

УДК 532.5.013.4:536.25

© 2001 г. Г.В. ЛЕВИНА, А.В. ФИРУЛЕВ, Л.В. ШЕСТАКОВА

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ СПИРАЛЬНО-ВИХРЕВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОДОГРЕВАЕМОМ СНИЗУ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

Численно моделируется крупномасштабная спирально-вихревая неустойчивость в режимах ламинарной конвекции. Моделирование осуществляется на основе нелинейных уравнений Буссинеска, дополненных внешней силой специального вида, структура которой совпадает с тензорной структурой генерационного слагаемого в уравнении гидродинамического альфа-эффекта. С помощью внешней силы имитируется осредненный эффект, создаваемый мелко-масштабной спиральной турбулентностью, – генерация положительной обратной связи между тороидальным и полоидальным компонентами векторного поля скорости. Исследуются структура и энергетика спирально-вихревых течений, реализующихся в конвективно-неустойчивой среде. Сравниваются характеристики спиральных и неспиральных конвективных режимов. Обсуждаются новые эффекты, вызываемые действием спиральной обратной связи: генерация тороидального поля скорости в типичных для обычной конвекции структурах с полоидальной циркуляцией; укрупнение горизонтального масштаба надкритических движений, происходящее путем слияния вихревых ячеек и сопровождающееся заметным увеличением интенсивности циркуляции в образующихся более крупных спиральных вихрях; качественные изменения в энергетических процессах.

В современных исследованиях по гидродинамике электропроводящих и непроводящих сред заметны активные усилия ученых, направленные на поиск и изучение неустойчивостей, приводящих к образованию крупномасштабных структур на фоне развитой мелко-масштабной турбулентности. Примеры существования подобных структур хорошо известны в астро- и геофизике: магнитные поля космических объектов, движения в конвективных зонах Солнца и звезд, атмосферах планет. К настоящему времени уже открыт целый ряд физических механизмов, ответственных за возбуждение крупномасштабной неустойчивости в турбулентных средах. Первым из них был найден альфа-эффект в магнитной гидродинамике [1], основанный на особых генерационных свойствах спиральной турбулентности, которая при определенных условиях способна подавлять поток энергии в малые масштабы и обеспечивать передачу энергии от мелко-масштабной турбулентности к крупномасштабным структурам. Возможность существования аналогичного явления в электрически непроводящих средах – гидродинамического альфа-эффекта – впервые была теоретически обоснована для сжимаемой [2] и позже для несжимаемой жидкости [3].

Математическая модель в [2] содержала новую гидродинамическую неустойчивость, обусловленную положительной обратной связью между тороидальным и полоидальным компонентами векторного поля скорости. На основе этой модели в [4] был предложен физический механизм усиления крупномасштабных вихревых возмущений в атмосфере за счет энергии мелко-масштабной спиральной турбулентности, что послужило отправным пунктом для развития концепции турбулентного вихревого динамо в гидродинамике непроводящих сред. Применение теоретических решений модели [2] для анализа наблюдаемых природных явлений позволило получить реали-

стичные оценки для параметров вихревых образований тайфунного типа в тропической атмосфере Земли [4] и с большой точностью описать эволюцию и параметры возмущений в атмосфере Юпитера, вызванных падением осколков кометы Шумейкер – Леви 9 [5, 6]. В обоих случаях предполагалось, что источником энергии для крупномасштабных движений служит интенсивная мелкомасштабная атмосферная конвекция, а отличная от нуля средняя спиральность поля скорости на мелких масштабах генерируется при этом благодаря воздействию силы Кориолиса на циркуляцию в конвективных ячейках. Однако такое предположение при интерпретации теоретических решений [2] могло привлекаться лишь в роли качественной гипотезы, поскольку сам процесс конвекции в рамках модели [2] не рассматривался.

Подробному обсуждению работ, связанных с изучением гидродинамического альфа-эффекта ( $H\alpha$ -эффекта) в конвективной системе, посвящен специальный обзор [7], отражающий состояние исследований этого направления к середине 1999 г. Важнейшими теоретическими достижениями последних лет явились работы [8, 9], в которых с позиций двух совершенно независимых и различных подходов к построению модели турбулентного вихревого динамо показано, что концепция спиральности турбулентности параметризует совместное влияние силы Кориолиса и неоднородности градиента температуры, создаваемой, например, внутренним тепловыделением в процессе конденсации водяного пара. Именно учет этой дополнительной энергии фазового перехода влаги является необходимым условием для достижения ненулевого динамо-эффекта. Таким образом, процесс свободной конвекции в указанных выше условиях оказывается эффективным механизмом генерации спиральности турбулентности на мелких масштабах, что позволяет рассматривать  $H\alpha$ -эффект в конвективной системе как реальный источник возбуждения крупномасштабной неустойчивости нового типа.

**1. Постановка задачи для численного моделирования спирально-вихревой неустойчивости в условиях ламинарной конвекции.** Математическая модель  $H\alpha$ -эффекта в конвективно-неустойчивой среде [7], полученная методом статистического осреднения [3, 8], представляет собой систему динамических линейных уравнений для трех крупномасштабных мод: поля температуры и двух соленоидальных полей скорости, взаимодействующих через посредство двух положительных обратных связей. Одна из них действует между полоидальным компонентом поля скорости и полем температурного возмущения, и приводит к обычной конвективной неустойчивости. Вторая, обязанная своим появлением генерационному слагаемому ( $\alpha$ -члену), моделирующему осредненное влияние мелкомасштабной спиральной турбулентности, связывает соленоидальные компоненты поля скорости, возбуждая новую крупномасштабную неустойчивость – спирально-вихревую [7].

Принципиальным отличием уравнений [3, 7, 8] для среднего поля от модели обычной конвекции [10, 11] является присутствие генерационного  $\alpha$ -члена, который содержит выражения с антисимметричным тензором Леви – Чивита  $\epsilon_{ijk}$  ответственные за создание спиральной структуры крупномасштабного поля скорости. Действительно, псевдоскалярная величина  $\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}$ , называемая плотностью спиральности поля скорости  $\mathbf{v}$  [12], в тензорных обозначениях может быть записана

$$\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial(v_i v_j)}{\partial x_k}$$

Как показали теоретические исследования свойств спиральной турбулентности в гидродинамике электропроводящих и непроводящих сред, именно слагаемые такого вида обеспечивают возбуждение крупномасштабной неустойчивости.

Анализ результатов теоретических и экспериментальных исследований, проведенный в обзоре [7], показал, какие факторы и условия являются необходимыми для реализации гидродинамического альфа-эффекта в конвективной системе, и выявил те специфические моменты в концепции турбулентного вихревого динамо, для проясне-

ния которых наиболее эффективным является численный эксперимент. Прежде всего это вопросы о том, как и под действием каких факторов происходит генерация спиральности на мелких масштабах, как осуществляется процесс накопления мелко-масштабной спиральности и чем определяется ее уровень, необходимый для возникновения крупномасштабной неустойчивости, как реализуются взаимодействия движений разного масштаба и передача энергии от мелкомасштабной турбулентности к крупномасштабным структурам. Для получения ответов на поставленные вопросы необходимо осуществить прямое численное моделирование развитой турбулентной конвекции во вращающейся жидкости, сохраняя при этом все три компонента вектора скорости (чтобы обеспечить  $\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$ ) и имея высокое разрешение конечно-разностной сетки на мелких масштабах, с одной стороны, а с другой – большое соотношение горизонтального и вертикального масштабов (порядка 10 : 1), чтобы показать эффект укрупнения горизонтального размера образующихся спирально-вихревых структур по сравнению с типичным масштабом ячеек в конвекции Рэлея – Бенара.

Решение задачи в такой постановке представляет собой сложную проблему для численной реализации и требует многочасовых расчетов на самых мощных современных суперкомпьютерах. К настоящему времени попытки предпринять подобные расчеты авторам не известны. Применяемый ниже подход позволяет численно смоделировать важнейший осредненный эффект турбулентного вихревого динамо – действие обратной связи между тороидальным и полоидальным компонентами скорости, возбуждающее в системе крупномасштабную спирально-вихревую неустойчивость и приводящее к совершенно новым и не типичным для обычной конвекции явлениям. Для численной реализации в этом случае оказываются достаточными ресурсы очень простой вычислительной техники типа PC Pentium.

Все рассмотренные в [7] теоретические модели  $N\alpha$ -эффекта в конвективно-неустойчивой жидкости включают линейные уравнения для среднего поля скорости и имеют экспоненциально растущие решения. Поскольку в рамках процедуры статистического осреднения, примененной для вывода этих уравнений, остается до сих пор не решенным вопрос о получении нелинейных членов, способных ограничить нарастание неустойчивости и обеспечить реализацию некоторого установившегося режима, использовать такие модели для проведения конечно-разностных расчетов не представляется возможным. Поэтому для численного моделирования спирально-вихревой неустойчивости в конвективной системе предлагается следующий подход [13].

Рассматривается пространственное течение несжимаемой жидкости в подогреваемом снизу горизонтальном слое, описываемое нелинейными уравнениями Буссинеска [11]. Уравнение движения дополняется слагаемым [7, 13], которое по своему физическому смыслу является силой, создающей положительную обратную связь – "спиральную" – между соленоидальными компонентами поля скорости. Структура этой модельной внешней силы  $\mathbf{f}$  полностью идентична тензорной структуре генерационного слагаемого в уравнении  $N\alpha$ -эффекта [7], а безразмерный параметр  $S$  характеризует интенсивность спиральной обратной связи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{\operatorname{Pr}} (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} &= - \nabla p + \Delta \mathbf{V} + \operatorname{Ra} T \mathbf{e} + S \mathbf{f} \\ \operatorname{Pr} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla T &= \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{e}(\operatorname{rot} \mathbf{V})_z - \frac{\partial \{\mathbf{eV}\}}{\partial z}, \quad \mathbf{e} = \{0, 0, 1\}$$

$$\operatorname{Ra} = \frac{g\beta(T_1 - T_2)h^3}{\nu\chi}, \quad \operatorname{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$$

Здесь  $V$  – скорость,  $p$  – давление,  $T$  – температура,  $e$  – единичный вектор, направленный вертикально вверх,  $Ra$  и  $Pr$  – числа Рэлея и Прандтля,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $(T_1 - T_2)$  – характерная разность температур между горизонтальными границами слоя,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения жидкости,  $\nu$  и  $\chi$  – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности,  $h$  – высота слоя жидкости. В качестве единиц измерения длины, времени и температуры выбраны соответственно  $h$ ,  $h^2/\nu$  и  $(T_1 - T_2)$ . В выражении для силы  $f$  квадратные скобки во втором слагаемом обозначают векторное произведение.

Введенная таким образом внешняя сила играет роль независимого фактора, не связанного с процессом конвекции. Подобная постановка задачи позволяет рассмотреть влияние спиральной обратной связи на подробно изученные режимы ламинарной конвекции [11]. При этом обнаруживается целый ряд качественно новых эффектов в структуре и энергетике течения.

С учетом предсказанной теорией [7] возможности существования в рамках модели (1.1) надкритических движений в форме структур с горизонтальным масштабом, существенно превосходящим высоту слоя жидкости, исследуемая область течения выбирается в виде протяженного по горизонтали слоя.

Наиболее простая математическая формулировка задачи, позволяющая исследовать новые спирально-вихревые эффекты, достигается при рассмотрении течения жидкости в цилиндрической области с осевой симметрией. В этом случае сохраняются все три компонента вектора скорости, обеспечивая ненулевую спиральность, но все физические поля становятся зависящими только от двух пространственных переменных.

Таким образом, геометрия расчетной области задается в виде "шайбы" – цилиндра, радиус которого значительно превосходит высоту (10:1). Для описания движения вводится система цилиндрических координат  $(r, \varphi, z)$ . При численном моделировании рассмотрение ограничивается осесимметричными движениями ( $\partial/\partial\varphi = 0$ ), но уравнение для азимутальной скорости  $v$  сохраняется. Из уравнений исключается давление с помощью введения функции тока  $\Psi$  и вихря скорости  $\omega$

$$u = -\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi), \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}$$

После выполнения указанных выше преобразований система (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + u\frac{\partial\omega}{\partial r} + w\frac{\partial\omega}{\partial z} - \frac{u\omega}{r} - \frac{2v}{r}\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} - \frac{\omega}{r^2} -$$

$$-Ra\frac{\partial T}{\partial r} - S\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(vr)\right) - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} - S\frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial r} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{\Psi}{r^2} = -\omega$$

Во всех расчетах  $Pr = 1$ .

Математическая модель (1.2) включает три эволюционных уравнения и уравнение Пуассона для функции тока. Из скоростных переменных  $v$  характеризует торои-

дальное поле (горизонтальная циркуляция), а величинами  $\Psi$  и  $\omega$  описывается полоидальное поле (вертикальная циркуляция). При  $S = 0$  и числах Рэлея ниже некоторого критического:  $Ra < Ra^{cr}$ , система (1.2) имеет решение

$$\Psi_0 = \omega_0 = v_0 = 0, \quad T_0 = 1 - z$$

описывающее основное состояние, которому соответствует механическое равновесие подогреваемого снизу слоя жидкости в поле силы тяжести.

При численном решении системы (1.2) все ограничивающие поверхности считались твердыми непроницаемыми стенками, на которых для компонентов скорости задавались условия прилипания. Значения температуры на торцах цилиндра соответствовали подогреву снизу, а на боковой поверхности ставилось условие отсутствия теплового потока.

При условии осевой симметрии  $\partial/\partial\phi = 0$  расчетная область представляла собой прямоугольник со сторонами  $R$  и  $h$ . Разбиение области конечно-разностной сеткой, варьировавшееся в широких пределах при проведении методических расчетов, для получения основных результатов было выбрано  $100 \times 20$  вдоль радиуса и высоты соответственно.

При решении поставленной задачи использовалась явная конечно-разностная схема с центральными разностями. Уравнение Пуассона для функции тока решалось методом последовательной верхней релаксации. Решение задачи получалось методом установления. Более подробное описание процедуры вычислений содержится в [14].

Принимая во внимание основную идею в концепции турбулентного вихревого динамо о передаче энергии от мелкомасштабной турбулентности к крупномасштабным структурам, следует ожидать, что заданная внешняя сила  $\mathbf{f}$  в случае  $S \neq 0$  будет обеспечивать накачку дополнительной энергии в конвективную систему. В связи с этим особое место необходимо отвести анализу энергетических процессов, сопровождающих формирование спиральных конвективных течений. Для проведения количественного анализа в численных экспериментах определялись полная кинетическая энергия движения  $E_k$  и потенциальная энергия  $E_p^\Theta$ , связанная только с возмущениями температуры

$$E_k = \frac{1}{2} \int_{\Omega} V^2 d\Omega, \quad E_p^\Theta = -Ra \int_0^h \int_F \Theta z dz dF \quad (1.3)$$

где величина температурного возмущения  $\Theta$  определяется как отклонение от линейного профиля температуры при данном  $Ra$ .

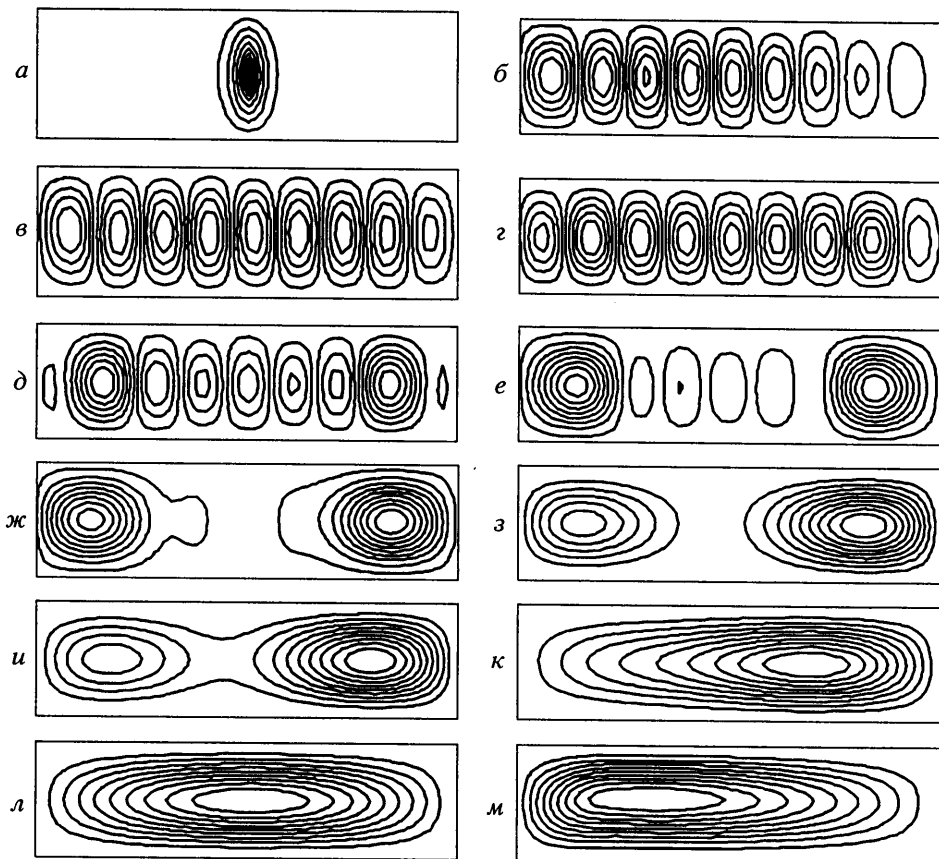
Кроме того, при изучении динамических эффектов, создаваемых спиральной обратной связью, удобно иметь отдельные оценки для кинетической энергии полоидального и тороидального полей скорости

$$E_k^P = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^2 + w^2) d\Omega, \quad E_k^T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 d\Omega \quad (1.4)$$

Характеристикой, представляющей принципиальный интерес в теории  $N\alpha$ -эффекта, является также квадратичная по скорости величина [12]

$$S_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{V} \text{rot } \mathbf{V} d\Omega \quad (1.5)$$

Эта величина описывает движение с зацепленными линиями тока горизонтальной и вертикальной циркуляции и может быть названа полной спиральностью течения в расчетной области. Знак псевдоскалярной величины  $S_{\Omega}$  зависит от направления циркуляции в образующихся вихревых структурах. Полная спиральность равна нулю для обычных конвективных движений с вертикальной циркуляцией, создаваемой только одним полоидальным полем скорости, и должна становиться отличной от нуля



Фиг. 1. Изолинии функции тока вертикальной циркуляции в процессе формирования крупномасштабной структуры в моменты времени  $t = 0,001$  (а); 3 (б); 10 (в); 10,2 (г); 10,3 (д); 10,4 (е); 10,5 (ж); 10,8 (з); 11 (и); 12 (к); 15 (л); 40 (м)

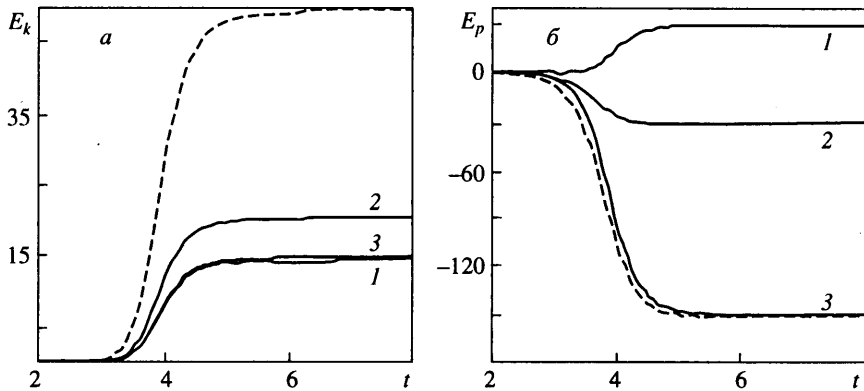
при возбуждении спирально-вихревой неустойчивости, когда также генерируется и тороидальное поле (горизонтальная циркуляция).

С целью получения дополнительной информации о плотности распределения интегральных характеристик по пространству в [7, 14] было предложено разбивать область течения на три горизонтальных подслоя равной толщины. При индексации обозначений отсчет подслоев ведется от нижней границы слоя ( $E_{k1}$ ,  $E_{p2}$ ,  $S_{\Omega3}$ ), отсутствие цифры в индексе соответствует полному значению величины для всей области течения. Помимо рассмотренных выше интегральных величин определялись максимальные и минимальные по внутренним узлам расчетной области значения всех физических переменных задачи.

**2. Обсуждение результатов.** Начнем с данных о структуре и энергетике обычных конвективных режимов при  $S = 0$ , реализующихся в рамках выбранной постановки задачи.

Порог возникновения конвекции для цилиндрического слоя с выбранным отношением  $R:h = 10 : 1$   $Ra^{cr} \approx 1724$ , был близко к значению для бесконечного горизонтального слоя с твердыми границами  $Ra^{cr} \approx 1708$  [11].

При  $S = 0$ ,  $Ra = 2000$  эволюция конвективной неустойчивости (фиг. 1, а–в), инициировавшейся с помощью задания в начальный момент времени  $t = 0$  точечного



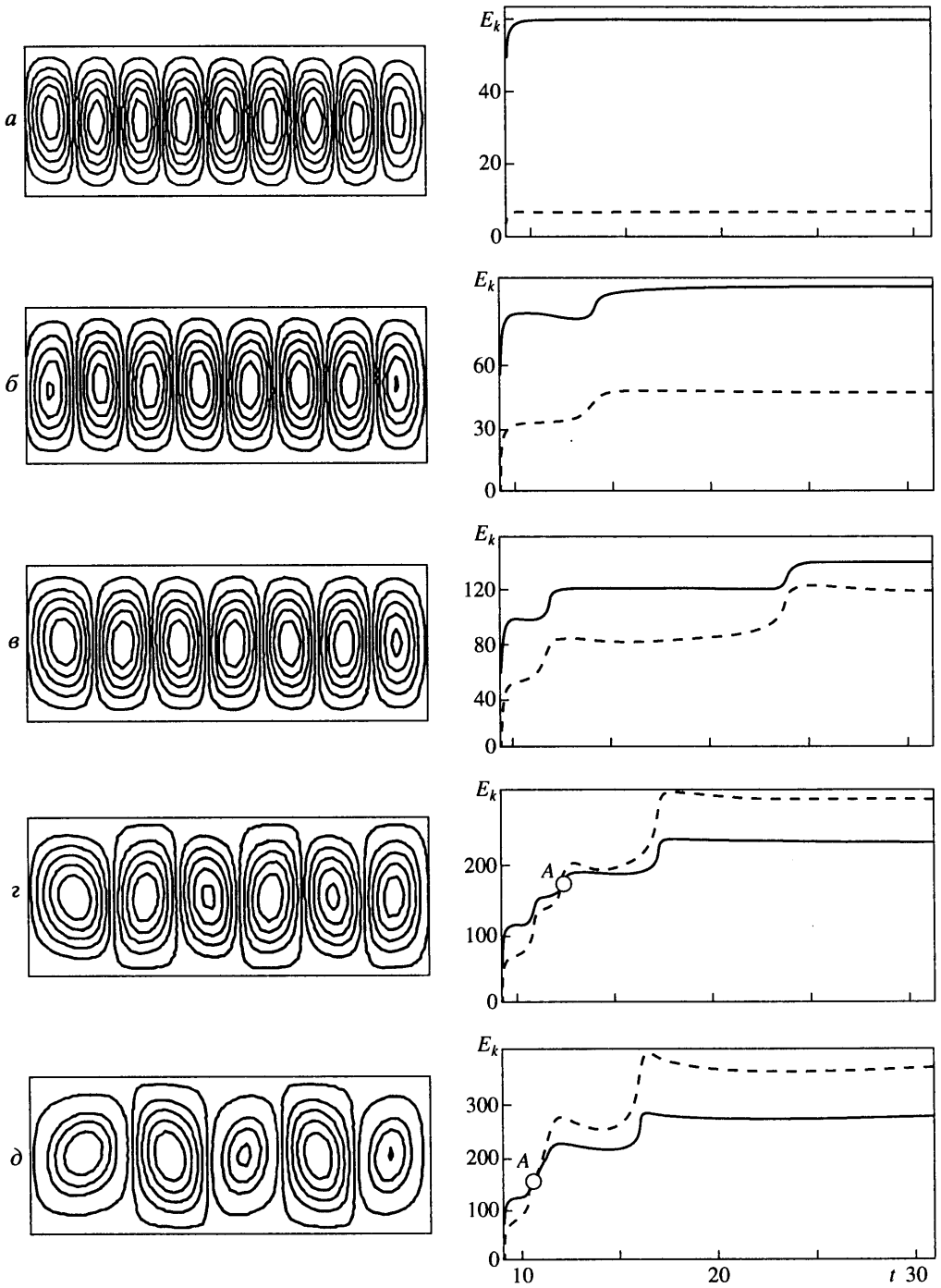
Фиг. 2. Эволюция кинетической  $E_k$  (а) и потенциальной  $E_p$  (б) энергии в процессе установления стационарного конвективного режима при  $Ra = 2000$ ,  $S = 0$ ,  $E_k, E_p$  – штриховые линии,  $E_{ki}, E_{pi}$  – линии  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ )

вихря  $\omega \neq 0$  в центре расчетной области, приводила в течение 10 единиц безразмерного времени к полностью установившемуся стационарному режиму (фиг. 1, в).

На начальном этапе, продолжительность которого из сопоставления фиг. 1 и 2 можно определить в интервале  $0 < t \leq 3,0$ , имеют место переходные процессы и начинается образование обычной для конвекции системы ячеек с вертикальной циркуляцией. Кинетическая и потенциальная энергии движений на этом отрезке времени очень малы. Примерно с момента  $t \approx 3,0-3,5$ , к которому происходит окончательное установление числа элементов в общей структуре течения, наблюдается резкое возрастание энергии. В момент значительного увеличения интенсивности возмущения, отмеченный началом резкого роста кинетической энергии  $E_k$  при  $t \approx 3,5$ , потенциальная энергия в нижнем подслое  $E_{p1}$  становится положительной. Согласно (1.3), это означает, что нижний подслой оказывается заполненным относительно более холодной жидкостью по сравнению с линейным распределением. С момента  $t \approx 4,5$  становится заметным стабилизирующее влияние нелинейных членов в уравнениях и начинается установление стационарного режима конвекции, которое к  $t \approx 6,0$  оказывается практически законченным.

В рассматриваемой цилиндрической области стационарные конвективные движения представляют собой аксиально-симметричные кольцевые валы. В проекции на расчетную область, лежащую в плоскости  $(r, z)$ , эти движения выглядят как система ячеек с чередующимся от структуры к структуре направлением вертикальной циркуляции (полоидального поля) (фиг. 1, в). В этом естественном конвективном течении горизонтальная циркуляция (тороидальное поле) отсутствует и генерации спиральности не происходит –  $S_\Omega = 0$ . Число ячеек вдоль радиуса оказывается равным 9, а типичный горизонтальный масштаб структуры сравним с высотой слоя [11].

Остановимся на характерных особенностях распределения энергии в данном случае (фиг. 2), когда единственным источником энергии в системе является подогрев слоя. Часть подводимой тепловой энергии преобразуется в кинетическую энергию конвективных движений, а оставшаяся часть рассеивается за счет диссипации. Максимальное значение кинетической энергии достигается в среднем подслое  $E_{k2} \approx 20$ , тогда как в нижнем и верхнем подслоях интенсивность движения ослабляется влиянием границ и значения энергии в них приблизительно одинаковы:  $E_{k1} \approx E_{k3} \approx 15 \approx 3/4 E_{k2}$ . Значения потенциальной энергии в нижнем и среднем подслоях примерно одинаковы по величине и противоположны по знаку ( $E_{p1} \approx E_{p2} \approx 30$ ), что в несколько раз меньше значения в верхнем подслое ( $E_{p3} \approx -150$ ). В данном случае полное значение потенциаль-



Фиг. 3. Стационарные спирально-конвективные режимы при  $Ra = 2000$  и  $S = 3$  (а); 5 (б); 5,75 (в); 6,25 (г); 6,5 (д): картины течения (слева) и изменение интенсивностей полоидального  $E_k^P$  (сплошная) и тороидального поля  $E_k^T$  (штриховая) в процессе установления (справа)



ной энергии по абсолютной величине в 3 раза превосходит величину кинетической ( $E_p \approx -150$ ,  $E_k \approx 50$ ), вклад в которую при отсутствии тороидальной циркуляции  $E_k^T = 0$  дает только полоидальное поле  $E_k = E_k^P$ .

Для исследования эффектов, вызываемых действием спиральной обратной связи, задавалось  $S \neq 0$  при  $t = 10$ . Это означает, что все физические поля окончательно сформировавшегося стационарного конвективного режима (с 9 ячейками полоидальной циркуляции), рассчитанные для  $S = 0$ , используются в качестве начальных распределений и спиральная обратная связь возбуждается в условиях развитой конвективной неустойчивости. При варьировании параметров  $Ra$  и  $S$  удалось получить несколько стационарных режимов, в которых структура течения в слое содержала от 1 до 9 спиральных вихревых ячеек (фиг. 1 и 3). При этом увеличение параметра  $S$  при фиксированном  $Ra$  приводило к уменьшению числа ячеек и одновременно к увеличению горизонтального размера каждой из них (фиг. 3).

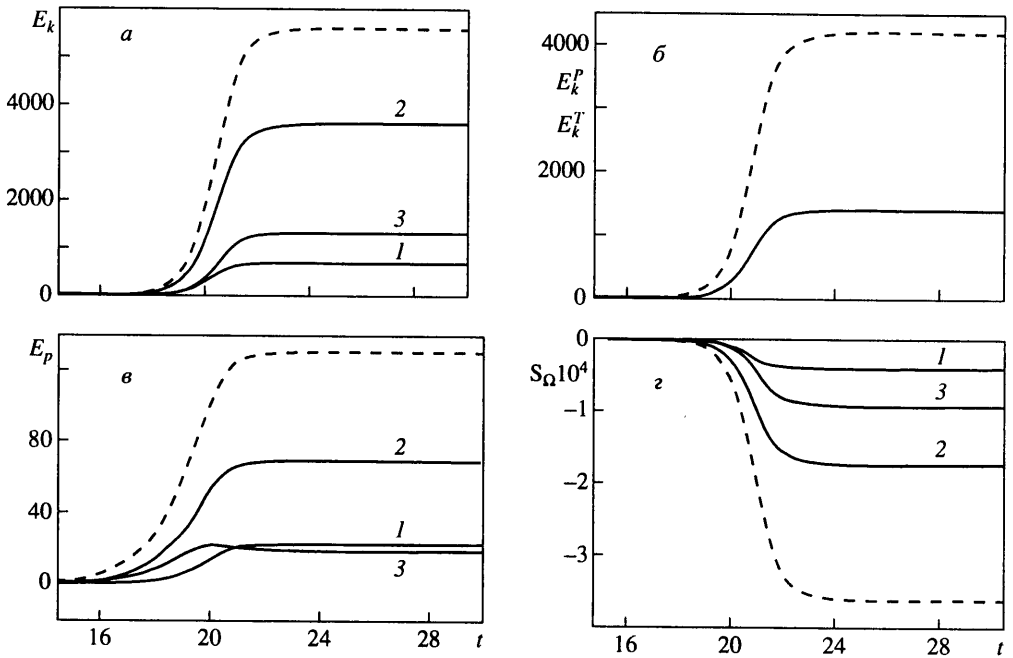
Поля скоростных функций в процессе установления стационарного режима имеют во многом схожую структуру, что позволяет выбрать для подробного обсуждения какое-либо одно из них, например поле функции тока  $\Psi$  вертикальной циркуляции (фиг. 1 и 3, левая часть).

На фиг. 3 слева представлены картины течения при  $t = 30$  для пяти стационарных спирально-конвективных режимов, развившихся при фиксированном  $Ra = 2000$  из обычного конвективного движения (фиг. 1,  $\theta$ ) под действием спиральной обратной связи, интенсивность которой последовательно увеличивалась. Справа показано изменение со временем (от момента включения  $S \neq 0$ ) интенсивностей полоидальной  $E_k^P$  и тороидальной  $E_k^T$  циркуляции в процессе установления ( $10 \leq t \leq 30$ ) соответствующего спирального режима конвекции. При прослеживании эволюции каждого из рассматриваемых режимов было обнаружено, что укрупнение горизонтального масштаба структур осуществляется путем слияния вихревых ячеек (см., например, фиг. 1,  $z-k$ ) и сопровождается увеличением интенсивности движения в образующихся в результате слияния более крупных вихрях. Моментам слияния ячеек соответствуют изломы в сторону больших значений на графиках энергии  $E_k^P$ ,  $E_k^T$  (фиг. 3).

Структура течения с характерным масштабом ячеек, типичным для обычной конвекции, сохраняется в слое вплоть до некоторого значения  $S^* \approx 3,9$ . При  $S \leq S^*$  интенсивность тороидального поля скорости, генерирующегося сразу после задания  $S \neq 0$  при сколь угодно малых  $S$ , существенно ниже интенсивности полоидальной циркуляции и, например, для  $S^* \approx 3,9$ :  $E_k^T \approx 15$ ,  $E_k^P \approx 65$ . Значение  $S^*$  при заданном  $Ra$  отмечает собой пороговую интенсивность спиральной обратной связи, при превышении которой в системе обнаруживается качественно новый физический эффект — слияние вихревых ячеек. Для  $S > S^*$  одновременно с укрупнением горизонтального масштаба спиральных вихрей опережающими темпами происходит нарастание интенсивности тороидального поля, на которое эффекты слияния вихрей, очевидно, оказывают большее влияние. Так, при  $S = 6,25$  интенсивность азимутального движения уже превосходит интенсивность полоидальной циркуляции:  $E_k^T \approx 290$ ,  $E_k^P \approx 225$ . Точки на графиках (фиг. 3,  $z$ ,  $\delta$ ), в которых энергия тороидального поля "догоняет" энергию полоидального, продолжая более интенсивный рост, отмечены буквой А.

Продемонстрируем крупномасштабную неустойчивость на фоне затухающего конвективного движения путем понижения  $Ra$  при заданном  $S$ . С этой целью в момент времени  $t = 10$  одновременно с заданием  $S = 6,5$  число Рэлея понижалось до  $Ra = 410$ .

Первым признаком действия спиральной обратной связи служит появление в системе горизонтальной циркуляции. Генерация тороидального поля скорости, отсутствовавшего ( $E_k^T = 0$ ) в процессе развития конвективной неустойчивости, обнаружи-



Фиг. 4. Эволюция энергетических характеристик  $E_k$ ,  $E_k^T$ ,  $E_k^P$ ,  $E_p$  (а-в) и спиральности  $S_\Omega$  (з) в процессе установления стационарного крупномасштабного спирально-конвективного режима при  $Ra = 410$ ,  $S = 6,5$ ; а, в, з – кривые  $i$  ( $i = 1-3$ ) соответствуют значениям характеристик в  $i$  слое, штриховые линии – суммарные характеристики; б – сплошная линия  $E_k^P$  штриховая  $E_k^T$

вается ( $E_k^T \neq 0$ ) сразу после включения  $S \neq 0$  при  $t > 10$ . Картины изолиний азимутальной скорости оказываются аналогичными по структуре соответствующим распределениям функции тока, поскольку поле тороидальной циркуляции, генерируемое из полоидального поля (фиг. 1), также меняет свое направление от ячейки к ячейке. С появлением азимутальной составляющей скорости полная спиральность течения  $S_\Omega$  (1.5) становится отличной от нуля и, подобно кинетической энергии  $E_k$ , оказывается знакопостоянной величиной во всей расчетной области – фиг. 4, з.

Под действием спиральной обратной связи начинается процесс слияния ячеек. Усиление интенсивности движения происходит во второй и восьмой ячейках (фиг. 1, з), имеющих одинаковый знак полоидальной циркуляции и, соответственно, азимутального поля, которое оказывается скоррелированным по направлению с азимутальным полем в формирующейся крупномасштабной вихревой структуре. Движения в первой слева (приосевой) и девятой (прилежащей к боковой поверхности цилиндра) ячейках подавляются, и эти ячейки объединяются соответственно со второй и восьмой. Движения в двух, образовавшихся после слияния структурах, значительно интенсивнее, чем в оставшихся между ними промежуточных ячейках (фиг. 1, д).

К моменту  $t = 10,5$  происходит распад всех промежуточных ячеек, а две, оставшиеся и имеющие одинаковое направление азимутального поля, продолжают увеличивать свою интенсивность. Далее, примерно за 1,5 единицы безразмерного времени периферийная ячейка усиливается и поглощает внутреннюю, и к моменту  $t = 12$  происходит формирование одной крупномасштабной ячейки (фиг. 1, к), ориентированной по центру и занимающей практически всю расчетную область. В последующие моменты

времени происходит усиление интенсивности (фиг. 4, а, б) крупномасштабного вихря без заметных изменений в структуре движения (фиг. 1, л, м), а начиная с  $t \approx 25$  наблюдается полностью установившийся режим.

Имеют место существенные отличия в распределении энергетических характеристик от случая обычной конвекции, связанные с появлением в системе дополнительного источника энергии, моделирующего осредненный эффект от присутствия мелкокомасштабной спиральной турбулентности.

Происходит резкое, на два порядка возрастание кинетической энергии ( $E_k \approx 5500$ ) и новое распределение ее по подслоям. Это связано с тем, что генерирующееся поле азимутальной скорости не только само содержит значительную энергию – фиг. 4, б, но, более того, через обратную связь заметно усиливает полоидальное поле. Для сравнения приведем значения компонентов скорости установившегося конвективного режима ( $t = 10$ :  $u = 5$ ,  $v = 0$ ,  $w = 6$ ) и стационарного спирального движения ( $t = 40$ :  $u = 35$ ,  $v = 65$ ,  $w = 14$ ). Эти цифры, как и фиг. 4, б, показывают, что наибольший вклад в значение кинетической энергии в спиральных режимах дает азимутальная составляющая скорости.

Как и ранее, максимальное значение кинетической энергии достигается в среднем подслое, но теперь  $E_{k2} \approx 3500$  в несколько раз превосходит две другие величины  $E_{k1} \approx 800$  и  $E_{k3} \approx 1300$ , поскольку трение на границах существенно всего ослабляет наиболее интенсивное азимутальное поле. Такое соотношение интенсивностей горизонтальной и вертикальной циркуляции характерно для крупномасштабных атмосферных вихрей типа тропического циклона, в которых на более сильную горизонтальную циркуляцию накладывается более слабая, но принципиально важная для существования системы в целом вертикальная циркуляция.

Потенциальная энергия оказывается положительной во всех подслоях (фиг. 4, в). Ее распределение качественно отличается от полученного для режима естественной конвекции: существование интенсивного азимутального течения инициирует процесс слияния ячеек и тем самым уменьшает канал диссипативных потерь, связанных с существованием восходящих и нисходящих потоков конвективной циркуляции в ячейках. При этом коренным образом изменяется характер теплопереноса в слое. Перенос тепла в данном случае осуществляется посредством вынужденной конвекции за счет интенсивного спирально-вихревого движения в крупномасштабной ячейке. Таким образом, возникшее тороидальное поле с одной стороны подавляет естественные конвективные движения, а с другой – само оказывает подсосывающее действие, организуя вихревую ячейку.

**Заключение.** Осредненное действие мелкокомасштабной спиральной турбулентности моделируется с помощью введения в уравнения Буссинеска внешней силы специального вида, структура которой совпадает с тензорной структурой генерационного  $\alpha$ -члена в уравнении гидродинамического альфа-эффекта [3, 7, 8]. Действие этой силы проявляется в создании дополнительной обратной связи. В результате, исследуемая математическая модель содержит две положительные обратные связи: конвективную, связывающую поле температурных возмущений и поле полоидальной циркуляции, и новую спиральную, действующую между полоидальным и тороидальным компонентами поля скорости.

Возбуждение на фоне развитых конвективных движений спиральной обратной связи приводит к генерации в каждой конвективной ячейке азимутального поля скорости, формируя тем самым спиральную структуру течения с зацеплением линий тока вертикальной и горизонтальной циркуляции. При этом инициируется процесс слияния ячеек и резко усиливается интенсивность вертикальной и горизонтальной циркуляции с преобладающим вкладом последней. По сравнению со случаем обычной конвекции кардинальные изменения наблюдаются в характере протекания энергетических процессов. В одиночном крупномасштабном спиральном вихре кинетическая энергия возрастает на порядки, а распределение потенциальной энергии свидетель-

стствует о качественных изменениях в характере теплопереноса: свободноконвективный перенос тепла сменяется высокоинтенсивным режимом вынужденной конвекции. Вполне реально ожидать, что многие из обнаруженных эффектов будут наблюдаться в режимах развитой турбулентной конвекции во вращающейся жидкости, когда естественным образом будет генерироваться мелкомасштабная спиральная турбулентность.

Авторы благодарны С.С. Моисееву и П.Г. Фрику за внимание к работе, А.А. Бармину за обсуждение и полезные замечания при рецензировании статьи, О.Е. Кузнецовой за участие в проведении расчетов и оформлении результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-05-64232).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H.* Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke  $\overline{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}$  für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflusster Bewegung // *Z. Naturforsch.* 1966. № 21a. Н. 4. Р. 369–376.
2. *Моисеев С.С., Сагдеев Р.З., Тур А.В., Хоменко Г.А., Яновский В.В.* Теория возникновения крупномасштабных структур в гидродинамической турбулентности // *ЖЭТФ.* 1983. Т. 85. Вып. 6. С. 1979–1987.
3. *Моисеев С.С., Руткевич П.Б., Тур А.В., Яновский В.В.* Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью // *ЖЭТФ.* 1988. Т. 94. Вып. 2. С. 144–153.
4. *Моисеев С.А., Сагдеев Р.З., Тур А.В., Хоменко Г.А., Шукуров А.М.* Физический механизм усиления вихревых возмущений в атмосфере // *Докл. АН СССР.* 1983. Т. 273. № 3. С. 549–553.
5. *Иванов М.Ф., Гальбурт В.А., Фортон В.Е.* О возможном механизме образования крупномасштабных возмущений в атмосфере Юпитера, вызванных падением фрагментов кометы Шумейкер – Леви 9 // *Письма в ЖЭТФ.* 1996. Т. 63. Вып. 10. С. 773–777.
6. *Фортон В.Е., Гнедин Ю.Н., Иванов М.Ф., Ивлеев А.В., Клунов Б.А.* Столкновение кометы Шумейкер – Леви 9 с Юпитером: что мы увидели // *Успехи физ. наук.* 1996. Т. 166. С. 391–422.
7. *Levina G.V., Moiseev S.S., Rutkevich P.B.* Hydrodynamic alpha-effect in a convective system // *Advances in Fluid Mechanics. Nonlinear Instability, Chaos, and Turbulence / Ed. L. Debnath, D.N. Riahi.* Southampton: WIT Press, 2000. V. 2. P. 111–162.
8. *Руткевич П.Б.* Уравнение вихревой неустойчивости, обусловленной конвективной турбулентностью и силой Кориолиса // *ЖЭТФ.* 1993. Т. 104. Вып. 6. С. 4010–4020.
9. *Курганский М.В.* Генерация завихренности во влажной атмосфере // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 1998. Т. 34. № 2. С. 175–181.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
11. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
12. *Moffatt H.K., Tsinober A.* Helicity in laminar and turbulent flow // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1992. V. 24. P. 281–312.
13. *Левина Г.В., Старков М.В., Фирулев А.В.* Численное исследование процесса образования крупномасштабных структур при совместном действии конвективной и спирально-вихревой неустойчивости // *Гидродинамика / Под ред. Г.З. Гершуни и др.* Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1999. Вып. 12. С. 164–183.
14. *Левина Г.В., Руткевич П.Б., Старков М.В.* Энергетические характеристики спиральной конвекции // *Гидродинамика / Под ред. Г.З. Гершуни и др.* Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1998. Вып. 11. С. 149–166.