул (4.1), получим выражение

$$\begin{aligned}
 E = & 2\pi a\tau + \text{const}_1 + 2\pi \left\{ \frac{a^4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2} \left(\frac{3}{2} - \ln \alpha \right) \right\} + \\
 & + 2\pi a^2 \left\{ -\frac{1}{2 \cos \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{4} \ln \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} + \frac{s}{1 + \cos \beta} + \frac{\sigma}{1 + \cos \gamma} \right\} + \\
 & + \pi(1 - \rho) a^4 \left\{ \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta}{2} + \frac{2}{3} \left(\operatorname{ctg}^4 \beta - \frac{\cos \beta}{\sin^4 \beta} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \beta} \right) \right\} + \\
 & + \pi \rho a^4 \left\{ \frac{\operatorname{ctg}^2 \gamma}{2} + \frac{2}{3} \left(\operatorname{ctg}^4 \gamma - \frac{\cos \gamma}{\sin^4 \gamma} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos^2 \gamma}{1 - \cos^2 \gamma} \right) \right\}
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для равновесия и устойчивости капли необходимо, чтобы энергия была минимальна, а ее вторая вариация $\delta^2 E > 0$ при условии постоянства массы внешней жидкости M_1

$$M_1 = 2\pi \left\{ \int_a^\infty \xi r dr + \int_0^a \eta r dr \right\} = \text{const}_2 + 2\pi a^3 \left\{ \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} + \frac{\operatorname{ctg} \beta}{2} + \frac{\cos^3 \beta - 1}{3 \sin^3 \beta} \right\} \quad (4.4)$$

Несущественные const_1 и const_2 в (4.3) и (4.4) получены в результате подстановки нижних пределов при интегрировании по z . Бесконечная масса внешней жидкости не может служить параметром задачи, поэтому определяют решение только ρ , σ , s , τ и M . Однако требование постоянства M_1 накладывает определенные дополнительные связи на вариации $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ и δa . С учетом этих связей получаем из требований $\delta E = 0$ и $\delta^2 E > 0$ условия для определения критического угла α_* и критической массы капли M_* , начиная с которых капля теряет устойчивость и тонет. Компьютерная реализация этой программы с помощью аналитического пакета Mathematica3.0 представлена на фиг. 4 для капли насыщенного водой анилина, плавающего на поверхности насыщенной анилином воды.

Проведенные расчеты выявили необходимость введения линейного натяжения τ для достаточно малых капель: при игнорировании линейного по a слагаемого в (4.3) угол α для малых капель становился отрицательным. Учет сжимающего каплю линейного натяжения исключал появление этого физически неправдоподобного эффекта выдавливания тяжелой капли из менее плотной жидкости.

Как линейное, так и поверхностное натяжение вводятся по единой схеме и связаны с отступлением от закона Паскаля в объемах жидкостей, непосредственно примыкающих к поверхностям разрыва фаз. Поэтому появление в формулах наряду с поверхностным линейного натяжения не связано с какими-либо дополнительными предположениями, а является формальным следствием записи давления в жидкости в форме Гиббса $p + \sigma\delta(\Gamma)$ через давление в объеме p и "избыточное" давление, выраженное с помощью дельта-функции Дирака $\delta(\Gamma)$ и поверхностное натяжение σ . (Γ – координаты границы раздела фаз).

5. Рэлеевская устойчивость столба жидкости, плавающего на поверхности другой жидкости. В предыдущих параграфах рассматривались вопросы устойчивости тяжелых капель, удерживаемых на плаву силами поверхностного натяжения в менее плотной жидкости. При этом у гетерогенной системы оказывались возможными два равновесных состояния. Одно из них, когда капля плавает подобно смазанной жиром иголке, метастабильно. Другое состояние, соответствующее утонувшей капле, устойчиво. Однако для перехода из метастабильного состояния к устойчивому в системе должна исчезнуть поверхность раздела между второй жидкостью и газом, имеющая малый коэффициент поверхностного натяжения, что до определенных пределов является стабилизирующим фактором, удерживающим каплю на плаву. Заметим, что метастабильное и устойчивое состояния принципиально отличаются друг от друга: в первом в системе имеются три поверхности раздела фаз, во втором – только две. Поэтому переход из одного состояния в другое термодинамически подобен фазовому переходу первого рода.

Для плавающих сильно вытянутых в горизонтальном направлении капель возникает проблема еще и рэлеевской, гофрированной неустойчивости, когда такой жидкий цилиндр распадается на цепочку мелких, круглых в плане капель. Рассмотрим задачу именно о гофрированной неустойчивости цилиндрической капли в условиях невесомости.

Одной из возможных фигур равновесия такой системы является прямой цилиндр, нормальным сечением которого являются сложенные основаниями круговые сегменты (см. два первые уравнения в (4.1)), а поверхность $\xi = 0$. Предположим, что при некоторых значениях параметров системы возможны другие равновесные формы плавающего столба с криволинейной границей раздела трех фаз $a(1 + \Delta\epsilon^2)(1 + \epsilon \cos kz)$. Поскольку в равновесии при малых значениях амплитуды ϵ поверхностная энергия системы не увеличивается, можно получить с учетом условий постоянства объема капли и требований, вытекающих из (1.6), условия, определяющие критическое волновое число k_* , начиная с которого плавающий цилиндр становится неустойчивым по отношению к периодическим вдоль оси z возмущениям

$$a^2 k_*^2 \left(\frac{\sigma\gamma}{\sin^3 \gamma} + \frac{s\beta}{\sin^3 \beta} \right) \leq -4 \left(\frac{\sigma\gamma}{\sin \gamma} + \frac{s\beta}{\sin \beta} \right) \Delta a \quad (5.1)$$

$$4\Theta_0 \Delta a = -\Theta_0 + 2\tau a k^2 \Theta_1 + O[(\tau a k^2)^2]$$

$$\Theta_0 = \frac{\beta - \sin \beta \cos \beta}{\sin^2 \beta} - \frac{\gamma - \sin \gamma \cos \gamma}{\sin^2 \gamma}$$

$$\Theta_1 = 2 \frac{\sin \beta - \beta \cos \beta}{\sin^3 \beta} \operatorname{ctg} \gamma - 2 \frac{\sin \gamma - \gamma \cos \gamma}{\sin^3 \gamma} \operatorname{ctg} \beta$$

Положив в (5.1) $\beta = \gamma = \pi/2$, получаем известный результат: бесконечный круглый столб неустойчив относительно осесимметричных возмущений с длиной волны, превышающей периметр его нормального сечения [13].

Заключение. Путем прямого решения численными и аналитическими методами задачи о форме и устойчивости тяжелых капель (в плоском и трехмерном вариантах), удерживаемых на поверхности менее плотной жидкости капиллярными силами, доказывается необходимость учета линейного натяжения для малых капель и констатируется отсутствие среди равновесных форм гантелеобразных капель и с вогнутой верхней поверхностью.

Авторы благодарят библиографа Л.С. Регирер за тщательную и квалифицированную проверку списка литературы, которая очень помогает в дальнейшей работе над статьями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / Под ред. А.Д. Мышкиса. Киев: Наук. думка, 1992. 592 с.
2. *Hartland S., Burri J.* Das maximale Volumen einer Linse an einer Fluid-Flussung Grenzfläche // Chem. Eng. Journal. 1976. V. 11. № 1. P. 7–17.
3. *Vohra D.K., Hartland S.* Shape of a vertical column of drops approaching an interface // AIChE Journal. 1978. V. 24. № 5. P. 811–817.
4. *Слобожанин Л.А.* О равновесии и устойчивости трех капиллярных жидкостей с общей линией контакта // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 3. С. 170–173.
5. *Финн Р.* Равновесные капиллярные поверхности. М.: Мир, 1989. 310 с.
6. *Братухин Ю.К., Макаров С.О.* Межфазная конвекция. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1994. 327 с.
7. *Воюцкий С.С.* Курс коллоидной химии. М.: Химия, 1975. 512 с.
8. *Братухин Ю.К., Маурин Л.Н.* О равновесных формах капель нефти на воде. Минск, 1982. 10 с. – Леп. в ВИНТИ 29.11.82. № 5909-82.
9. *Русанов А.И., Прохоров В.А.* Межфазная тензиометрия. СПб.: Химия, 1994. 398 с.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
11. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика. М.: Наука, 1975. 551 с.
12. *Арфкен Г.* Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970. 712 с.
13. *Стретт Дж. (Лорд Рэлей)* Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 476 с.

Пермь

Поступила в редакцию
3.III.2000