

УДК 532.516.013.4

© 2001 г. И.Н. ЛАРИНА, В.А. РЫКОВ

## ДИНАМИКА НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ В ВЯЗКОЙ УСКОРЕННО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Численным методом изучается течение вязкой несжимаемой жидкости между соосными цилиндрами, которые совершают равноускоренное вращение вокруг своей оси как твердое тело. Аналитическим методом строится одномерное нестационарное решение уравнений Навье – Стокса для случая, когда движение начинается из состояния покоя. На начальном участке времени одномерное нестационарное движение является неустойчивым. Вносимые в поток малые возмущения вызывают образование вторичных вихревых течений с компонентой скорости вдоль оси. Численным методом исследуется динамика возникающих неустойчивостей и их диссипация. Формулируется условие, определяющее размеры нестационарной области вторичных течений. Неустойчивый режим течения является переходным и с некоторого момента времени течение становится устойчивым.

Изучение возникновения и развития неустойчивостей в потоках вязкой несжимаемой жидкости представляет сложную задачу, которая интересует исследователей в нескольких отношениях. Во-первых, необходимо сформулировать условия, при которых поток теряет устойчивость, и, во-вторых, ответить на вопрос, что происходит с потоком после потери устойчивости и каков характер возникающих вторичных течений. Наиболее изученным примером движения вязкой несжимаемой жидкости, для которого удастся дать ответы на поставленные вопросы, является классический пример сдвигового течения между соосными вращающимися цилиндрами. Это течение было подробно изучено как теоретически, так и экспериментально Тейлором [1]. Оно является простейшим примером стационарного течения вязкой жидкости, показывающим, что при определенных условиях с ростом числа Рейнольдса происходит потеря устойчивости основного одномерного течения и возникают вторичные течения. Изучение течений вязкой несжимаемой жидкости, которые сопровождаются потерей устойчивости, чрезвычайно полезно, так как помогает выработать понимание происходящих в жидкости процессов и предсказывать характер течения жидкости в сходных ситуациях.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости между соосными, бесконечно длинными цилиндрами, которые совершают равноускоренное вращение вокруг своей оси как твердое тело. В начальный момент времени ( $t = 0$ ) цилиндры и жидкость, расположенная между ними, покоятся. Рассмотрение движения жидкости проводится в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ , связанной с вращающимися цилиндрами. Из-за действия силы углового ускорения при  $t > 0$  жидкость приходит в нестационарное одномерное движение. Здесь  $z$  – координата вдоль оси цилиндров,  $\varphi$  – угловая переменная,  $r$  – координата, нормальная к поверхности цилиндров. Вектор скорости  $\mathbf{V} = (u, v, w)$  имеет компоненты:  $u$  – вдоль нормали к поверхности,  $v$  – вдоль углового направления и  $w$  – вдоль оси.

Уравнения Навье – Стокса имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} - \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r}$$

$$\nabla \mathbf{V} = 0, \quad P = -\frac{\omega^2 r^2}{2} + \frac{p}{\rho}, \quad \boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \omega), \quad \boldsymbol{\epsilon} = (0, 0, \epsilon)$$

Здесь  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $\epsilon$  – постоянное угловое ускорение вокруг оси  $z$ ,  $\omega = \epsilon t$  – угловая скорость вращения цилиндров,  $\nu$  – кинематическая вязкость.

При обезразмеривании уравнений и искомых величин будем использовать масштабы длины, времени, скорости потока и давления соответственно: радиус внутреннего цилиндра  $R_1$ ,  $t_* = \epsilon^{-1/2}$  с,  $V_* = R_1 / t_*$ ,  $p_* = \rho V_*^2$ . При таком выборе характерных значений число Струхала равно единице, а число Рейнольдса  $Re = R_1 V_* / \nu$ . Область движения жидкости

$$1 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq L, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

На поверхности тела выставляются условия прилипания и непротекания, а на плоскостях  $z = 0$  и  $z = L$  – условия симметрии

$$u = v = w = 0 \tag{1.1}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{1.2}$$

Последние допускают как одномерное решение уравнений Навье – Стокса, так и неодномерное, имеющее характер ячеистых структур вдоль оси  $z$ . На выборе размера ячейки  $L$  вдоль оси  $z$  остановимся позднее.

Оставаясь в классе осесимметричных течений, будем рассматривать одномерные нестационарные движения жидкости и исследовать влияние на эти движения осесимметричных малых возмущений, вносимых в поток. Поэтому полагаем  $d/d\varphi = 0$ .

Уравнения, описывающие движение жидкости, имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left( \Delta u - \frac{u}{r^2} \right) + 2\omega v \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{1}{Re} \left( \Delta v - \frac{v}{r^2} \right) - 2\omega u - r \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \Delta w \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.6}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \omega(t) = t$$

**2. Одномерные решения.** Будем рассматривать осесимметричные движения жидкости, не зависящие от координаты  $z$  и обладающие компонентами скорости  $u = w = 0$ . Искомые функции  $u(t, r)$  и  $P(t, r)$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) - r \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{v^2}{r} + 2\omega(t)v, \quad P = -\frac{\omega^2 r^2}{2} + p \tag{2.2}$$

Уравнения неразрывности (1.6) и для компоненты  $w$  (1.5) удовлетворяются тождественно. Для уравнения (2.1) ставится задача: на интервале  $1 \leq r \leq 2$  найти функцию  $v(t, r)$ , которая при  $t = 0$  удовлетворяет начальному условию  $v(0, r) = 0$ , а при  $t > 0$  – уравнению (2.1) и крайевым условиям  $v(t, 1) = v(t, 2) = 0$ . Радиус внешнего цилиндра  $R = 2$ .

Введем функцию  $V(r)$ , которая является стационарным решением поставленной задачи при  $t \rightarrow \infty$ , т.е.  $V(r)$  есть решение задачи

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right) = r, \quad V(1) = V(2) = 0 \quad (2.3)$$

Решение задачи (2.3) имеет вид [3]

$$V(r) = 1/8 \text{Re}(r^2 - 1)(r^2 - 4)r^{-1} \quad (2.4)$$

Соответствующее выражение для давления имеет вид

$$p = \left( \frac{\text{Re}}{8} \right)^2 \left[ \frac{r^2 - 1}{6r^2} (r^6 - 14r^4 + 85r^2 + 48) - 40 \ln r \right] - \\ - 2\omega \left( \frac{\text{Re}}{8} \right) [(r^2 - 1)(9 - r^2)0,25 - 4 \ln r] + \frac{\omega^2 r^2}{2} + p_0, \quad p_0 = \text{const}, \quad \omega = t \quad (2.5)$$

Используя решение (2.4), перейдем к новой формулировке задачи для уравнения (2.1). Введем новую функцию  $v_1 = v - V$ , которая удовлетворяет однородному уравнению и граничным и начальным условиями

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r} \right) \quad (2.6)$$

$$v_1(t, 1) = v_1(t, 2) = 0, \quad t \geq 0; \quad t = 0: \quad v_1(0, r) = -V(r), \quad 1 \leq r \leq 2 \quad (2.7)$$

Задача (2.6), (2.7) является задачей о переходе движения жидкости, заданного при  $t = 0$  условием (2.7), в состояние покоя в области между неподвижными стенками. Из-за тормозящего действия стенок жидкость успокаивается при  $t \rightarrow \infty$ . Решение уравнения (2.6) строится методом разделения переменных и имеет вид

$$v_1(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left(-\frac{\beta_n^2}{\text{Re}} t\right) Z_1(\beta_n r), \quad Z_1(\beta_n r) = I_1(\beta_n r) Y_1(2\beta_n) - I_1(2\beta_n) Y_1(\beta_n r) \quad (2.8)$$

где  $I_1(x)$  – функция Бесселя первого рода,  $Y_1(x)$  – функция Бесселя второго рода от действительного аргумента  $x$  [4].

Уравнение

$$I_1(\beta_n) Y_1(2\beta_n) - I_1(2\beta_n) Y_1(\beta_n) = 0 \quad (2.9)$$

имеет бесконечное счетное множество действительных простых нулей  $\beta_n$ , для которых известны асимптотические разложения [4]. Так как имеет место (2.9), то  $Z_1(r = 1) = 0$ ,  $Z_1(r = 2) = 0$  при любом  $\beta_n$ , поэтому граничные условия (2.7) удовлетворяются. Постоянные величины  $B_n$  определяются начальным условием (2.7)

$$B_n = -\frac{1}{H_n} \int_1^2 r V(r) Z_1(\beta_n r) dr, \quad H_n = \int_1^2 r Z_1^2(\beta_n r) dr$$

Решение уравнения (2.1), описывающее движение жидкости из состояния покоя между равноускоренно вращающимися цилиндрами, имеет вид

$$v(t, r) = V(r) + v_1(t, r) \quad (2.10)$$

где  $V(r)$  и  $v_1(t, r)$  определены выражениями (2.4) и (2.8). При увеличении времени  $t$ , как видно из (2.8), функция  $v_1(t, r)$  экспоненциально стремится к нулю и скорость  $u(t, r)$  стремится к предельной скорости  $V(r)$ . Характерное время выхода функции  $u(t, r)$  к своему предельному значению оценим, рассматривая экспоненциальную зависимость от времени первого члена разложения (2.8). Остальные члены разложения убывают быстрее, так как входящие в показатель экспоненты величины  $\beta_n$  имеют значения, большие  $\beta_1 = 3,1969$ . За характерное время выберем  $t_0 = \text{Re } \beta_1^{-2}$ . Время выхода решения на стационарное распределение скорости можно оценить как  $T_s = 4t_0 \approx 0,4 \text{ Re}$ , когда отличие скорости от стационарного значения составляет менее 2%.

Итак, построено одномерное нестационарное решение (2.10), описывающее переход жидкости из состояния покоя к стационарному распределению (2.4), между равномерно ускоренно вращающимися цилиндрами. Если в начальный момент времени  $t = 0$  задать не состояние покоя, а стационарное распределение (2.4), то распределение скорости будет оставаться равным начальному распределению (2.4), а давление будет меняться во времени по соотношению (2.5).

**3. Условие устойчивости.** Поставим вопрос об устойчивости этих одномерных движений жидкости, предполагая число Рейнольдса достаточно большим, а вносимые возмущения симметричными. Обобщим и перенесем на рассматриваемые движения критерий устойчивости Рэлея, который обычно используется для течений идеальной (лишенной вязкости) жидкости или для вязких течений, но близких к идеальным, когда при больших числах Рейнольдса можно пренебречь вязкими эффектами. Отличие рассматриваемого случая от обычных условий применимости критерия Рэлея состоит в том, что основное течение жидкости является существенно вязким и нестационарным. Действительно, распределение скорости (2.4) таково, что в уравнении (2.3) вязкие члены, несмотря на большое значение числа Рейнольдса, уравновешиваются силой углового ускорения и не могут быть опущены.

Основным элементом метода Рэлея является определение циркуляции скорости жидкого кольца при его смещении в близкое положение. Пусть  $\Gamma$  есть циркуляция скорости по круговому жидкому кольцу с центром на оси симметрии. В начальный момент времени  $t_0$  циркуляцию  $\Gamma(t_0)$  определяем по распределению скорости в основном невозмущенном движении  $\Gamma(t_0) = 2\pi r v(t_0, r)$ . Основное движение, исследуемое на устойчивость, с компонентами скоростей  $u = 0$ ,  $v(t, r)$ ,  $w = 0$ , где  $v(t, r)$  удовлетворяет уравнению (2.1), подвергнем возмущению и положим

$$v^* = v(t, r) + v'(t, r, z), \quad u^* = u'(t, r, z), \quad w^* = w'(t, r, z) \quad (3.1)$$

где компоненты возмущений имеют величину первого порядка малости  $\sim \text{Re}^{-1}$  и меняются по пространству так плавно, что действие на них вязкого оператора превращает их в члены второго порядка малости. Например

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \Delta v' - \frac{v'}{r^2} \right) \sim \text{Re}^{-2} \quad (3.2)$$

Рассмотрим производную по времени от циркуляции по жидкому кольцу при его смещении в возмущенном движении. Имеем [5]

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \text{ads} = 2\pi r a_\varphi = 2\pi r \left[ \frac{1}{\text{Re}} \left( \Delta v^* - \frac{v^*}{r^2} \right) - r - 2\omega u^* \right] \quad (3.3)$$

В правую часть равенства (3.3) подставим представление возмущенного решения (3.1) и воспользуемся уравнением (2.1) для  $v(t, r)$  и оценкой (3.2) для  $v'$ . Опуская члены второго порядка малости, имеем

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 2\pi r \left( \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u' \right) \quad (3.4)$$

Из положения  $r = r_0$  при  $t = t_0$  жидкое кольцо из-за наложенного на основное решение возмущения переводится в положение  $r_0 + \Delta r$  в момент времени  $t = t_0 + \Delta t$ . При этом переходе

$$\Delta r = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} u' dt \quad (3.5)$$

Интегрируя по времени уравнение (3.4) в пределах от  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$ , учитывая соотношение (3.5) и опуская члены второго порядка малости относительно  $\Delta r$  и  $\Delta t$ , получим

$$v^*(t_0 + \Delta t, r_0 + \Delta r) - v(t_0 + \Delta t, r_0 + \Delta r) = -\frac{\Delta r}{r_0} \left[ v(t_0, r_0) + r_0 \frac{\partial v}{\partial r}(t_0, r_0) + 2\omega(t_0)r_0 \right] \quad (3.6)$$

Для устойчивости одномерного движения необходимо, чтобы сумма центробежной и кориолисовой сил, действующих в радиальном направлении на смещенную частицу, не превосходила градиента давления в невозмущенном движении. Но в невозмущенном движении градиент давления балансируется центробежной и кориолисовой силами, вычисленными по скорости  $v(t, r)$ . Поэтому для устойчивости движения должно быть

$$\frac{v^*(t_0 + \Delta t, r_0 + \Delta r)}{r_0 + \Delta r} + 2\omega(t_0 + \Delta t)v^*(t_0 + \Delta t, r_0 + \Delta r) - \frac{v^2(t_0 + \Delta t, r_0 + \Delta r)}{r_0 + \Delta r} - 2\omega(t_0 + \Delta t)v(t_0 + \Delta t, r_0 + \Delta r) < 0$$

Используя для разности возмущенной и невозмущенной скоростей выражение (3.6) и отбрасывая величины второго порядка малости относительно  $\Delta r$  и  $\Delta t$ , получим локальное условие устойчивости профиля скорости  $v(t, r)$

$$\frac{\partial}{\partial r} [(v(t, r) + \omega(t)r)]^2 > 0 \quad (3.7)$$

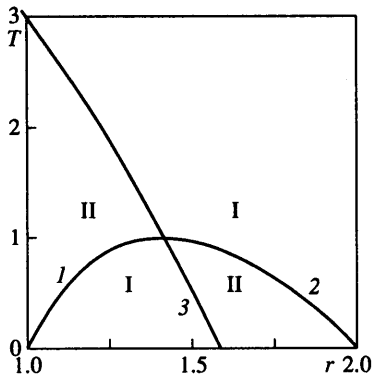
Обычное условие устойчивости Рэлея для невязкого стационарного течения в неподвижной системе координат есть [2]

$$\frac{\partial}{\partial r} (v(r)r)^2 > 0$$

Для устойчивости всего течения в данный момент времени необходимо, чтобы во всей области течения выполнялось локальное условие устойчивости (3.7).

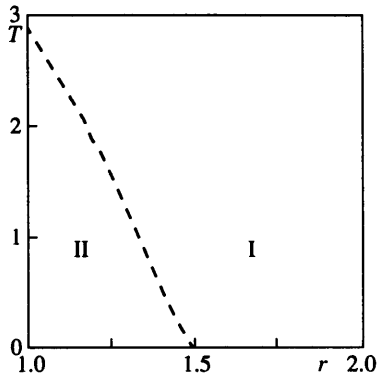
Рассмотрим более детально условие устойчивости для случая, когда в начальный момент времени  $t = 0$  задано распределение скорости  $v(0, r) = V(r)$ . Тогда  $v(t, r)$  равно  $V(r)$  для любого момента времени  $t > 0$ . Подставляя  $V(r)$  вместо  $v(t, r)$  в (3.7), получим области, в которых справедливо неравенство (3.7) и в которых оно несправедливо. Если в области течения образуется участок, на котором локальное условие устойчивости нарушено, то все течение в данный момент времени неустойчиво. На участке локальной неустойчивости течения при малом смещении кольца из жидких частиц возникают силы, поддерживающие это смещение. Поэтому на участке локальной неустойчивости следует ожидать появления вторичных течений жидкости, а на участке, где локальное условие (3.7) выполнено, — отсутствия вторичных течений. Этот качественный вывод подтверждается проделанными расчетами возмущенных течений жидкости.

Таким образом, область локальной неустойчивости течения совпадает с областью развивающихся вторичных течений, а в области локальной устойчивости вторичные течения отсутствуют. Поэтому построение областей локальной неустойчивости и



Фиг. 1

Фиг. 1. Области локальной устойчивости течения, когда при  $t = 0$   $V(r)$  задано соотношением (2.4). Кривые 1–3 представляют графики функций  $r_i$  ( $i = 1-3$ ), I – область локальной устойчивости, II – область локальной неустойчивости



Фиг. 2

Фиг. 2. Области локальной устойчивости течения, когда при  $t = 0$  жидкость покоится: I – область локальной устойчивости, II – область локальной неустойчивости

устойчивости течения дает более подробное качественное представление о возмущенном движении жидкости.

Удобно ввести переменную  $T = 8t/Re$ , которая полностью исключает число Рейнольдса из условия устойчивости. Таким образом, локальное условие устойчивости (3.7) в переменных  $T, r$  принимает универсальный вид и определяется только видом начального профиля скорости. На интервале  $0 < T \leq 1$  течение локально неустойчиво на участках  $1 < r < r_1, r_3 < r < r_2$  и локально устойчиво на участках  $r_1 \leq r \leq r_3, r_2 \leq r \leq 2$ , где

$$r_1 = [\tau - (\tau^2 - 4)^{1/2}]^{1/2}, \quad r_2 = [\tau + (\tau^2 - 4)^{1/2}]^{1/2}, \quad r_3 = \tau^{1/2}, \quad \tau = (5 - T)/2$$

На интервале  $1 < T \leq 3$  течение локально неустойчиво на участке  $1 < r < r_3$ , на участке  $r_3 \leq r \leq 2$  – локально устойчиво. При  $T > 3$  течение устойчиво на всем интервале  $1 \leq r \leq 2$ . На фиг. 1 в плоскости переменных  $r, T$  представлены области локальной устойчивости и неустойчивости течения.

Рассмотрим случай, когда при  $t = 0$  жидкость покоится. Области локальной устойчивости и неустойчивости течения были получены при помощи условия (3.7), в котором функция  $u(t, r)$  строилась численным методом решения одномерной задачи. Они представлены на фиг. 2. Моменту времени выхода на стационарное значение отвечает  $T_s = 3,2$ .

**4. Результаты численных исследований.** Полученные условия устойчивости означают, что малые возмущения, вносимые в поток в области его устойчивости, затухают. Но что происходит с возмущениями в случае неустойчивости потока, как эти возмущения развиваются и как из них формируются вторичные течения, нарушающие однородность состояния вдоль оси  $z$ ? Для ответа на поставленные вопросы были проведены вычислительные эксперименты. В основу численного исследования положена осесимметричная система уравнений Навье – Стокса (1.3)–(1.6), записанная в цилиндрической системе координат, вращающейся вместе с телом. Для конечно-разностной дискретизации уравнений Навье – Стокса использовалась схема, применявшаяся ранее для расчета двумерных осесимметричных течений [3].

Расчеты проводились для чисел Рейнольдса в диапазоне  $10 \leq Re \leq 200$  и различных длинах  $L$ . В расчетной области переменных использовались сетки  $100 \times 25$ , точность расчетов контролировалась уменьшением шагов по пространству и времени.

Одномерные нестационарные движения жидкости воспроизводились в рамках численной схемы, моделирующей двумерные осесимметричные течения. Бесконечная область по переменной  $z$  ограничивалась конечной областью  $0 \leq z \leq L$ , где  $L$  – длина области. Переменная  $r$  менялась в пределах  $1 \leq r \leq 2$ . Для системы уравнений (1.3)–(1.6), записанной в конечных разностях, ставилась начально-краевая задача (1.1), (1.2), (1.7). Если одномерное течение устойчиво, то конкретный выбор размера  $L$  не имеет значения, так как в этом случае одномерное движение воспроизводится при произвольном  $L$ . Если движение неустойчиво, то вычислительный эксперимент показывает, что при достаточно больших длинах  $L$  вдоль оси  $z$  образуется ячеистая периодическая структура потока. С точки зрения вычислительных затрат длину  $L$  удобно выбирать равной размеру отдельной ячейки, образующейся вследствие неустойчивости потока. Если длину  $L$  выбрать равной длине целого числа отдельных ячеек, то в области течения образуется соответствующее число вихревых ячеек. Если при фиксированном числе Рейнольдса длину  $L$  уменьшать, то с некоторых достаточно малых значений  $L$  одномерное численное решение становится устойчивым. Конкретное значение  $L$  выбиралось экспериментально из условия максимальной интенсивности вторичного течения.

Одномерное нестационарное решение (2.11), описывающее развитие стационарного профиля (2.4) из состояния покоя, воспроизводилось численным методом с точностью  $\sim 0,1\%$ . При малых числах Рейнольдса силы вязкости преобладают и течение всегда устойчиво. Для справедливости критерия устойчивости (3.7) должно быть  $Re > Re_c$ . Критическое число Рейнольдса  $Re_c$ , разделяющее устойчивые и неустойчивые режимы течения, может быть определено при помощи вычислительного эксперимента.

Для исследования влияния малых возмущений на одномерное течение жидкости в некоторый момент времени вводится возмущение скорости. В исходном одномерном движении компоненты  $u = w = 0$ , а  $v = v(r)$ . Для компонент возмущенного движения полагается

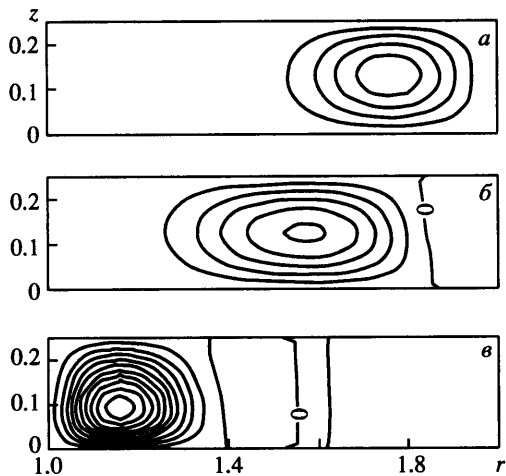
$$u = \delta f(r) \cos(\pi z/L), \quad w = \delta g(r) \sin(\pi z/L) L/\pi \quad f(r) = (r-1)^2(r-2)^2, \\ g(r) = -f(r) \left( \frac{2}{r-1} + \frac{2}{r-2} + \frac{1}{r} \right) \quad (4.1)$$

Компоненты  $u$  и  $w$  удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.2)$$

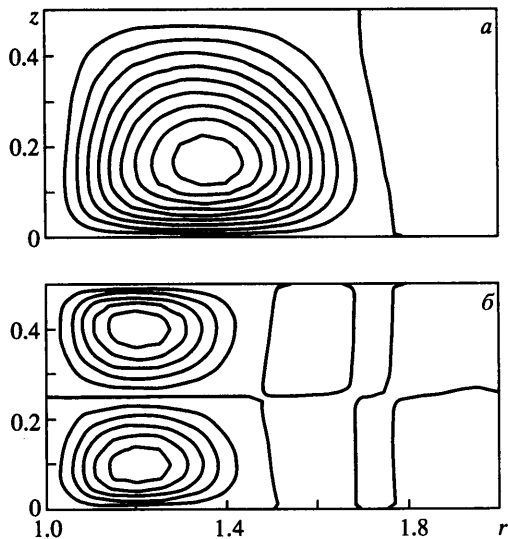
Компонента  $w$  удовлетворяет граничным условиям:  $w = 0$  при  $z = 0$  и  $z = L$ . На поверхностях  $r = 1$  и  $2$   $w = u = 0$ . Величина возмущения (4.1) определяется константой  $\delta$ . В большинстве рассмотренных случаев  $\delta = 0,02$ .

Рассмотрим влияние малого возмущения на одномерное стационарное распределение скорости (2.4), которое задается в качестве начального условия в момент времени  $t = 0$ . При  $Re = 80$ ,  $L = 0,25$  в соответствии с критерием (3.7) в области течения существуют области локальной неустойчивости (фиг. 1). В момент возмущения потока  $T = 8t/Re = 0,00032$ . К моменту времени  $T = 0,032$  в плоскости переменных  $(r, z)$  образуется вихрь с компонентами скорости  $(u, w)$ . На фиг. 3 в плоскости  $(r, z)$  в различные моменты времени показаны линии тока вектора с компонентами  $(u, w)$ , удовлетворяющими уравнению неразрывности (4.2). Центр тороидального вихря расположен в области локальной неустойчивости, отвечающей  $T = 0,032$  на фиг. 1. К моменту времени  $T = 0,16$  вихрь усиливается и его центр смещается в сторону меньших значений  $r$ . К моменту времени  $T = 0,48$  его интенсивность падает. При  $T = 1,76$  вихрь смещается в область локальной неустойчивости, отвечающую меньшим значениям  $r$  на фиг. 1, и его интенсивность увеличивается. К моменту времени  $T = 2,4$  вихрь прижимается к нижней стенке  $r = 1$ , ослабевает и затем полностью диссипирует.



Фиг. 3

Фиг. 3. Линии тока при  $Re = 80$  и  $L = 0,25$  в моменты времени  $T = 0,032$  (а),  $0,48$  (б),  $1,76$  (в). Интервал между линиями тока  $\Delta\psi = 0,008$



Фиг. 4

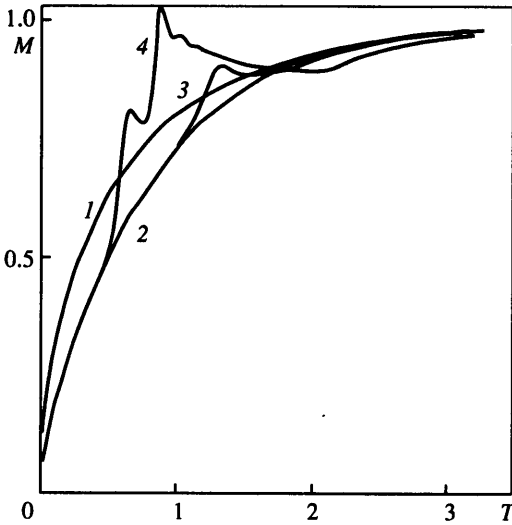
Фиг. 4. Линии тока при  $Re = 80$  в моменты времени  $T = 0,64$  (а),  $1,28$  (б). Интервал между линиями тока  $\Delta\psi = 0,02$

Прослеженная картина динамики вихрей качественно соответствует картине перемещения с течением времени центра вихря из области локальной неустойчивости, расположенной вблизи стенки  $r = 2$ , в область неустойчивости около стенки  $r = 1$ . Интенсивность возникающих вторичных течений не зависит от величины вносимых возмущений  $\delta$ . Расчеты показали, что при  $Re \leq 35$  вносимые возмущения затухают и  $Re_c = 35$ . Условие устойчивости (3.7) справедливо для  $Re > 35$ .

Аналогичные численные исследования были проведены для случая, когда основное одномерное движение жидкости начинается из состояния покоя. По-прежнему  $Re = 80$ , но  $L = 0,5$ . Возмущение вводилось, как и ранее, в момент  $T = 0,00032$ . На фиг. 4 показаны картины линий тока в различные моменты времени. В момент  $T = 0,64$  вблизи стенки  $r = 1$  имеется один крупный вихрь. Вблизи стенки  $r = 2$ , где течение локально устойчиво, вихрей нет. К моменту времени  $T = 1,28$  область неустойчивости вблизи стенки  $r = 1$  сужается и вихрь разбивается на два более мелких вихря. Далее с течением времени интенсивность вихрей падает и они исчезают. Как видно из фиг. 2, с течением времени область локальной неустойчивости также исчезает, поэтому действие сил, поддерживающих вихревое движение, прекращается. Проведенные вычисления подтверждают согласование результатов вычислительного эксперимента с результатами, ожидаемыми по критерию устойчивости (3.7).

Моменты сил, действующих со стороны жидкости на внутренний и внешний цилиндры, есть  $M_{z1}(T)$  и  $M_{z2}(T)$  соответственно. С течением времени распределение скорости переходит в стационарное распределение  $V(r)$  и  $M_{z1}(\infty) = M_{z2}(\infty) = 7,5\pi$ . Введем отношения моментов сил, положив  $M_1(T) = M_{z1}(T)/M_{z1}(\infty)$  и  $M_2(T) = M_{z2}(T)/M_{z2}(\infty)$ . На фиг. 5 приведены зависимости  $M_1(T)$  и  $M_2(T)$  для различных чисел Рейнольдса. Из фиг. 5 видно, что при  $Re = 35$  течение остается устойчивым, а при  $Re = 50$  и  $80$  образуются вторичные течения. Образование вторичных течений около внутреннего цилиндра приводит к резкому возрастанию моментов вращения, действующих на внутренний цилиндр. Второй пик на профиле величины  $M_1(T)$  при  $Re = 80$  отвечает моменту дробления вихря на два более мелких.





Фиг. 5. Зависимости моментов сил, действующих на цилиндры, от времени при  $L = 0,5$ , профиль  $M_2(T)$  при  $Re = 80$  (1), профиль  $M_1(T)$  при  $Re = 35$  (2), 50 (3), 80 (4)

**Заключение.** Для достаточно больших чисел Рейнольдса предложен критерий устойчивости вязких нестационарных вращательных осесимметричных течений жидкости (3.7), обобщающий критерий устойчивости Рэлея. Полученные численные результаты исследования эволюции малых возмущений, вносимых в поток, качественно подтверждают справедливость обобщенного критерия устойчивости Рэлея (3.7). Этот критерий устойчивости относится к случаю осесимметричных длинноволновых возмущений и его нельзя распространять на столь большие числа Рейнольдса, когда становятся существенными неосесимметричные возмущения и поток может стать турбулентным. Для характеристики перехода к турбулентному режиму течения обычно используется эффективное число Рейнольдса  $Re_{ef}$ ,  $Re_{ef} = Hu_0/\nu$ , где  $H = 0,5(R_2 - R_1)$  – полуширина канала,  $u_0$  – средняя скорость, определяемая по расходу жидкости через сечение канала. При этом  $Re_{ef} = 0,0611Re^2$ , где  $Re$  – введенное ранее число Рейнольдса. Для вычисления среднего значения  $u_0$  использован профиль скорости (2.4). При  $Re = 80$  число  $Re_{ef} \approx 390$ , что не превосходит критического числа Рейнольдса, при котором возможен турбулентный режим течения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00443).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Taylor G.I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1923. V. 233. P. 289–343.
2. Ди Прима Р.С., Суинни Х.Л. Неустойчивости и переход в течении между концентрическими вращающимися цилиндрами // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984. С. 169–217.
3. Градобоев М.И., Ларина И.Н., Рыков В.А., Шахов Е.М. Исследование нестационарных вихревых движений вязкой несжимаемой жидкости в полости вращающегося тела // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 3. С. 415–431.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовиц и И. Стиган М.: Наука, 1979. 830 с.
5. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.