

УДК 532.59:534.131.2

© 2001 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, С.А. КУМАКШЕВ, С.В. НЕСТЕРОВ

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ БАССЕЙНЕ

Исследована задача о свободных колебаниях тяжелой идеальной жидкости в вертикальном эллиптическом бассейне (сосуде) конечной глубины. Посредством разработанного авторами численно-аналитического подхода решена задача на собственные значения и функции с граничными условиями Неймана. Для пяти низших мод колебаний с высокой точностью определены собственные частоты и формы в широком диапазоне изменения эксцентриситета. Построены и прокомментированы интересные в теоретическом и прикладном аспектах графические зависимости.

Рассматривается линеаризованная задача о свободных колебаниях идеальной несжимаемой жидкости в вертикальном цилиндрическом бассейне (сосуде) эллиптического сечения [1–3]. На жидкость действует только сила тяготения с ускорением g . Требуется определить зависимость собственных частот и форм колебаний от параметров системы: полуосей эллипса a , b и глубины бассейна h . Существенный интерес в теоретическом и прикладном аспектах представляет высокоточное решение этой задачи для произвольных допустимых значений эксцентриситета e эллипса и глубины h .

Приближенное численно-аналитическое исследование задачи в случае $h \ll a$ (для определенности $a > b$) с помощью представления функций Матье в виде рядов по тригонометрической и полиномиальной системам функций предпринято в [1]. Расчеты проводились при $e = 0,8$ (отношение полуосей $a : b = 5 : 3$); вычислена наименьшая собственная частота, отвечающая узловой линии вдоль малой оси b (см. ниже). С помощью асимптотических выражений при $e \rightarrow 1$ даны оценки частот высших мод колебаний, симметричных относительно малой оси. Отмечено, что используемые формулы практически непригодны для вычисления тех форм колебаний, узловая линия которых совпадает с одним из конфокальных эллипсов.

Решение задачи для произвольной моды колебаний и параметров бассейна требует применения эффективного численно-аналитического метода, который разработан авторами [4, 5]. Ниже вычисляются пять низших собственных частот и формы колебаний жидкости в эллиптическом бассейне для $0 \leq e \leq 0,9$.

1. Постановка задачи. Вводится прямоугольная система координат x, y, z с началом в центре эллипса; оси x и y направляются вдоль большей и меньшей осей соответственно, начало отсчета оси z находится на невозмущенной поверхности жидкости. Область D , заполненная жидкостью в невозмущенном состоянии, описывается выражениями

$$D = \left\{ x, y, z : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, -h \leq z \leq 0 \right\} \quad (1.1)$$

Потенциал $u(x, y, z, t)$ скоростей течения жидкости в линейном приближении определяется как периодическое по времени t решение краевой задачи [2]

$$\Delta_3 u = 0, \quad (x, y, z) \in D \setminus \partial D$$

$$(x, y) \in E, \quad -h \leq z \leq 0 \quad \left(\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0$$

Здесь E – эллиптическая область в плоскости xy , задаваемая согласно (1.1), ∂D – вертикальная граница эллиптического цилиндра, $\partial u/\partial n$ означает производную по нормали. Возвышение свободной поверхности $z = \eta(x, y, t)$ находится с помощью потенциала u следующим образом:

$$\eta(x, y, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (1.3)$$

Краевая задача (1.2), (1.3) в области (1.1) допускает разделение переменных [3]. Известные функции u, η строятся в виде тригонометрических функций t и, кроме того, переменная z отделяется. Стандартным методом получаются краевые задачи

$$Z'' - \lambda Z = 0, \quad gZ'(0) - \omega^2 Z(0) = 0, \quad Z'(-h) = 0 \quad (1.4)$$

$$\Delta_2 U + \lambda U = 0, \quad (x, y) \in E, \quad \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{\partial E} = 0 \quad \left(\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (1.5)$$

$$(u = U(x, y)Z(z)e^{i\omega t}, \quad \eta = V(x, y)e^{i\omega t})$$

Здесь ∂E – граница эллипса; неизвестные величины – параметры λ, ω^2 (постоянные разделения) и функции U, Z – подлежат дальнейшему определению как решения задач (1.4), (1.5). Из краевой задачи (1.4) следуют выражение для Z и связь между постоянными ω и λ

$$Z(z) = c_z \operatorname{ch} \sqrt{\lambda}(z+h), \quad c_z = \text{const}, \quad \omega^2 = \sqrt{\lambda} g \operatorname{th}(\sqrt{\lambda} h) \quad (1.6)$$

Из (1.6) вытекает, что при $\sqrt{\lambda} h \ll 1$ частота ω связана с λ соотношением $\omega = \sqrt{gh\lambda}$. Этот случай рассматривался в [1]. Если же выполняется обратное сильное неравенство $\sqrt{\lambda} h \gg 1$, то справедливо приближенное выражение $\omega \approx \sqrt{g\sqrt{\lambda}}$, так как $\operatorname{th}(\sqrt{\lambda} h) \approx 1 - 2 \exp(-2\sqrt{\lambda} h)$. На практике реализуются как первый, так и второй варианты асимптотики.

Таким образом, дальнейшему исследованию подлежит плоская задача на собственные значения и функции (1.5) для эллиптической области E с граничными условиями Неймана [3]. Ее высокоточное решение представляет значительные аналитические и вычислительные трудности [1, 3]. Краевая задача допускает дальнейшее разделение переменных в эллиптических координатах, однако постоянные при этом разделяются не полностью (см. ниже). Имеют место две связанные краевые задачи, содержащие два параметра, собственные значения которых требуется определить. Собственные функции описываются стандартными и модифицированными уравнениями Матье [1]. До настоящего времени полноценное решение задачи в широком диапазоне изменения эксцентриситета в научной литературе неизвестно.

2. Решение задачи Штурма – Лиувилля с условиями Неймана для эллиптической области. Положим $a = 1$, $b = \sqrt{1 - e^2}$, где $0 \leq e \leq 1$ – эксцентриситет; это достигается нормировкой x, y на a и переобозначением $\lambda a^2 \rightarrow \lambda$. Представим задачу (1.6) в виде вариационной изопериметрической задачи с краевыми условиями Неймана [3]

$$J[U] = \iint_E \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \rightarrow \min_U, \quad \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{\partial E} = 0 \quad (2.1)$$

$$I[U] = \iint_E U^2 dx dy = 1, \quad (x, y) \in E = \left\{ x, y : x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} \leq 1 \right\}$$

Абсолютный нулевой минимум функционала $J[U]$ (2.1) приводит к значениям $\lambda = 0$, $U = 1/\sqrt{\pi\sqrt{2 - e^2}}$, что отвечает $\omega = 0$, т.е. равномерному движению бассейна с жидкостью как целого без относительных колебаний жидкости. Последующие собственные функции U_k , $k = 0, 1, \dots$, должны быть взаимно ортогональными

$$N[U_k, U_{k'}] = \iint_E U_k U_{k'} dx dy = 0, \quad k \neq k', \quad k, k' = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Вариационная формулировка (2.1), (2.2) задачи (1.6) представляется полезной в трех аспектах: более просто проводится разделение переменных; эти соотношения применимы для построения оценок собственных значений на основе удачно подобранных пробных функций; существенно проще выводятся приближенные аналитические выражения для собственных значений $\lambda(e)$ при $e \ll 1$ с погрешностью $O(e^4)$ [4].

Введем криволинейную ортогональную эллиптическую систему координат ξ, φ [3] и представим элементы длин дуг $dl_{\xi, \varphi}$ координатных линий, элемент площади dS и якобиан перехода $\sigma^2 \delta$ в этих координатах

$$x + iy = \sigma \operatorname{ch}(\xi + i\varphi), \quad i = \sqrt{-1}, \quad 0 \leq \xi \leq \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$x = \sigma \operatorname{ch} \xi \cos \varphi, \quad y = \sigma \operatorname{sh} \xi \sin \varphi \quad (2.3)$$

$$dl_\xi = \sigma \sqrt{\delta} d\xi, \quad dl_\varphi = \sigma \sqrt{\delta} d\varphi$$

$$dS = dl_\xi dl_\varphi = \sigma^2 \delta d\xi d\varphi \quad (dS = dx dy), \quad \delta = \operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \varphi \geq 0$$

Здесь $\sigma > 0$ – постоянная, определяемая эксцентриситетом эллипса. Пределы изменения переменных ξ, φ и параметр δ для фиксированного значения e равны ($a = 1$)

$$0 \leq \xi \leq \xi_0 = \operatorname{arch} e^{-1}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad \sigma = e \quad (2.4)$$

Соотношения (2.4) определяют область E в эллиптических координатах ξ, φ ; ее границе ∂E отвечает $\xi = \xi_0$. С помощью выражений (2.3), (2.4) осуществляется переход к эллиптическим координатам ξ, φ в квадратурах (2.1), (2.2). Вводя множитель Лагранжа λ , получим модифицированный функционал $J^*[U]$, условие периодичности функции U по φ и краевое условие Неймана в виде

$$J^*[U] = \iint_E \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)^2 - \lambda \frac{e^2}{2} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\varphi) U^2 \right] d\xi d\varphi \rightarrow \min_U \quad (2.5)$$

$$U = U(\xi, \varphi) \equiv U(\xi, \varphi + 2\pi), \quad \frac{\partial U}{\partial \xi} \Big|_{\xi = \xi_0} = 0$$

Соответствующее безусловному экстремуму функционала (2.5) уравнение Эйлера – Лагранжа представим в виде краевой задачи в эллиптических координатах

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \mu(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\varphi)U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} = 0 \quad (2.6)$$

$$\mu = \frac{\lambda e^2}{2}, \quad U(\xi, \varphi + 2\pi) \equiv U(\xi, \varphi)$$

Переход к случаю круга ($e \rightarrow 0$) требует аккуратных преобразований, так как $\xi_0 \rightarrow \infty$; однако эта зависимость слабая: $\xi_0 \approx \ln e^{-1}$. Переход от (1.5) к уравнению (2.6) может быть также выполнен непосредственно вычислением вторых производных, что приведет к весьма громоздким выражениям. Задача (2.6) наряду с обычным краевым условием по ξ типа Неймана содержит смешанное условие периодичности по φ . Привлекательное свойство состоит в том, что она допускает разделение переменных ξ, φ и сведение к обычным задачам на собственные значения и функции.

Представим искомую функцию $U(\xi, \varphi)$ в виде произведения $U = \Phi(\varphi)A(\xi)$ и применим процедуру разделения [3]

$$\Phi'' + (\nu - \mu \cos 2\varphi)\Phi = 0, \quad A'' + (\mu \operatorname{ch} 2\xi - \nu)A = 0, \quad |\nu| \leq \infty, \quad \mu > 0 \quad (2.7)$$

где ν – постоянная разделения переменных ξ, φ . В результате получена система уравнений, каждое из которых содержит две неизвестные постоянные μ и ν . Уравнение для Φ имеет форму канонического уравнения Матье, а для A – присоединенного или модифицированного уравнения Матье [1]. Симметричному и несимметричному решениям уравнения Матье $\Phi(\varphi)$ отвечают соответствующие функции $A(\xi)$. В результате приходим к двум типам стандартных краевых условий [1, 3]

$$\Phi'(0) = \Phi'(\pi) = 0, \quad A'(0) = A'(\xi_0) = 0 \quad (2.8)$$

$$\Phi(0) = \Phi(\pi) = 0, \quad A(0) = A(\xi_0) = 0 \quad (2.9)$$

Требуется найти такие значения постоянных $\nu(e), \mu(e)$, для которых существует нетривиальное решение краевых задач (2.7)–(2.9). Естественная схема заключается в построении симметричного и несимметричного семейства решений для уравнения Матье [3, 4] (μ – параметр семейства), удовлетворяющих (2.8), (2.9)

$$\{\nu_n^c(\mu), \Phi_n^c(\varphi, \mu); \Phi_n^{c'}(0, \mu) = \Phi_n^{c'}(\pi, \mu) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots\} \quad (2.10)$$

$$\{\nu_n^s(\mu), \Phi_n^s(\varphi, \mu); \Phi_n^s(0, \mu) = \Phi_n^s(\pi, \mu) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots\} \quad (2.11)$$

Функции $\nu_n^{c,s}(\mu), \Phi_n^{c,s}(\varphi, \mu)$ (2.10), (2.11) известны во многих аналитических и вычислительных подробностях [1, 3].

Затем найденные значения $\nu_n^{c,s}(\mu), \mu \in M$, где M – подлежащее оценке множество значений μ, n – фиксированное значение индекса (число узловых линий по φ), подставляются в модифицированное уравнение (2.7) для A . Получаются две обобщенные задачи на собственные значения и функции [4, 5]

$$A'' + (\mu \operatorname{ch} 2\xi - \nu_n^{c,s}(\mu))A = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0(e) \quad (2.12)$$

$$A^{c'}(0) = A^{c'}(\xi_0) = 0; \quad A^s(0) = A^s(\xi_0) = 0$$

Для фиксированного значения $e \in (0, 1)$ строятся решения обобщенных краевых задач (2.12) с помощью метода ускоренной сходимости [4, 5]

$$\{\mu_{nm}^{c,s}(e), A_{nm}^{c,s}(\xi, e); m = 1, 2, \dots\} \quad (2.13)$$

Индекс n определен выше в (2.10), (2.11) при построении периодических решений уравнений Матье ($n = 0$ отвечает только симметричным решениям). Подстановка собственных значений $\mu_{nm}^{c,s}(e)$ (2.13) в (2.10), (2.11) полностью определяет искомые решения задач (2.7)–(2.9).

Представляются возможными другие последовательности операций при вычислении параметров $\mu(e)$, $\nu(e)$ и функций $\Phi(\varphi, e)$, $A(\xi, e)$. Однако изложенная выше схема, как показывает вычислительная практика, оказывается наиболее простой и эффективной. Дополнительный довод заключается в том, что периодическая краевая задача для уравнения Матье не содержит параметра e , по которому при решении обобщенной краевой задачи (2.13) для функции A осуществляется прогонка, т.е. реализуется процедура продолжения по параметру [4, 5]. Последовательное численное уточнение параметров μ и ν после достаточного малого изменения эксцентриситета e может проводиться рекуррентно до достижения заданной малой невязки по абсциссам φ и ξ . По существу происходит численная реализация неявной процедуры решения системы двух уравнений для симметричного и несимметричного случаев соответственно

$$\nu = \nu_n^c(\mu), \quad \mu = \mu_m^c(\nu, e); \quad \nu = \nu_{nm}^c(e), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

$$\nu = \nu_n^s(\mu), \quad \mu = \mu_m^s(\nu, e); \quad \nu = \nu_{nm}^s(e), \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Изложенная схема решения согласно (2.10)–(2.15) выполнена численно для $n = 0, 1, 2$, $m = 1, 2$ и значений эксцентриситета $0 \leq e \leq 0,9$ с относительной погрешностью $O(10^{-5})$. Отметим, что при известных значениях величин $\nu_{nm}^{c,s}(e)$, $\mu_{nm}^{c,s}(e)$ собственные функции $\Phi_{nm}^{c,s}(\varphi, e)$, $A_{nm}^{c,s}(\xi, e)$ получаются в результате интегрирования задач Коши для уравнений (2.7) со следующими начальными условиями (см. (2.8), (2.9)):

$$\Phi^c(0) = 1, \quad \Phi^{c'}(0) = 0; \quad A^c(0) = 1, \quad A^{c'}(0) = 0 \quad (2.16)$$

$$\Phi^s(0) = 0, \quad \Phi^{s'}(0) = 1; \quad A^s(0) = 0, \quad A^{s'}(0) = 1 \quad (2.17)$$

Представление функций $\Phi_{nm}^{c,s}$, $A_{nm}^{c,s}$ и U_{nm} в декартовой системе координат xu , т.е. в переменных $(x, y) \in E$, требует пересчета согласно (2.3). Для этой цели разрешим выражения относительно ξ , φ ; имеем

$$\operatorname{ch} \xi = \sqrt{\zeta}, \quad \operatorname{sh} \xi = \sqrt{\zeta - 1}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{e\sqrt{\zeta}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{e\sqrt{\zeta - 1}} \quad (2.18)$$

$$\zeta = \frac{e^2 + r^2}{2e^2} + \frac{1}{2e^2} \sqrt{(e^2 + r^2)^2 - 4e^2 x^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Кроме того, согласно (2.1), переменные x, y ограничены условием принадлежности эллиптической области с полуосями $a = 1, b = \sqrt{1 - e^2}$, т.е.

$$x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} \leq 1, \quad -\sqrt{(1 - e^2)(1 - x^2)} \leq y \leq \sqrt{(1 - e^2)(1 - x^2)}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.19)$$

Собственные функции $U_{nm}^{c,s}$, $(x, y) \in E$, могут быть изображены либо сечениями по x или y , либо линиями уровня $U_{nm}^{c,s} = \text{const}$. Общий вид в трехмерном пространстве с целью наглядности можно представить в аксонометрической проекции, например в изометрической. Результаты математического моделирования излагаются ниже.

e	μ_{11}^c	μ_{11}^s	μ_{21}^c	μ_{21}^s	μ_{02}
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,1	0,0170	0,0171	0,0467	0,0469	0,0738
0,2	0,0679	0,0705	0,1899	0,1904	0,2998
0,3	0,1531	0,1684	0,4382	0,4404	0,6949
0,4	0,2730	0,3208	0,8029	0,8163	1,2991
0,5	0,4283	0,5578	1,2974	1,3556	2,1942
0,6	0,6198	0,9334	1,9358	2,1335	3,3912
0,7	0,8488	1,5750	2,7228	3,3194	5,8767
0,8	1,1169	2,8493	3,6702	5,3915	10,4650
0,9	1,4262	6,5285	4,7802	10,5818	21,9916

3. Результаты численных расчетов собственных частот и форм колебаний низших мод. Для цилиндрической области кругового сечения радиуса $a = 1$ решение задачи известно и определяется методом разделения переменных в полярных координатах [1, 3]. Уравнение для $\Phi(\varphi)$ полностью отделяется и решение выражается в тригонометрических функциях. Функция, зависящая от радиуса r , $0 \leq r \leq 1$, задается функциями Бесселя целого порядка. В результате для $e = 0$ имеем [1, 3]

$$U_{nm}^c = C_{nm}^c \cos n\varphi J_n(\gamma'_{nm}r), \quad n = 0, 1, \dots, m = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

$$U_{nm}^s = C_{nm}^s \sin n\varphi J_n(\gamma'_{nm}r), \quad n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Здесь γ'_{nm} – m -й корень (нуль) функции $J'_n(\gamma)$, $C_{nm}^{c,s}$ – постоянные, выбираемые из условия нормировки (2.1). Функции $U_{nm}^{c,s}$ удовлетворяют условиям ортогональности, причем собственные значения $\lambda_{nm}^{c,s} = \gamma'^2_{nm}$ двукратно вырождены при $n = 1, 2, \dots$. Решение (3.1) может рассматриваться как порождающее при $e \ll 1$ в различных схемах метода возмущений [1, 3, 4]. При $e \geq 0,5$ вычислительные трудности существенно возрастают и требуется разработка эффективных вычислительных алгоритмов на основе метода ускоренной сходимости [4, 5].

Для гидродинамики представляет значительный интерес численно-аналитическое исследование собственных частот колебаний тяжелой жидкости в эллиптическом бассейне в зависимости от эксцентриситета. На предварительном этапе были определены собственные значения $\mu_{nm}^{c,s}(e)$, $\nu_{nm}^{c,s}(e)$ связанных краевых задач (2.7)–(2.9) посредством схемы (2.10)–(2.13) и процедуры продолжения по параметру – эксцентриситету e , $0 \leq e \leq 0,9$. Расчеты проводились с относительной погрешностью $10^{-4} - 10^{-5}$ при помощи метода ускоренной сходимости [4, 5]; невязка по абсциссе составляла величину порядка $10^{-5} - 10^{-6}$. При $n = 0$ существуют только симметричные моды колебаний (индекс s для сокращения записи не указывается).

В табл. 1 приведены величины e с шагом $\Delta e = 0,1$ и соответствующие им пять собственных значений $\mu_{nm}^{c,s}(e)$, отвечающих низшим модам колебаний. Вспомогательные величины $\xi_0(e)$ для указанных значений e и параметры $\nu_{nm}^{c,s}(e)$, необходимые для интегрирования уравнений (2.7) с условиями (2.16), (2.17), представлены в табл. 2.

Таблица 2

ξ_0	v_{11}^c	v_{11}^s	v_{21}^c	v_{21}^s	v_{02}
∞	1,0000	1,0000	4,0000	4,0000	0,0000
2,9932	1,0085	0,9915	4,0002	4,0002	-0,0007
2,2924	1,0338	0,9646	4,0038	3,9992	-0,0112
1,8738	1,0758	0,9149	4,0199	3,9960	-0,0596
1,5668	1,1341	0,8365	4,0658	3,9861	-0,2021
1,3170	1,2083	0,7117	4,1666	3,9618	-0,5390
1,0986	1,2974	0,5076	4,3501	3,9064	-1,1535
0,8956	1,4007	0,1423	4,6341	3,7742	-2,7486
0,6931	1,5167	-0,6370	5,0292	3,4026	-6,1610
0,4650	1,6438	-3,1682	5,5163	1,8915	-15,6204

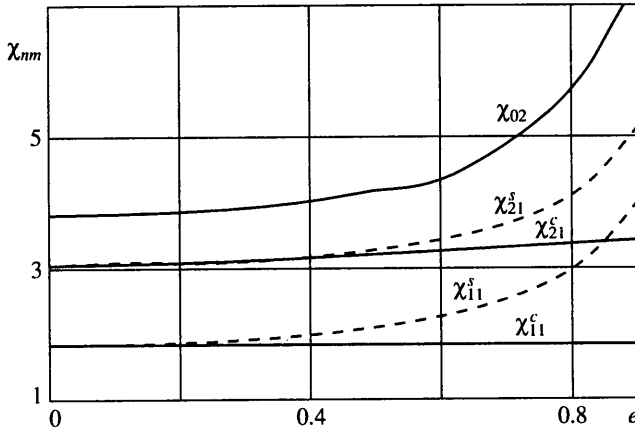
Таблица 3

e	χ_{11}^c	χ_{11}^s	χ_{21}^c	χ_{21}^s	χ_{02}
0	$\gamma'_{11} = 1,8412$	$\gamma'_{11} = 1,8412$	$\gamma'_{21} = 3,0542$	$\gamma'_{21} = 3,0542$	$\gamma'_{02} = 3,8317$
0,1	1,8415	1,8501	3,0553	3,0619	3,8414
0,2	1,8427	1,8781	3,0822	3,0858	3,8714
0,3	1,8446	1,9347	3,1206	3,1283	3,9297
0,4	1,8474	2,0024	3,1680	3,1943	4,0297
0,5	1,8510	2,1124	3,2217	3,2932	4,1897
0,6	1,8556	2,2772	3,2794	3,4428	4,3405
0,7	1,8613	2,5354	3,3337	3,6808	4,8976
0,8	1,8682	2,9840	3,3866	4,1047	5,7187
0,9	1,8766	4,0149	3,4355	5,1115	7,3689

Искомые собственные значения $\lambda_{nm}^{c,s}(e)$ исходной краевой задачи с граничными условиями Неймана [1–5] согласно (2.6) при $e > 0$ вычисляются на основе известных величин $\mu_{nm}^{c,s}(e)$, а затем представляются в размерном виде

$$\lambda_{nm}^{c,s}(e) = (2/e^2)\mu_{nm}^{c,s}(e), \quad \lambda \rightarrow \lambda/a^2 \quad (3.2)$$

Для удобства графического представления и использования результатов расчетов приведем численные значения величин $\chi = \sqrt{\lambda}$, входящих в выражение для квадрата частоты (1.6) (табл. 3).



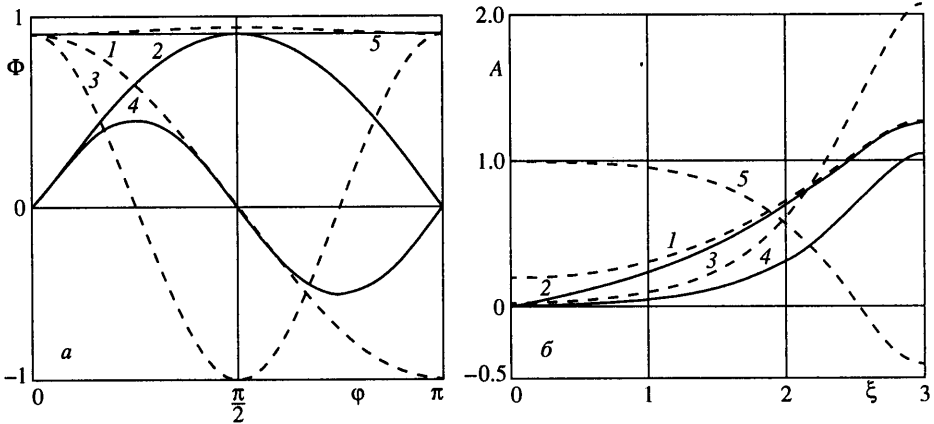
Фиг. 1. Зависимость величин $\chi_{nm}^{c,s}$ пяти низших мод колебаний от эксцентриситета

Отметим, что $\gamma'_{nm} = \gamma_{nm}^{c,s}(0)$ есть ненулевой m -й корень производной функции Бесселя n -го порядка (см. (3.1)). Ради наглядности зависимости $\chi_{nm}^{c,s}(e)$ представлены на фиг. 1 в виде семейства графиков (диаграмм), аналогичных диаграммам Айнса – Стретта [1, 6]. Эти кривые фактически позволяют построить полностью искомое решение для рассматриваемых значений эксцентриситета, причем они могут быть экстраполированы при $e \rightarrow 1$ согласно [3] (аналогично [4]). Действительно, зафиксировав индексы n, m и c или s рассматриваемой моды, для заданного e найдем величину $\chi_{nm}^{c,s}(e)$. По формуле (3.2) вычислим собственное значение $\mu_{nm}^{c,s}(e)$, а с помощью классических диаграмм Айнса – Стретта [6] определим соответствующее значение $\nu_{nm}^{c,s}(e)$. Известные величины $\mu_{nm}^{c,s}, \nu_{nm}^{c,s}$ позволяют построить собственные формы колебаний $U_{nm}^{c,s} = \Phi_{nm}^{c,s}(\varphi, e)A_{nm}^{c,s}(\xi, e)$ как решения двух задач Коши (2.7), (2.16), (2.17) (см. ниже).

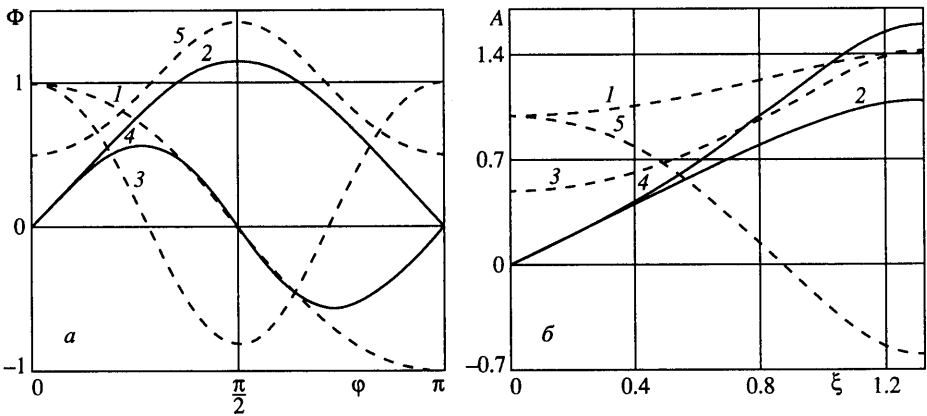
Площадь эллипса $S(e) = \pi\sqrt{1-e^2} \rightarrow 0$ при $e \rightarrow 1$. Увеличение эксцентриситета приводит к неограниченному росту функций $\lambda_{11}^s(e), \lambda_{21}^s(e), \lambda_{02}(e)$, так как $b(e) \rightarrow 0$. При этом происходит сравнительно небольшое увеличение значений $\lambda_{11}^c(e), \lambda_{21}^c(e)$. Такое поведение собственных значений (и частот) объясняется свойствами граничных условий и отвечает интуитивным представлениям; оно существенно отличается от случая закрепленной эллиптической мембраны [4].

Для гидродинамики представляется также весьма важным исследование различных форм колебаний свободной поверхности жидкости в эллиптическом бассейне. Собственные формы колебаний $U_{nm}^{c,s}$ построены численно интегрированием задач Коши (2.7), (2.16), (2.17) для функций $\Phi(\varphi), A(\xi)$ после подстановки в уравнения найденных величин $\mu_{nm}^{c,s}(e), \nu_{nm}^{c,s}(e)$. С целью иллюстрации влияния величины эксцентриситета на рис. 2–4 приведены графики функций $\Phi_{nm}^{c,s}(\varphi, e), A_{nm}^{c,s}(\xi, e)$ для указанных ранее низших мод колебаний; эти кривые пронумерованы от 1 до 5. Для удобства некоторые кривые изображены в масштабе.

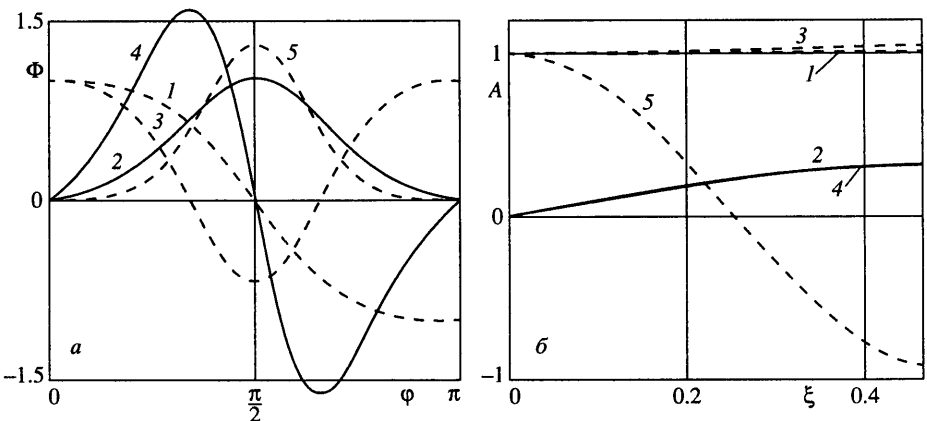
Ради определенности и наглядности взяты следующие значения: $e = 0,1$ (фиг. 2) отвечает случаю эллипса, "близкого" к кругу радиуса $r = 1$; величине $e = 0,5$ (фиг. 3) отвечает случаю умеренно больших значений эксцентриситета (малая полуось



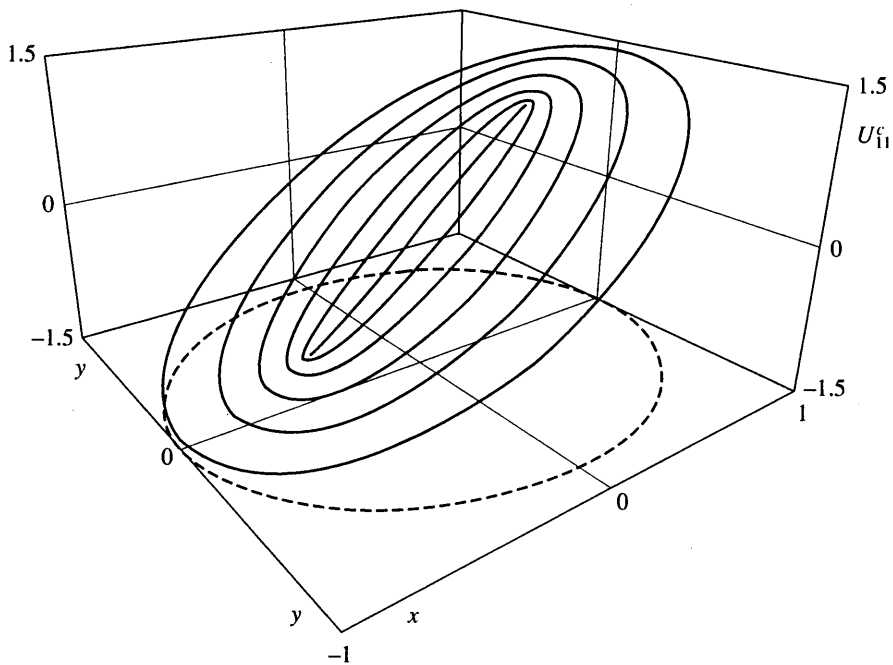
Фиг. 2. Функции $\Phi_{nm}^{c,s}(\varphi)$ и $A_{nm}^{c,s}(\xi)$, определяющие формы пяти низших мод колебаний для малого значения эксцентриситета $e = 0,1$; б – кривые 1, 2 в масштабе 1 : 5, кривые 3, 4 в масштабе 1 : 40



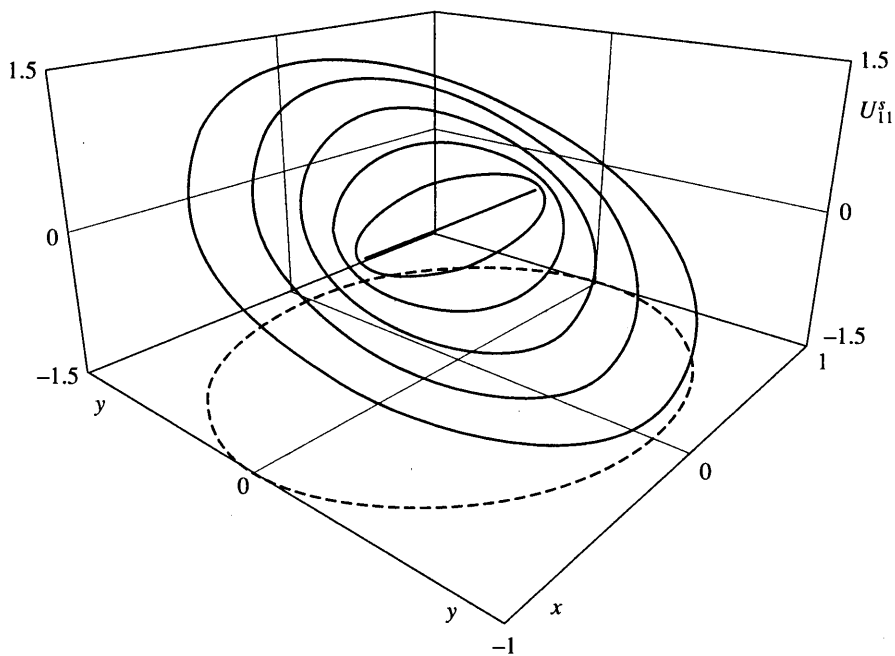
Фиг. 3. Функции $\Phi_{nm}^{c,s}(\varphi)$ и $A_{nm}^{c,s}(\xi)$ для среднего значения эксцентриситета $e = 0,5$; а – кривая 5, б – кривая 3 в масштабе 1 : 2



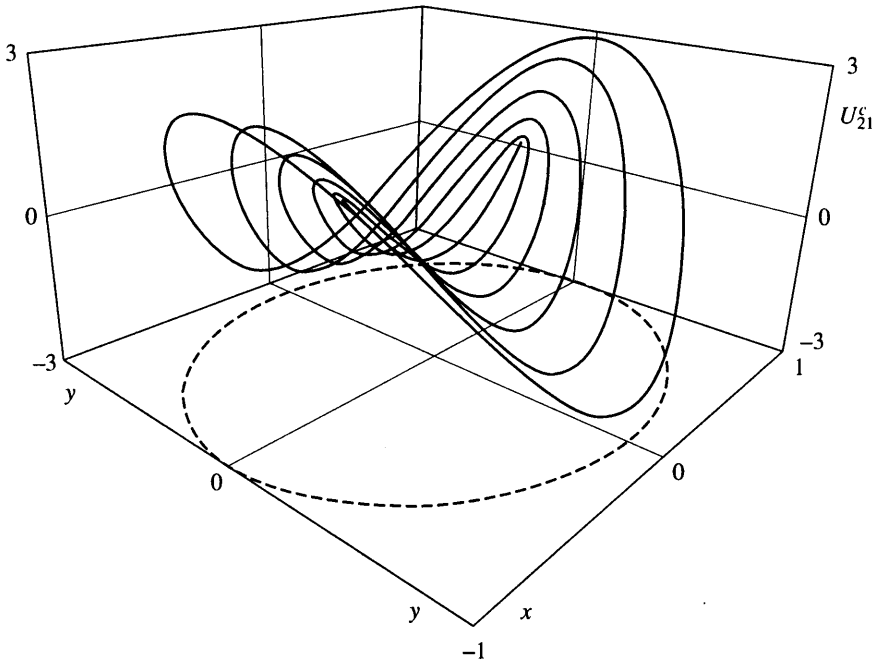
Фиг. 4. Функции $\Phi_{nm}^{c,s}(\varphi)$ и $A_{nm}^{c,s}(\xi)$ для большого значения эксцентриситета $e = 0,9$; а – кривая 2 в масштабе 1 : 4, кривая 5 в масштабе 1 : 200



Фиг. 5. Форма колебаний $U_{11}^c(x, y)$ в аксонометрической проекции при $\epsilon = 0,5$



Фиг. 6. Форма колебаний $U_{11}^s(x, y)$

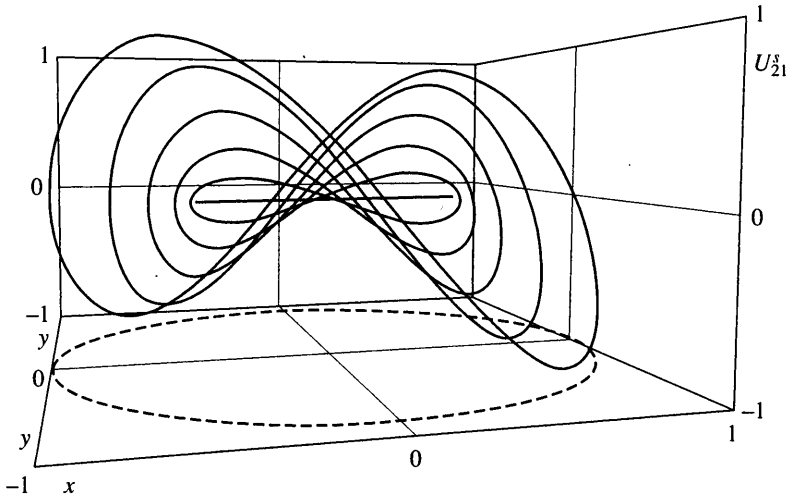


Фиг. 7. Форма колебаний $U_{21}^c(x, y)$

$b = \sqrt{0,75}$, однако расстояние между фокусами существенно и равно $2e = 1$); случай $e = 0,9$ (фиг. 4) соответствует относительно большому значению c с существенным отличием малой полуоси $b = \sqrt{0,19}$ от большой $a = 1$.

Анализ кривых 1, 2, т.е. $\Phi_{11}^{c,s}(\varphi, e)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ (фиг. 2, а – 4, а) свидетельствует о наличии узловых линий $\varphi_{11}^c = \pi/2$ и $\varphi_{11}^s = 0$ для симметричной и несимметричной моды колебаний соответственно. Это означает, что поверхность поворачивается вокруг малой b (ось y) или большой a (ось x) полуосей. Узловых линий по переменной ξ , $0 \leq \xi \leq \xi_0(e)$, эти поверхности не имеют (см. кривые $A_{11}^{c,s}$ на фиг. 2, б – 4, б). Увеличение эксцентриситета e от 0,1 до 0,9 приводит к довольно очевидной эволюции кривых $\Phi_{11}^{c,s}(\varphi, e)$, $A_{11}^{c,s}(\xi, e)$. Поверхности $U_{11}^{c,s}(\varphi, \xi, e)$ могут быть представлены в декартовой системе с помощью преобразований (2.18), (2.19) в виде $U_{11}^{c,s}(x, y, e)$. Для наглядности эти поверхности приведены на фиг. 5, б в аксонометрической проекции. Линии отвечают фиксированным значениям ξ , $0 \leq \xi \leq \xi_0(e)$, $e = 0,5$; поверхности имеют протью форму.

Более сложные формы имеют следующие моды колебаний $U_{21}^{c,s}$, которым отвечают две крестообразные узловые линии: φ_{21}^c , $\pi - \varphi_{21}^c$, где $\varphi_{21}^c = \arg \Phi_{21}^c$ существенно зависит от e , и $\varphi_{21}^s = 0, \pi/2$ (см. кривые 3, 4 для $\Phi_{21}^{c,s}$ на фиг. 2, а – 4, а). Анализ кривых 3, 4 для $A_{21}^{c,s}$ на фиг. 2, б – 4, б, как и раньше для $A_{11}^{c,s}$, свидетельствует об отсутствии узловых линий по ξ . Характер изменения этих кривых при возрастании e аналогичен рассмотренному. Аксонометрические проекции поверхностей $U_{21}^{c,s}(x, y, e)$ при $e = 0,5$ представлены на фиг. 7, 8. Третья форма собственных колебаний U_{21}^c (фиг. 7) имеет

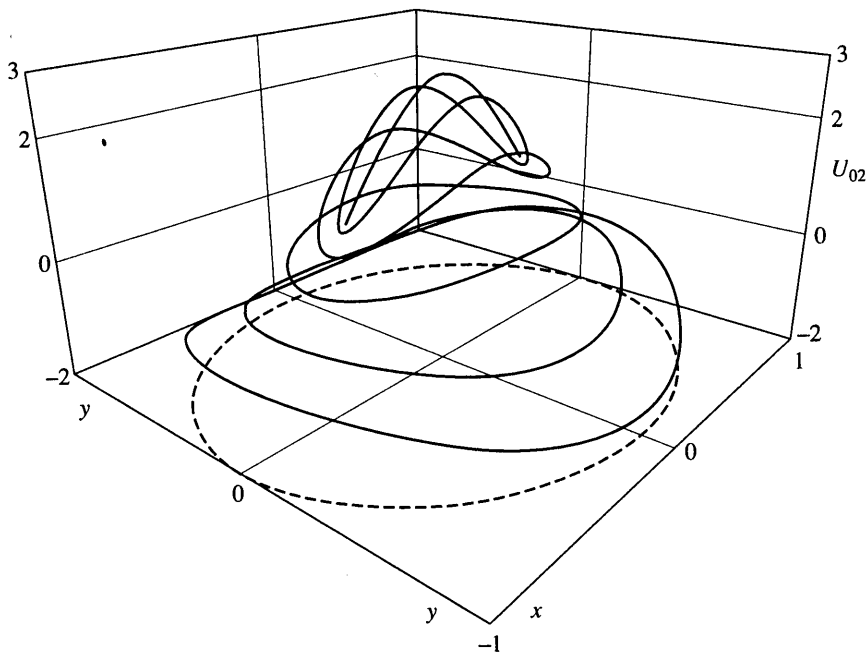


Фиг. 8. Форма колебаний $U_{21}^s(x, y)$

вид седла: торцевые края эллипса при $x \approx \pm 1$ загнуты кверху, а боковые края при $y \approx \pm b$ загнуты книзу. Узловые линии поверхности образуют крест с углом между образующими $2(\pi/2 - \varphi_{21}^e)$. При $e \rightarrow 1$ образующие приближаются к малой полуоси. При $e = 0,1$ угол равен приблизительно $\pi/2$, при $e = 0,5$ – 1,38, а при $e = 0,9$ – приблизительно 1 рад (кривые 3 на фиг. 2, а – 4, а). Четвертая форма U_{21}^s (см. фиг. 8) имеет вид пропеллера: правая верхняя и левая нижняя части эллипса загнуты в положительную сторону ($U_{21}^s > 0$); а правая нижняя и левая верхняя – в отрицательную ($U_{21}^s < 0$). Узловые линии образуют прямой крест и совпадают с полуосями эллипса.

Рассмотрим пятую моду U_{02} колебаний, описываемую функциями $\Phi_{02}(\varphi, e)$, $A_{02}(\xi, e)$ (кривые 5 на фиг. 2–4). Из графиков следует, что узловые линии по φ отсутствуют, так как $\Phi_{02} > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ для всех $0 \leq e < 1$; при $\varphi = 0, \pi$ имеют место минимумы, а при $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ – максимумы. Форма колебаний содержит замкнутую узловую линию, отвечающую конфокальному эллипсу с параметром $\xi_{02}(e) = \text{arg} A_{02}(\xi, e)$. Функция $A_{02}(\xi, e)$ имеет весьма простой вид; характер кривой изменяется слабо для всех $0 \leq e \leq 1$. Однако свойства кривой $\Phi_{02}(\varphi, e)$ весьма резко изменяются при изменении e ; возрастание эксцентриситета приводит к значительным осцилляциям по φ (кривые 5 на фиг. 2, а – 4, а). Анализ свободной поверхности колебаний $U_{02}(x, y, e)$ свидетельствует, что она имеет единственный строгий максимум при $x = y = 0$ и шляпообразную форму. В аксонометрической проекции форма U_{02} для $e = 0,5$ представлена на фиг. 9. Как и в предыдущих случаях, поверхность дана сечениями по параметру ξ , $0 \leq \xi \leq \xi_0(e)$. Криволинейный отрезок в центре всех поверхностей отвечает значению $\xi = 0$; границе соответствует $\xi = \xi_0(e)$.

Заключение. Имеющиеся в научной литературе (см. [1, 3, 6 и др.]) исследования собственных колебаний тяжелой жидкости в эллиптическом бассейне на основе введения эллиптических координат и метода разделения переменных неудовлетворительны в методическом и вычислительном аспектах. Это обусловлено отсутствием эффективных методов решения совместных краевых задач (2.7)–(2.9). Применение вычислительных методов Рэлея – Ритца, Бубнова – Галеркина, конечных элементов и аналогичных им не дает точных результатов для достаточно больших значений



Фиг. 9. Форма колебаний $U_{02}(x, y)$

эксцентриситета e и номеров мод n, t собственных колебаний. Для таких подходов при расчетах довольно быстро наступает "насыщение", поскольку некоторое уточнение решения для данной моды требует значительного увеличения размерности аппроксимирующего вектора. Методы, связанные с дискретизацией задачи, приводят к указанным трудностям в еще большей мере. Имеющиеся подходы не позволяют идентифицировать номер моды n, t , отвечающей некоторому собственному значению λ , найденному приближенно с весьма неопределенной точностью. Точность удовлетворения краевых условий не проверяется, что часто приводит к вычислительным ошибкам.

Разработанный авторами алгоритм основан на вариационном принципе, методе разделения переменных в эллиптических координатах и высокоточном решении задачи (2.7) при помощи метода ускоренной сходимости и процедуры продолжения по параметру (эксцентриситету e эллипса). Этот подход позволил получить практически исчерпывающее решение задачи о свободных колебаниях тяжелой жидкости в эллиптическом бассейне конечной глубины для пяти низших мод колебаний. Метод позволяет также провести эффективную проверку и идентификацию решений, полученных другими способами. Следует отметить, что в рассмотренной задаче на собственные значения и функции для эллиптической области с граничными условиями Неймана расчеты более неустойчивы и затруднительны, чем в случае условий Дирихле [1, 3, 4, 6]. Этим обстоятельством можно объяснить отсутствие полноценных расчетов для указанной задачи.

Наряду с определением относительно простых низших мод $U_{11}^{c,s}(x, y, e)$ и $\lambda_{11}^{c,s}(e)$ (формы типа "склон" и "скос") впервые построены более сложные формы $U_{21}^{c,s}(x, y, e)$ ("седло"), $U_{11}^s(x, y, e)$ ("пропеллер") и $U_{02}(x, y, e)$ ("шляпа"), а также соответствующие собственные значения $\lambda_{nm}^{c,s}(e)$ (частоты $\omega_{nm}^{c,s}$).

Экономичность и быстрая сходимость метода позволяют высокоточно провести процесс вычислений частот и форм колебаний для значительно более высоких мод и больших значений эксцентриситета. Аналогичные результаты в научной литературе неизвестны.

Авторы признательны А.А. Бармину за ценные советы, позволившие улучшить изложение результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99-01-00222, 99-01-00276).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 476 с.
2. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
3. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 886 с.
4. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Собственные колебания однородной эллиптической мембраны // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 179–190.
5. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Собственные колебания распределенных неоднородных систем, описываемых обобщенными краевыми задачами // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 4. С. 645–654.
6. *Стретт М.Д.О.* Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков, Киев: Гостехиздат Украины, 1935. 237 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.VIII.2000