

УДК 532.516:536.25

© 2001 г. А.Е. КОХ, П.В. МОКРУШНИКОВ, В.Н. ПОПОВ

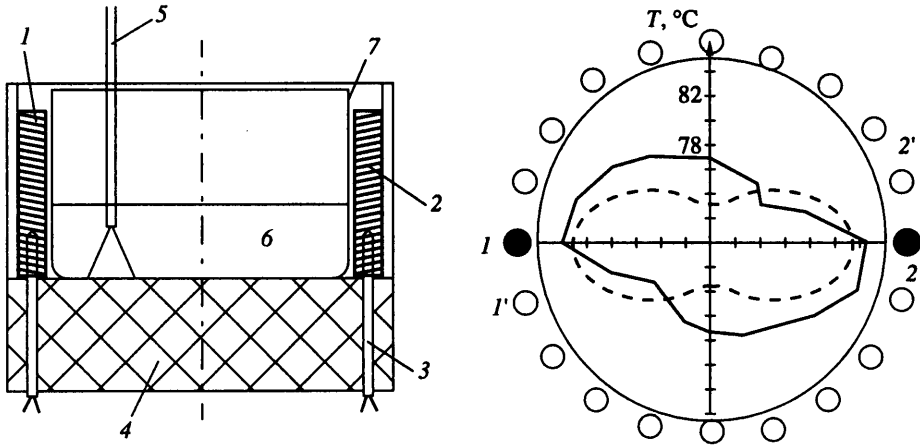
**КОНВЕКЦИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ
ПРИ ВРАЩЕНИИ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ**

Исследована асимптотическая структура ламинарной конвекции в плоском горизонтальном слое жидкости с неоднородным радиальным градиентом температуры на границах слоя. Задача возникает в связи с приложениями к технологии выращивания кристаллов модифицированным методом Чохральского с вращением теплового поля (Heat Field Rotation Method).

Проведено сравнение аналитической модели течения с результатами специально проведенных экспериментов на модельных жидкостях и на технологическом расплаве. Проанализированы условия адекватности модели и эксперимента, получены условия на значения параметров и теплофизические характеристики жидкостей, обеспечивающих применимость модели. Найден диапазон скорости вращения теплового поля, при котором происходит наилучшее перемешивание расплава в тигле.

При выращивании методом Чохральского некоторых кристаллов (например, боратов) из раствор-расплавов, обладающих высокими значениями динамической вязкости, конвективное течение расплава в тигле очень слабое. Вследствие недостаточного перемешивания может нарушиться однородность раствор-расплава, появиться термогравитационное и концентрационное расслоение расплава. Концентрационное переохлаждение и ячеистый рост очень часты для таких систем. Получение качественного кристалла становится проблематичным или даже невозможным. Необходимое в таких случаях принудительное перемешивание раствор-расплава может быть достигнуто при использовании формообразователя – мешалки, расположенной соосно с тиглем внутри него [1–3], вращением тигля [4], действием на расплав вращающихся перегородок, выступов, мешалок [5–6]. Этим контактными методами, как правило, сопутствуют вибрации вращательных механизмов, необходимость создания зазоров и/или уплотнений, усложняющих установки и, главное, вносящих случайные возмущения в процесс роста кристалла и являющихся источником загрязнения расплава. В работах [7–9] предложен новый подход, основанный на бесконтактном возбуждении азимутальных течений в расплаве путем вращения неоднородного теплового поля на стенке тигля. Тепловое поле формируется нагревательной печью, состоящей из равномерно расположенных по окружности вертикальных нагревательных элементов (фиг. 1, а). При поочередном подключении двух противоположных нагревателей 1–2, затем 1'–2' и т.д. (фиг. 1, б) на стенке тигля по φ создается распределение температуры, похожее на двухлопастной пропеллер.

В методе Чохральского градиент температуры в расплаве и на стенке тигля не зависит от азимутального угла φ . В методе, предложенном в [7–9], на этот градиент (базовый) накладывается еще один градиент, зависящий также и от φ . Для упрощения анализа в статье исследуется влияние на поле скоростей и температуры лишь наложенного градиента, базовый градиент не рассматривается. Предлагаемая аналитическая модель конвекции в плоском бесконечном горизонтальном слое жидкости позволит сделать выводы об основных особенностях предложенного метода. При



Фиг. 1. Схема печи, формирующей вращающееся тепловое поле на стенке тигля: *a* – вид сбоку; 1, 2 – вертикальные нагреватели, 3 – управляющие термопары, 4 – шамот, 5 – измерительный зонд, 6 – модельная жидкость, 7 – кварцевый стакан \varnothing 78 мм, в точках 1 и 2 размещены рабочие спай двух измерительных термопар; *b* – вид сверху и экспериментально измеренная температура на стенке тигля T_w при $k = 2$ (сплошная линия); штриховая линия – рассчитана по формуле (1.1) при $k = 2$; 1, 2 – два перегретых нагревателя

сравнении результатов аналитического и физического моделирования обсуждается адекватность аналитической модели.

В настоящей статье методом асимптотических разложений Пуанкаре [10] будет получено приближенное аналитическое периодическое решение уравнений Навье – Стокса в приближении Буссинеска, уравнений теплопроводности и неразрывности для ламинарной конвекции в плоском бесконечном горизонтальном слое жидкости с неоднородным радиальным градиентом температуры на границах слоя.

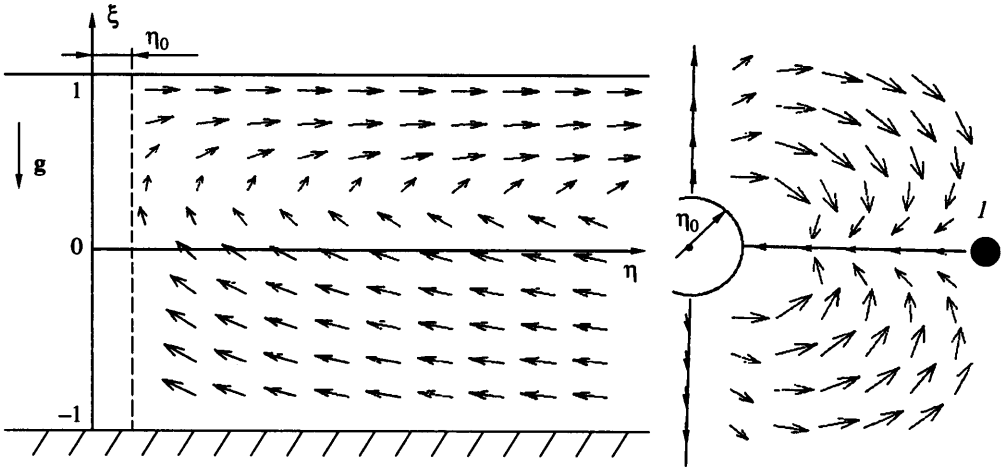
1. Стационарные граничные условия. Вычисления проводятся в цилиндрической системе координат, в безразмерных величинах. В качестве единицы длины выбирается половина расстояния между горизонтальными границами слоя h , единицы времени h^2/ν , где ν – кинематическая вязкость жидкости, единицы скорости ν/h , единица возмущения давления $\rho_0 \nu^2/h^2$, где ρ_0 – плотность жидкости, возмущение температуры $\delta_0 T = T_- - T_+$, где $T_-(\xi = -1)$ и $T_+(\xi = 1)$ температуры дна и поверхности слоя при $\eta = \eta_s = R_s/h$, $\varphi = 0$.

Малым параметром будем считать частоту вращения теплового поля на стенке тигля $\gamma = 2\pi/\tau$, где τ – период вращения теплового поля. Система уравнений при $\gamma = 0$ соответствует стационарному неоднородному нагреву границ слоя. Зададим граничные условия в модели, используя экспериментальные данные. Распределение температуры на стенке тигля T_w представим, опираясь на экспериментальные данные [7–9] в виде

$$T_w = \delta T (\xi + \frac{1}{3}) \cos(k\varphi), \quad \eta = R_w / h \quad (1.1)$$

где температура отсчитывается от средней температуры стенки тигля, δT – разность между максимальной и минимальной температурой на стенке тигля, k – число перегретых нагревателей. На фиг. 1, *b* показан график $T_w(\varphi)$ при $\xi = 0$, $\eta = R_w/h$, рассчитанный по формуле (1.1) при $k = 2$.

В аналитической модели рассматривается бесконечный плоский горизонтальный слой несжимаемой вязкой жидкости (фиг. 2, *a*): $\eta_0 \leq \eta \leq \infty$, $-1 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,



Фиг. 2. Поля скоростей в стационарном случае ($\gamma = 0$) при $k = 2$: а – в вертикальном сечении (плоскость $\eta\xi$, $\varphi = \pi/2$) и геометрия математической модели; б – в горизонтальном сечении (плоскость $\eta\varphi$, $\xi = 1$; в силу симметрии показана область $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$). Сплошными линиями обозначены границы секторов, l – перегретый нагреватель. При $\eta < \eta_0$ асимптотическое представление несправедливо

где η_0 – радиус области, внутри которой асимптотическое разложение несправедливо. Значение η_0 будет определено ниже. Температуры на верхней и нижней границах слоя и на боковой границе $\eta = \eta_0$ зададим в виде

$$T(\eta, \varphi) = \frac{\eta_s^3}{3\eta^3} \cos(k\varphi) \quad (\xi = -1) \quad T(\eta, \varphi) = -\frac{2\eta_s^3}{3\eta^3} \cos(k\varphi) \quad (\xi = 1)$$

$$T(\xi, \varphi) = -\frac{\eta_s^3}{2\eta_0^3} \left(\xi + \frac{1}{3} \right) \cos(k\varphi) \quad (\eta = \eta_0) \quad (1.2)$$

где температура отсчитывается от средней температуры жидкости. Граничные условия (1.2) не учитывают базовый градиент температуры, зависящий только от η и ξ . В реальных установках температурное поле на дне тигля $\sim \cos(k\varphi)$ можно получить, расположив под дном тигля нагреватель в виде многолучевой звезды. Перегревая k лучей этого нагревателя, причем угол между этими лучами одинаков, получим необходимое поле температуры на дне тигля. Число k в модели и в реальности назовем значением симметрии теплового поля.

В модели нижняя граница слоя – жесткая плоскость, на которой выполняются условия прилипания. Верхняя граница свободна, но при этом она остается везде плоской и недеформированной, что соответствует твердой крышке без трения. В реальности верхняя граница слоя деформируется, что приводит, например, к появлению на поверхности расплава k -лучевой звезды, описанной ниже. Для простоты вычислений деформация не учитывается. В модели не рассматривается термокапиллярная конвекция на поверхности слоя.

$$V_\xi = V_\varphi = V_\eta = 0 \quad (\xi = -1), \quad V_\xi = 0 \quad (\xi = 1) \quad (1.3)$$

где V_η, V_ξ, V_φ – компоненты скорости.

Для расчета полей скорости и температуры используем стационарные уравнения Навье – Стокса в приближении Буссинеска, уравнения неразрывности и теплопро-

водности в цилиндрических координатах [11]

$$(\mathbf{V} \nabla) V_\eta - \frac{V_\varphi^2}{\eta} = -\frac{\partial P}{\partial \eta} + \left(\Delta V_\eta - \frac{V_\eta}{\eta^2} - \frac{2}{\eta^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right)$$

$$(\mathbf{V} \nabla) V_\varphi + \frac{V_\eta V_\varphi}{\eta} = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \left(\Delta V_\varphi - \frac{V_\varphi}{\eta^2} + \frac{2}{\eta^2} \frac{\partial V_\eta}{\partial \varphi} \right) \quad (1.4)$$

$$(\mathbf{V} \nabla) V_\xi = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \Delta V_\xi + \text{Gr} T \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial(\eta V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\xi}{\partial \xi} = 0 \quad (1.6)$$

$$V_\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{V_\varphi}{\eta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + V_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \right) \quad (1.7)$$

$$\text{Gr} = \frac{g\beta h^3 \delta_0 T}{\nu^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$$

Здесь Gr, Pr – числа Грасгофа и Прандтля соответственно, P – давление, g – ускорение свободного падения, T – температура, отсчитываемая от средней температуры T_0 , β – коэффициент объемного расширения, χ – коэффициент температуропроводности. Вместе с граничными условиями для скорости и температуры (1.2) получаем краевую задачу. Будем искать асимптотическое представление решения задачи (1.2) – (1.7) при $\eta \rightarrow \infty$.

Решение ищем в виде произведения периодичной по φ функции и степенного ряда от $1/\eta$ (для простоты расчетов оставляя только два первых члена ряда)

$$V_\eta = \left(\frac{A_1(\xi)}{\eta} + \frac{A_2(\xi)}{\eta^2} \right) \cos(k\varphi) + O\left(\frac{1}{\eta^3}\right) \quad (1.8)$$

$$V_\varphi = \left(\frac{\Omega_1(\xi)}{\eta} + \frac{\Omega_2(\xi)}{\eta^2} \right) \sin(k\varphi) + O\left(\frac{1}{\eta^3}\right) \quad (1.9)$$

$$V_\xi = \left(\frac{z_1(\xi)}{\eta^2} + \frac{z_2(\xi)}{\eta^3} \right) \cos(k\varphi) + O\left(\frac{1}{\eta^4}\right) \quad (1.10)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Найдем асимптотическое представление функции температуры $T(\xi, \eta, \varphi)$. Подставим (1.8) – (1.10) в уравнение неразрывности (1.6), приравняв коэффициенты при одинаковых степенях η , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений при $\cos(k\varphi) \neq 0$

$$k\Omega_1 + z_1' = 0, \quad -A_2 + k\Omega_2 + z_2' = 0 \quad (1.11)$$

Если $\cos(k\varphi) = 0$, то уравнение (1.6) выполняется автоматически. Штрих сверху означает дифференцирование по ξ . Подставим (1.8) – (1.10) в (1.3) – (1.5)

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \left(\frac{A_1''}{\eta} + \frac{A_2''}{\eta^2} \right) \cos(k\varphi) + \frac{1}{\eta^3} \left((A_1^2 - z_1 A_1') \cos^2(k\varphi) + (k\Omega_1 A_1 + \Omega_1^2) \sin^2(k\varphi) \right) +$$

$$+ \frac{1}{\eta^3} (A_1(1 - k^2) - 2k\Omega_1) \cos(k\varphi) + \frac{1}{\eta^4} (k\Omega_2 A_1 + k\Omega_1 A_2 + 2\Omega_1 \Omega_2) \sin^2(k\varphi) -$$

$$- \frac{1}{\eta^4} (z_2 A_1' - 3A_1 A_2' + z_1 A_2') \cos^2(k\varphi) + \frac{1}{\eta^4} \left((3 - k^2) A_2 - 2k\Omega_2 \right) \cos(k\varphi) + O\left(\frac{1}{\eta^5}\right) \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = & \left(\Omega_1'' + \frac{\Omega_2''}{\eta} \right) \sin(k\varphi) - \frac{1}{\eta^2} ((\Omega_1^2 + z_1 \Omega_1') \cos(k\varphi) \sin(k\varphi) + (k^2 \Omega_1 + 2kA_1) \sin(k\varphi)) + \\ & + \frac{1}{\eta^3} (\Omega_2 A_1 - 2k\Omega_1 \Omega_2 - z_1 \Omega_2' - z_2 \Omega_1') \cos(k\varphi) \sin(k\varphi) + \\ & + \frac{1}{\eta^3} (3\Omega_2 - k^2 \Omega_2 - 2kA_2) \sin(k\varphi) + O\left(\frac{1}{\eta^4}\right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \left(\frac{z_1'(\xi)}{\eta^2} + \frac{z_2''(\xi)}{\eta^3} \right) \cos(k\varphi) + \text{Gr } T + O\left(\frac{1}{\eta^4}\right) \quad (1.14)$$

В правых частях уравнений (1.13), (1.14) члены $o(1/\eta^4)$, а в уравнении (1.12) члены $o(1/\eta^5)$ опущены. Стоящие в числителе полиномы от ξ ограничены ($|\xi| \leq 1$), при $\eta \rightarrow \infty$ знаменатели $\eta^n \rightarrow \infty$ и опущенные члены стремятся к нулю быстрее, чем оставленные. Исключим производные от давления из системы (1.12) – (1.14). Продифференцируем (1.12) по φ , (1.13) по η и приравняем коэффициенты при η^{-3} и η^{-2} в правых частях. Члены $o(1/\eta^4)$ опущены. Получим условие совместности системы

$$3\Omega_1' = kA_1', \quad \Omega_2' = kA_2' \quad (1.15)$$

Продифференцируем (1.13) по ξ и (1.14) по φ и приравняем правые части

$$\begin{aligned} \text{Gr } \frac{\partial T}{\partial \varphi} = & \left(\Omega_1''' + \frac{\Omega_2'''}{\eta} \right) \sin(k\varphi) - \\ & - \frac{1}{\eta^2} ((\Omega_1^2 + z_1 \Omega_1')' \cos(k\varphi) \sin(k\varphi) + k(k\Omega_1 + 2A_1 + z_1')' \sin(k\varphi)) + \\ & + \frac{1}{\eta^3} (\Omega_2 A_1 - 2k\Omega_1 \Omega_2 - z_1 \Omega_2' - z_2 \Omega_1')' \cos(k\varphi) \sin(k\varphi) + \\ & + \frac{1}{\eta^3} ((3 - k^2)\Omega_2 - 2kA_2 + kz_2')' \sin(k\varphi) + O\left(\frac{1}{\eta^4}\right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Из граничных условий функция $T(\xi, \eta, \varphi) \sim \cos(k\varphi)$, значит, коэффициенты в (1.16) перед $\cos(k\varphi)\sin(k\varphi)$ должны быть равны нулю

$$\left(\Omega_1^2 + z_1 \Omega_1' \right)' = 0 \quad (1.17)$$

$$\left(\Omega_2 A_1 - 2k\Omega_1 \Omega_2 - z_1 \Omega_2' - z_2 \Omega_1' \right)' = 0 \quad (1.18)$$

Решая совместно (1.11), (1.15), (1.17) и учитывая условия прилипания (1.13) на дне $\Omega_1(-1) = A_1(-1) = z_1(-1) = 0$

получаем, что $\Omega_1(\xi) = A_1(\xi) = z_1(\xi) = 0$. Уравнение (1.18) при этом выполняется автоматически.

Проинтегрируем (1.16) по φ

$$T = -\frac{1}{\text{Gr}} \left(\frac{1}{\eta^3} \left((3 - k^2)A_2' - 2k\Omega_2' + 3z_2'' \right) + \frac{A_2''}{\eta} \right) \cos(k\varphi) + C(\xi) + O\left(\frac{1}{\eta^4}\right) \quad (1.19)$$

При интегрировании $\partial T/\partial \eta$ по η получим такое же выражение для $T(\xi, \eta, \varphi)$. Следовательно, функция $C(\xi)$ зависит только от ξ . Подставим (1.19), (1.8)–(1.10)

в уравнение теплопроводности (1.7). Пренебрегаем членами $o(1/\eta^5)$ при $\eta \rightarrow \infty$, поскольку в числителях они имеют ограниченные полиномы от ξ ($|\xi| \leq 1$). Числители оставшихся дробей в (1.7) с одинаковыми знаменателями приравняем к нулю, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A_2'''(\xi) = \Omega_2'''(\xi) = z_2^{IV}(\xi) = C'(\xi) = 0 \quad (1.20)$$

Функции $A_2(\xi)$ и $\Omega_2(\xi)$ в силу решения являются полиномами второй степени, а $z_2(\xi)$ полиномом третьей степени. Коэффициенты этих полиномов находим из граничных условий для температуры (1.2), скорости (1.13), условия совместности (1.15), условия замкнутости потока, уравнения неразрывности (1.11)

$$z_2(-1) = A_2(-1) = \Omega_2(-1) = 0 \quad (z(1) = 0) \quad (1.21)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\eta_0}^{\infty} V_{\varphi} d\eta d\xi = 0 \quad (1.22)$$

При выводе (1.21) использовалось следствие из (1.9): при $\varphi = 2\pi/k$ $V_{\varphi} = 0$. При нахождении коэффициентов получается, что при $k = 1$ система имеет неинтересное тривиальное решение $z_2(\xi) = A_2(\xi) = \Omega_2(\xi) = 0$. Для $k = 2, 3, \dots, n$ получаем асимптотику решения уравнений (1.2)–(1.7)

$$V_{\eta}(\xi, \eta, \varphi) = C(\xi, \eta) \cos(k\varphi) + O(1/\eta^3)$$

$$V_{\varphi}(\xi, \eta, \varphi) = kC(\xi, \eta) \sin(k\varphi) + O(1/\eta^3)$$

$$C(\xi, \eta) = -\frac{\eta_s^3 Gr}{8(k^2 - 1)} \frac{\xi^2 + \frac{2}{3}\xi - \frac{1}{3}}{\eta^2} \quad (1.23)$$

$$V_{\xi}(\xi, \eta, \varphi) = \frac{\eta_s^3 Gr}{24} \frac{(\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1)}{\eta^3} \cos(k\varphi) + O\left(\frac{1}{\eta^4}\right)$$

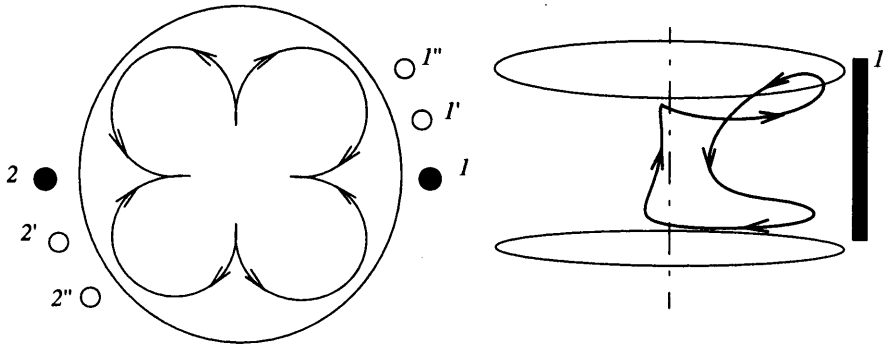
$$T(\xi, \eta, \varphi) = -\frac{\eta_s^3}{2} \frac{(\xi + \frac{1}{3})}{\eta^3} \cos(k\varphi) + O\left(\frac{1}{\eta^4}\right) \quad (1.24)$$

Сделаем оценку для η_0 . В уравнении теплопроводности (1.7) после подстановки скорости и температуры (1.19), (1.8)–(1.10) пренебрегаем членами $o(1/\eta^5)$ при $\eta \rightarrow \infty$: $o(\eta^{-5}) \leq Gr \eta^{-5} \leq \epsilon$, где ϵ – некоторая малая величина. Отсюда следует, что приближение справедливо при

$$\eta \geq \eta_0 = M Gr^{1/5} \quad (1.25)$$

где $M = M(\epsilon)$, величина M определена ниже из эксперимента.

В реальности течение расплава в тигле, вызываемое градиентом (1.2), можно условно разделить на три зоны: осевую – в окрестности оси симметрии при $\eta < \eta_0$, течение в которой не описывается (1.23), (1.24), центральную зону – внешнюю по отношению к осевой зоне, здесь действует асимптотика (1.23), (1.24), зона в окрестности боковых стенок тигля, в которой находится динамический погранслой. Такое возможно при малом базовом градиенте температуры, когда поле скорости и температуры в жидкости определяет в основном неоднородные граничные условия (1.2). Такой случай был реализован при физическом моделировании, описанном ниже. Как показывают приведенные ниже технологические эксперименты, толщина погранслоя и радиус осевой зоны составляют несколько миллиметров. Центральная зона имеет размер несколько десятков миллиметров, именно в ней происходят основные процессы теплопереноса при росте кристаллов. Течение в погранслое у боковой



Фиг. 3. Линии тока при $k = 2$ в стационарном случае ($\gamma = 0$): *a* – вид сверху, построено по уравнению (1.26), *1* и *2* – перегретые нагреватели; *b* – вид сбоку, *1* – перегретый нагреватель. Показан лишь один из четырех секторов

стенки тигля не сильно изменяет распределение температуры из-за небольшой толщины погранслоя.

При перегретой нижней границе $\delta_0 T > 0$ полученное в модели распределение температуры в бесконечном слое жидкости на расстоянии R_w от центра координат совпадает с полем температуры на стенке тигля радиуса R_w , создаваемое при перегреве k нагревателей, равномерно расположенных вокруг тигля (сравните (1.1) и (1.24)). Можно считать, что в середине тигля, в центральной зоне, поля скорости и температуры жидкости будут близки к (1.24), когда базовые градиенты температуры малы. Это подтверждается результатами модельных и технологических экспериментов, приведенных ниже. На фиг. 2 даны векторные поля скоростей в плоскости $\eta\xi$ ($\varphi = \pi/2$) и $\eta\varphi$ ($\xi = 1$), рассчитанные по (1.23).

Линии тока имеют вид

$$b(\xi + 1)^2(\xi - 1) = \eta^{1-k^2}, \quad c|\sin(k\varphi)| = \eta^{k^2}, \quad c, b = \text{const} \quad (1.26)$$

На фиг. 3, *a* даны линии тока (1.26) для $k = 2$, примерно соответствующие линиям тока в реальном расплаве, находящемся в тигле с двумя перегретыми противоположными нагревателями (при $\varphi = 0$ и π), если базовый градиент температуры мал. Около нагревателей жидкость на поверхности слоя движется от горячей стенки к центру (нижняя граница у нагревателей перегрета, $\delta_0 T > 0$), около дна движется от центра к стенке. Частичка жидкости движется внутри одного из четырех секторов, на которые разбивается весь объем жидкости. Каждый сектор разбивается еще на два замкнутых вихря (фиг. 3, *b*) – донный и поверхностный, вращающиеся в разные стороны. На поверхности жидкости видна четырехлепестковая "ромашка" (фиг. 3, *a*). Подобного рода течение описано в [12–13].

Течение наиболее интенсивно ближе к оси ξ и у верхней горизонтальной границы слоя. Чем дальше от центра (чем больше η), тем менее интенсивно течение. У дна образуется застойная зона. При попадании туда частичка жидкости может надолго там остаться, слабо участвуя в теплообмене всего слоя.

Течение жидкости в тигле (поля скорости и температуры) определяется тепловыми условиями на стенке тигля. Положение поднимающихся и опускающихся потоков задается положением перегретых нагревателей около тигля. Если пустить по стенке тигля тепловую волну, т.е. если перегретыми станут не нагреватели *1* и *2* (фиг. 1, *b* и 3, *a*), а соседние с ними *1'* и *2'* и т.д., то картина течения жидкости также начнет, как следует из эксперимента, описанного ниже, поворачиваться вокруг оси ξ . "Ромашка" начнет вращаться вслед за тепловой волной. В модели тепловая волна на стенке тигля представляет собой синусоиду, как на фиг. 1, *b*, при этом "гантелька" вращается

вокруг оси ξ с частотой γ . Азимутальная скорость V_ϕ не имеет постоянной составляющей. В реальности профиль температуры искажен инерционным остыванием соседних нагревателей (фиг. 1, б) и появляется постоянная составляющая азимутальной скорости V_ϕ .

2. Течения при нестационарных граничных условиях. Для анализа картины течения в тигле, возникающего при создании на боковой стенке тигля нестационарного неоднородного распределения температуры типа "бегущая волна", рассмотрим ламинарную нестационарную конвекцию в бесконечном плоском горизонтальном слое жидкости с нестационарным неоднородным радиальным градиентом температуры на границах слоя.

В отличие от стационарного случая возмущение температуры будем измерять в $\delta_2 T = \delta T_- - \delta T_+$, где $\delta_2 T$ – разность между амплитудами колебаний температуры на дне δT_- ($\xi = -1$) и на поверхности слоя δT_+ ($\xi = 1$) при $\eta = \eta_s = R_s/h$.

При вращении теплового поля по стенке тигля изменение температуры на ней (от средней температуры) $T_w(\xi, \varphi)$ при $\eta = R_w/h$ из экспериментальных данных описывается уравнением (ср. с фиг. 1, б и уравнением (1.1))

$$T_w = \delta T(\xi + 1/3) \cos(k\gamma t + k\varphi + \delta_0) \quad (2.1)$$

где $\delta_0(\varphi, R_w)$ – фаза волны, t – время.

В аналитической модели рассматривается бесконечный плоский горизонтальный слой несжимаемой вязкой жидкости (фиг. 2, а): $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$, $-1 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, где η_1 и η_2 – границы области, внутри которой справедливо асимптотическое представление решения. Значения η_1 и η_2 будут определены ниже. Температуры на верхней и нижней границах слоя и на боковых границах зададим в виде

$$\begin{aligned} T(\xi, \varphi) &= 4Q \left[\eta_1 \gamma^2 \frac{k^5}{2(k^2 - 1)} + \frac{1}{\eta_1^3} \right] \left(\xi + \frac{1}{3} \right) \cos(x) \quad (\eta = \eta_1) \\ T(\xi, \varphi) &= 4Q \left[\eta_2 \gamma^2 \frac{k^5}{2(k^2 - 1)} + \frac{1}{\eta_2^3} \right] \left(\xi + \frac{1}{3} \right) \cos(x) \quad (\eta = \eta_2) \\ T(\eta, \varphi) &= \frac{16}{3} Q \left[\eta \gamma^2 \frac{k^5}{2(k^2 - 1)} + \frac{1}{\eta^3} \right] \cos(x) \quad (\xi = 1) \\ T(\eta, \varphi) &= -\frac{8}{3} Q \left[\eta \gamma^2 \frac{k^5}{2(k^2 - 1)} + \frac{1}{\eta^3} \right] \cos(x) \quad (\xi = -1) \\ Q &= \frac{\eta_s^3 (k^2 - 1)^3}{4 \left(\eta_s^4 \gamma^2 k^3 (k^2 - 3) + 2(k^2 - 1)^3 \right)}, \quad x = k\varphi + k\gamma t + \alpha \eta^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $k = 2, 3, 4, \dots, n$; $\alpha = \alpha(\gamma)$. При $\gamma = 0$ $\alpha = 0$. Базовый градиент температуры, зависящий только от η и ξ , не учитывается. Как и при стационарных граничных условиях, нижняя граница слоя – жесткая плоскость, на которой выполняются условия прилипания. Верхняя граница – твердая крышка без трения.

Для расчета полей скорости и температуры используем нестационарные уравнения Навье – Стокса в приближении Буссинеска для несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрических координатах. Вместе с граничными условиями (2.2) получаем краевую задачу. Будем искать асимптотическое представление решения этой нестационарной

задачи в виде

$$\begin{aligned} V_\eta &= \left(\frac{A_2(\xi)}{\eta^2} \right) \cos(x) + O\left(\frac{1}{\eta^3} \right), \quad V_\varphi = \left(\frac{\Omega_2(\xi)}{\eta^2} \right) \sin(x) + \Sigma(\xi) \cos(x) + O\left(\frac{1}{\eta^3} \right), \\ V_\xi &= \left(\frac{z_2(\xi)}{\eta^3} \right) \cos(x) + O\left(\frac{1}{\eta^4} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

В модели не рассматривается, каким образом меняются поля скорости и температуры во время перехода от стационарных к нестационарным граничным условиям. Подставим (2.3) в уравнение неразрывности (1.6), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений при $\cos(x) \neq 0$

$$-A_2 + k\Omega_2 + z_2' = 0, \quad 2\alpha A_2 + k\Sigma = 0 \quad (2.4)$$

Если $\cos(x) = 0$, то уравнение неразрывности (1.6) выполняется автоматически.

Подставим (2.3) в нестационарные уравнения Навье – Стокса и найдем температуру $T(t, \xi, \eta, \varphi)$ аналогично (1.19)

$$\begin{aligned} Gr_1 T &= \frac{\eta}{k} (-\gamma \Sigma' + 4\alpha(\alpha\Omega_2' + \Sigma')) \cos(x) + \frac{1}{k\eta} ((\gamma + 4\alpha)\Omega_2' + (k^2 + 1)\Sigma') \sin(x) - \\ &- \frac{1}{k\eta^3} ((3 - 2k^2)\Omega_2' + kA_2') \cos(x) + F(\xi) + O(\alpha^3\eta^3) + O\left(\frac{\alpha^2}{\eta}\right) + O\left(\frac{\alpha}{\eta^2}\right) + O\left(\frac{1}{\eta^4}\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$Gr_1 = \frac{g\beta h^3 \delta_2 T}{\nu^2}$$

$$O(\alpha^3\eta^3) = \eta^3 \frac{8\alpha^3}{k^2} A_2' \sin(x) + O(\alpha^3\eta^2)$$

$$O\left(\frac{\alpha^2}{\eta}\right) = \frac{2}{\eta} \alpha^2 z_2 \cos(x) + O\left(\frac{\alpha^2}{\eta^2}\right)$$

$$\begin{aligned} O\left(\frac{\alpha}{\eta^2}\right) &= \frac{1}{k\eta^2} \left(k(\Omega_2 \Sigma)' \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right) - (z_2 \Sigma' + A_2 \Sigma)' \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \right) \right) - \\ &- \frac{1}{\eta^2} (\gamma + 8\alpha) z_2 \sin(x) + O\left(\frac{\alpha}{\eta^3}\right) \end{aligned}$$

$$O\left(\frac{1}{\eta^4}\right) = \frac{1}{2k\eta^4} (z_2' \Omega_2 - z_2 \Omega_2') \sin^2(x) -$$

$$-\frac{1}{\eta^5} (9 - k^2) z_2 \cos(x) + \frac{2A_2 z_2}{\eta^6} \sin^2(x) + O\left(\frac{1}{\eta^7}\right)$$

Функция температуры $T(t, \xi, \eta, \varphi)$ должна иметь множителем только $\cos(x)$, чтобы удовлетворить граничным условиям (2.2). Второй член в (2.5) приравняем к нулю и получим зависимость α от γ

$$\alpha = -\gamma \frac{k^3}{2(k^2 - 1)} \quad (2.6)$$

При выводе (2.6) считается, что условие (1.15) верно и для нестационарного случая. Членами $O(\alpha^3\eta^3)$, $O(\alpha^2/\eta)$, $O(\alpha/\eta^2)$ при $\alpha \rightarrow 0$ пренебрегаем. Условия, при которых это

$$V_\eta = Gr_1 \left(\xi_2 + \frac{3}{2} \xi - \frac{1}{3} \cos(x) + O\left(\frac{\eta_3}{1}\right) \right)$$

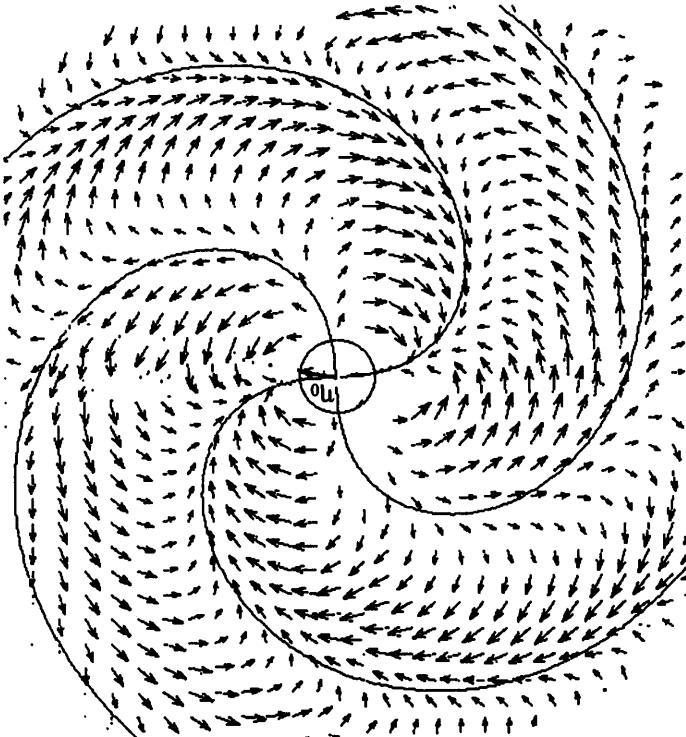
функции $A_2(\xi)$ и $\Omega_2(\xi)$ в силу решения являются полиномами второй степени, а $z_2(\xi)$ полиномом третьей степени. Коэффициенты этих полиномов находим из граничных условий для температуры (2.2), скорости (1.3), условия совместности (1.15), условия замкнутости потока (1.23), уравнений неразрывности (2.4)

$$A_2''(\xi) = \Omega_2''(\xi) = z_2''(\xi) = \Sigma''(\xi) = F'(\xi) = 0$$

приравняем к нулю $\gamma \rightarrow 0$. Числители оставшихся дробей с одинаковыми знаменателями по отдельности ми. Стоящими в числителях членами, умноженными на γ , γ^2 и т.д., пренебрегаем при стоят ограниченные функции от ξ и ϕ (полиномы от ξ при $|\xi| \leq 1$, умноженные на $\cos(x)$, $\sin(x)$ или $\cos^2(x)$) и при достаточно больших η эти члены становятся малы- Как и в стационарном случае, пренебрежем членами $O(1/\eta^4)$, поскольку в числителе проводности, получим амплитудное уравнение для полиномов $A_2(\xi)$, $\Omega_2(\xi)$, $\Sigma(\xi)$, $z_2(\xi)$.
 Подставим выражения для скорости (2.3) и температуры (2.5) в уравнение тепло-

жителем $1/\eta^3$.
 нарном случае, пренебречь, но они убывают быстрее, чем оставленный член с мно- справедливо, обсуждаются ниже. Членами $O(1/\eta^4)$ при $\eta > \eta_1$ можно, как и в стацио-

Фиг. 4. Поля скоростей в фиксированный момент времени при $k = 2$ в нестационарном случае ($\gamma \neq 0$) в плоскости $\eta\phi$ ($\xi = 1$). Спиральными линиями показаны границы между секторами. Спирали вращаются вокруг оси ξ с угловой скоростью γ



$$V_\varphi = Gr_1 Q \left(\xi^2 + \frac{2}{3} \xi - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{k}{(k^2 - 1) \eta^2} \sin(x) + \gamma \frac{k^2}{(k^2 - 1)^2} \cos(x) \right) + O \left(\frac{1}{\eta^3} \right) \quad (2.7)$$

$$V_\xi = -Gr_1 Q \left(\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1 \right) \frac{\cos(x)}{3\eta^3} + O \left(\frac{1}{\eta^4} \right),$$

$$T = 4Q \left[\eta \gamma^2 \frac{k^5}{2(k^2 - 1)} + \frac{1}{\eta^3} \right] \left(\xi + \frac{1}{3} \right) \cos(x) + O \left(\frac{1}{\eta^4} \right)$$

Полученное в модели распределение температуры в бесконечном слое жидкости на расстоянии R_w от центра координат совпадает с полем температуры на стенке тигля радиуса R_w , создаваемое при поочередном подключении k нагревателей, равномерно расположенных вокруг тигля (сравните (2.1) и (2.7)). Как и в стационарном случае, в середине тигля при $\eta_1 \leq \eta \leq R_w/h$ поля скорости и температуры жидкости будут близки к (2.7), если базовый градиент температуры мал.

На фиг. 4 показано векторное поле скорости в плоскости $\eta\varphi$ ($\xi = 1$), рассчитанное по (2.7). Когда включается вращение теплового поля, "ромашка", изображенная на фиг. 2, б и 3, а, начинает вращаться вслед за тепловой волной. Границы между лепестками начинают искривляться. При установившемся течении "ромашка" вращается вокруг оси ξ с постоянной угловой скоростью γ , при этом границы лепестков закручиваются в спирали (фиг. 4).

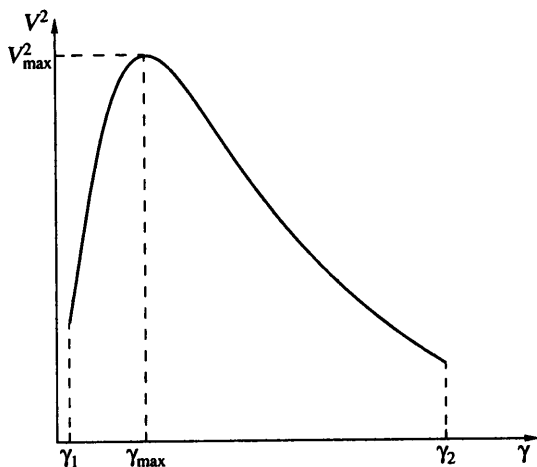
При выращивании кристаллов нужно стремиться к максимальной гомогенизации расплава и максимально возможному уменьшению толщины диффузионного пограничного слоя у фронта кристаллизации кристалла, что снижает вероятность создания концентрированного переохлаждения перед фронтом кристаллизации кристалла и появлению ячеистого роста, приводящего к ухудшению качества кристалла. Это достигается при максимально большой скорости расплава. Используя (2.7), вычислим $V^2 = V_\eta^2 + V_\varphi^2$

$$V^2 = Gr_1^2 Q^2 \frac{8}{9(k^2 - 1)^2} \left(\frac{2}{\eta^2} + F(\sin \theta + \sin(2x + \theta)) \right)$$

$$F = \left(\left(\frac{k^4 - 3k^2 + 1}{\eta^4} + \gamma \frac{k^4}{(k^2 - 1)^2} \right)^2 + \left(\frac{k^3}{k^2 - 1} \frac{2\gamma}{\eta^2} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$\sin \theta = F^{-1} \left(\frac{k^4 - 3k^2 + 1}{\eta^4} + \gamma \frac{k^4}{(k^2 - 1)^2} \right) \quad (2.8)$$

На фиг. 5 представлена зависимость максимального значения V^2 (при $x = \pi/4 - \theta/2$) в фиксированной точке на поверхности слоя от частоты вращения теплового поля γ . Ниже показано, что асимптотика (2.7) существует при $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$. При $\gamma > \gamma_{\max}$ импульс движения уже не полностью передается от частиц у границ слоя к соседним частицам, а частично гасится следующим противоположным импульсом. При нагреве реального тигля из-за его тепловой инерционности при достаточно большой γ нестационарное неоднородное распределение температуры на стенке тигля превращается в стационарное однородное, при котором азимутальное течение в тигле отсутствует. При некоторых параметрах системы γ_{\max} может быть больше γ_2 , тогда максимальное перемешивание достигается при γ_2 .



Фиг. 5. Зависимость максимального значения V^2 в фиксированной точке на поверхности слоя от частоты вращения теплового поля γ

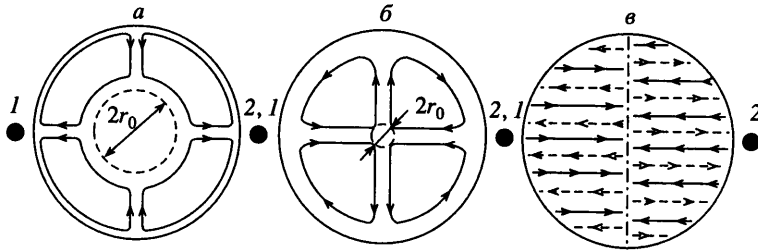
3. Условия существования течения. Рассмотрим, при каких η справедливо асимптотическое представление решения (2.7). В стационарном и нестационарном случаях при подстановке выражений для скорости и температуры в уравнение теплопроводности пренебрегается членами $O(1/\eta^5)$, т.е. считается, что эти члены должны быть малыми величинами по сравнению с составленными. В (1.25) дана оценка η_0 для стационарного случая. Подставляя вместо $G\gamma$ выражение $G\gamma_1 Q$ можно получить оценку η_1 для нестационарного случая.

В нестационарном случае в выражении для температуры (2.5) члены $O(\alpha^2/\eta)$, $O(\alpha/\eta^2)$ при $\alpha \rightarrow 0$ и при $\eta > \eta_1$ стремятся к нулю, ими можно пренебречь. Членами $O(\alpha^3\eta^3)$ при $\alpha \rightarrow 0$ можно пренебречь, если отношение $O(\alpha^3\eta^3)$ к оставленному члену с η меньше некоторой малой величины: $O(\alpha^3\eta^3)/\eta\alpha^2\Omega' \leq \epsilon_1$. Отсюда получается, что выражение для температуры (2.5) справедливо при $\eta \leq \eta_3 = \sqrt{\epsilon_1/\alpha}$.

Асимптотика (2.7) справедлива, если после подстановки выражений для скорости и температуры (2.7) в нестационарное уравнение теплопроводности член уравнения, содержащий η , мал: $\eta\alpha^2\Omega'/Pr \leq \epsilon_2$ и им можно пренебречь при $\gamma \rightarrow 0$. Это выполняется при $\eta \leq \eta_2 = Pr \epsilon_2/(\gamma^3 G_1 Q)$, где ϵ_2 – некая малая величина. Величина η_2 определяет внешнюю границу области существования течения, описываемого (2.7). При этом необходимо, чтобы $\eta_2 < \eta_3$. Это выполняется, если γ превышает некоторую очень малую величину γ_1 . При увеличении γ до γ_2 значение η_2 начнет уменьшаться, до η_1 , и течение, описываемое (2.7), исчезнет. Асимптотика (2.7) существует при $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$. Значения η_1 , η_2 , γ_1 , γ_2 можно определить из эксперимента, как было определено η_0 . Из модели они не определяются, поскольку об ϵ_1 , ϵ_2 ничего не известно, кроме того, что они малы.

4. Экспериментальное моделирование вращающегося теплового поля. Для экспериментального моделирования была собрана следующая установка (фиг. 1, а).

Вокруг кварцевого стакана с внутренним диаметром 78 мм равномерно расположено 20 вертикальных нагревательных спиралей высотой 40 мм и диаметром 6 мм. Сбоку нагреватели закрыты стеклянным цилиндром. Все это помещено на теплоизолирующую подставку из шамота. Каждый нагреватель по отдельности подключен к управляющему блоку, что дает возможность либо постоянно нагревать два противоположных нагревателя (моделирование стационарного случая при $k = 2$), либо поочередно включать нагрев двух противоположных нагревателей, так что по стенке стакана бежит тепловая волна.



Фиг. 6. Течение на поверхности слоя жидкости при стационарном нагреве двух противоположных нагревателей 1, 2. Пунктиром в центре на а и б обозначена область, где нет ламинарного конвективного течения, а – этиловый спирт, б – дистиллированная вода, в – смесь воды с глицерином. Линиями со стрелками обозначено течение по поверхности слоя, штриховыми линиями со стрелками – течение у дна. Штрихпунктир – граница встречи двух течений

Для моделирования стационарного случая ($k = 2$) постоянно грелись две противоположные спирали. Для визуализации течения в жидкость подсыпались частички – трассеры (алюминиевая пудра). Высота слоя жидкости во всех экспериментах $d = 2h = 20$ мм. Использовались три жидкости: этиловый спирт ($\nu = 2,2 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\chi = 1 \cdot 10^{-7}$ м²/с), дистиллированная вода H₂O ($\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\chi = 1,4 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $\beta = 2,1 \cdot 10^{-4}$ К⁻¹), смесь воды и глицерина ($\nu = 2,3 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\chi = 1,2 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $\beta = 2,9 \cdot 10^{-4}$ К⁻¹).

На поверхности слоя спирта возникает четыре устойчивых вихря (фиг. 6, а). Это течение занимает почти всю поверхность, за исключением центральной застойной области радиусом $r_0 = 2-3$ мм ($\eta_0 = 0,2$). По поверхности слоя от перегретых участков стенки стакана спирт движется к центру, встречается с другим потоком, поворачивает к холодным участкам и замыкается в четыре "лепестка ромашки". Картина течения в средней части тигля вне центральной застойной области и вне динамического погранслоя у боковой стенки тигля описывается уравнениями (1.24) (сравните фиг. 2, б, 3, а с фиг. 6, а).

На поверхности слоя воды также возникает четыре вихря, но с обратной, чем у спирта, закруткой вращения (фиг. 6, б). В слое воды "ромашка" занимает меньше места, чем в слое спирта, в центре существует застойная зона радиусом r_0 около 10 мм ($\eta_0 = 1$). Увеличение радиуса застойной зоны η_0 в слое воды по сравнению со спиртом согласуется с (1.25). При одинаковых $\delta T_0 \approx 5^\circ\text{C}$ и высоте слоя жидкости $d = 20$ мм и Gr воды выше, чем спирта. Подставляя в (1.25) η_0 и теплофизические значения для спирта и воды соответственно, получим $M \approx 0,23$.

В слое смеси воды с глицерином со значительно большим, чем у воды и спирта, числом Pr азимутальных течений такого рода не возникает (фиг. 6, в). Возникло течение как между двумя вертикальными нагретыми стенками и холодным центром между ними: по поверхности жидкость движется от стенок к холодному центру, у дна – от центра к стенкам. Течение не чувствует геометрии сосуда. По-видимому, возникновение ламинарной стационарной конвекции, описываемой уравнениями (1.24), требует превышения $\delta_0 T$ некоторого порогового значения аналогично возникновению конвективного течения в плоском горизонтальном слое жидкости при подогреве снизу.

Нестационарные граничные условия моделировались на слое дистиллированной воды $d = 6$ мм (фиг. 1, а). На дно стакана в точках 1 и 2 на расстоянии $r_+ = 29$ мм и $r_- = 14$ мм от оси стакана соответственно были помещены рабочие спай двух термопар (нихром – константан, толщина 100 мкм, чувствительность 42 мкВ/°С). Проводилась непрерывная запись сигналов с термопар, холодные концы которых находились в электронный термостат с температурой $42,5 \pm 0,05^\circ\text{C}$.

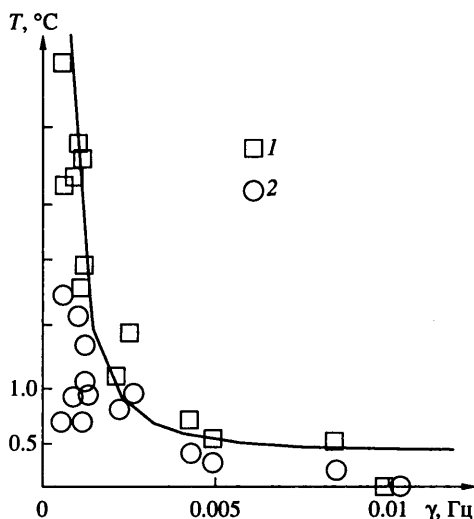
Было установлено, что температуры T_1 и T_2 в точках 1 и 2 колеблются около средней температуры T_0 по синусоидальному закону (2.6) с частотой $k\gamma$ (в нашем случае $k = 2$). Разность температуры также колеблется по синусоидальному закону

$$T_1 - T_2 = \delta T_3 + \delta T_{12}(\gamma) \cos(k\gamma\tau)$$

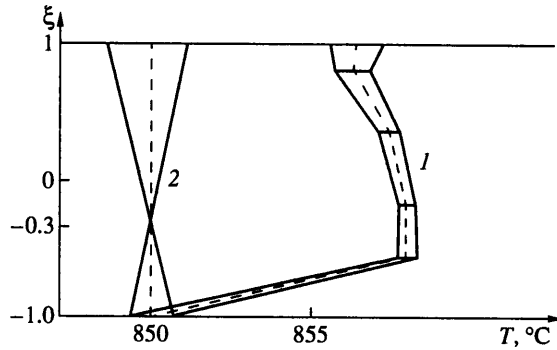
Величина δT_3 создается базовым градиентом температуры, $\delta T_3 < \delta T_{12}$. Отсюда следует, что радиальный градиент температуры на границах слоя периодически меняет свой знак. На фиг. 7 представлены амплитуды колебаний температуры $\delta_a T$ в точках 1 и 2 в зависимости от частоты вращения теплового поля γ на стенке тигля. Видно, что при увеличении расстояния η от оси тигля $\delta_a T$ увеличивается, а при увеличении γ (уменьшении периода вращения теплового поля τ) уменьшается, подтверждая (2.7).

Проводились измерения амплитуды колебания температуры $\delta_a T$ в слое жидкости по высоте (фиг. 8). Жидкостью являлся расплав системы CLBO–MoO₃, диаметр тигля 80 мм, высота слоя $d = 40$ мм, $k = 3$, $\gamma = 7 \cdot 10^{-2}$ Гц, зонд перемещался по вертикали на расстоянии $R = 35$ мм от оси тигля. Видно, что средняя по времени температура в вертикальном сечении имеет типичный для свободноконвективной ячейки S-образный профиль. Между тем (2.7) подразумевает постоянную среднюю по времени температуру T_0 . Расхождение вызвано, во-первых, существованием в реальности термокапиллярной конвекции, не рассматриваемой в модели; во-вторых, наличием боковых стенок тигля; в-третьих, влиянием базового градиента температуры. Эти три фактора приводят к изменению профилей скорости и температуры от расчетного.

Во время экспериментов на поверхности расплава наблюдалась четкая трехлучевая "звезда" (реализовался режим $k = 3$, три вертикальных нагревателя одновременно перегреты, течение разбивается на шесть секторов). Это видны границы между опускающимися потоками. Границы между поднимающимися потоками не видны, иначе была бы видна шестилучевая "звезда". В отличие от "ромашки", образуемой на поверхности расплава термокапиллярной конвекцией, наблюдаемая трехлучевая "звезда" не исчезала во время всего роста кристалла, так что течение, описываемое (2.7), действительно существует во всем объеме расплава. Радиус застойной зоны в



Фиг. 7. Зависимость амплитуды колебаний температуры $\delta_a T$ в точках 1 ($r_+ = 29$ мм) и 2 ($r_- = 14$ мм) при $\xi = -1$ от частоты вращения теплового поля γ . Сплошной линией показана зависимость $\delta_a T(\gamma)$, рассчитанная по (2.7) для точки 1



Фиг. 8. Зависимость амплитуды колебаний температуры ΔT_a от высоты ξ . Штриховая линия – средняя по времени температура, сплошные линии – границы области колебания температуры. Область 1 – экспериментально измеренные ΔT_a в расплаве системы CLBO–MoO₃, область 2 построена по формуле (2.7)

центре тигля очень мал, $r_1 = 2$ мм ($\eta_1 = 0,05$). Лучи "звезды" обрывались в 3–4 мм от стенки тигля, что говорит о малой толщине динамического погранслоя у стенки тигля.

5. Адекватность модели. Представленная модель имеет следующие допущения. Не рассматривается не зависящий от ϕ и времени градиент температуры. Этим градиентом создается в тигле тороидальное свободноконвективное течение (базовое) без азимутальной составляющей скорости. В реальности течения, описываемые (1.23), (1.24) и (2.7), накладываются на это базовое и деформируют его. При этом могут получаться и нелинейные эффекты от наложения. Модель исследует бесконечный плоский горизонтальный слой жидкости. На практике это неосуществимо, всегда есть боковые стенки, возле которых поля скорости и температуры отличаются от модельных. Но если отношение высоты слоя к его горизонтальному размеру d/R_w достаточно мало, базовое течение очень слабое, то в середине ограниченного слоя, на некотором расстоянии от центра слоя и боковой стенки (вне динамического погранслоя у боковой стенки), может возникнуть при соответствующих граничных условиях ламинарное конвективное течение, приблизительно описываемое уравнениями (1.23), (1.24) или (2.7). Это хорошо показано физическим моделированием на слое воды, спирта и расплава системы CLBO–MoO₃.

На практике трудно добиться получения вращающегося синусоидального теплового поля на стенке тигля. Нагреватели обладают тепловой инерционностью, нагреваются они обычно быстрее, чем охлаждаются. На стенке тигля распределение температуры имеет не строго синусоидальный по ϕ характер, а искаженный, несимметричный относительно пика тепловой волны (фиг. 1, б). Из-за этого появляется постоянная составляющая у азимутальной скорости V_ϕ и траектория любой частицы жидкости наматывается по всей поверхности тора, улучшая перемешиваемость расплава. То же самое можно сказать о любой несимметричности тепловых условий на стенке тигля: неравномерное по ϕ распределение пиков тепловой волны, неодинаковые амплитуды ΔT_1 в пиках тепловой волны.

Как показало физическое моделирование со смесью воды с глицерином, обладающей очень большой вязкостью ν , появление модельного течения тоже затруднено, но связано это с недостаточной амплитудой ΔT_0 . Чтобы модельное течение появилось, необходимо превышение ΔT_0 некоторого порогового значения. На практике это не всегда осуществимо.

Из модели следует, что при увеличении частоты вращения теплового поля γ радиус внешней границы η_2 уменьшается, пока не достигнет внутреннего радиуса η_1 ,

и модельное течение исчезнет. Но оно может исчезнуть и раньше, если инерционность нагревателей и стенок тигля будет так велика, что частое переключение нагревателей перестанет создавать тепловую волну, δT_1 сильно уменьшается и граничные условия из неоднородных нестационарных превратятся в однородные стационарные.

Главный вывод из модели: существует частота вращения теплового поля на стенке тигля γ_{\max} , при которой V^2 на поверхности расплава в тигле максимальна. Это обеспечивает лучшее перемешивание расплава и, следовательно, лучшие условия роста. В реальности частота, при которой происходит лучшее перемешивание расплава, может не совпадать с γ_{\max} , но должна лежать близко к ней.

Заключение. Методом Пуанкаре получен асимптотический вид периодического решения уравнений Навье – Стокса и уравнения теплопроводности в приближении Буссинеска для ламинарной конвекции в бесконечном плоском горизонтальном слое жидкости с неоднородным радиальным градиентом температуры специального вида на границах слоя.

Проведено физическое моделирование течений, возникающих в цилиндрическом тигле со слоем жидкости, когда на стенке тигля создается неоднородное распределение температуры. Показано, что течения, возникающие в середине тигля, описываются полученным приближенным решением.

На основе анализа аналитической модели и физического моделирования сделаны выводы об основных особенностях выращивания кристаллов с вращающимся тепловым полем. Показано, что имеется частота вращения теплового поля γ_{\max} на стенке тигля, обеспечивающая максимальное перемешивание расплава.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kokh A.E.* Crystal growth through forced stirring of melt or solution in Czochralski configuration // *J. Crystal Growth*. 1998. V. 191. № 4. P. 774–778.
2. *Kokh A.E., Kononova N.G.* Crystal growth through forced stirring of melt or solution in Czochralski configuration // *J. Crystal Growth*. 1999. V. 198–199. Pt 1. P. 161–164.
3. *Кох А.Е.* Устройство для выращивания монокристаллов: Патент РФ № 2133786. От 27.07.1999 г. // Б.И. 1999. № 21. С. 30.
4. *Scheel H.J., Schulz-Dubois E.O.* Flux growth of large crystals by accelerated crucible-rotation technique // *J. Crystal Growth*. 1971. V. 8. № 3. P. 304–306.
5. *Jafri I.H., Prasad V., Anselmo A.P., Gupta K.P.* Role of crucible partition in improving Czochralski melt conditions // *J. Crystal Growth*. 1995. V. 154. № 3/4. P. 280–292.
6. *Кервалишвили П.Д., Ремизов И.А.* О возможности улучшения перемешивания расплава при выращивании кристаллов по методу Чохральского // *Изв. АН СССР. Неорганические материалы*. 1980. Т. 16. № 10. С. 1727–1732.
7. *Кох А.Е., Кононова Н.Г., Мокрушников П.В.* Управление тепловым полем и процессом конвекции при выращивании кристаллов // *Тр. 4-й Междунар. конф. "Кристаллы: рост, свойства, реальная структура, применение"*, Александров, 1999. С. 234–256.
8. *Kokh A.E., Kononova N.G.* Crystal growth under heat field rotation conditions // *Solid-State electronics*. 2000. V. 44. № 5. P. 819–824.
9. *Кох А.Е., Кох В.Е., Кононова Н.Г.* Установка для выращивания кристаллов в условиях вращения теплового поля // *Приборы и техника эксперимента*. 2000. № 1. С. 157–160.
10. *Проскуряков А.П.* Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. 256 с.
11. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
12. *Croquette V., Le Gal P., Pocheau A., Guglielmetti R.* Large-scale, flow characterization in a Rayleigh – Benard convection pattern // *Europhys. Letters*. 1986. V. 1. № 8. P. 393–399.
13. *Pocheau A.* Transition to turbulence of convective flows in a cylindrical container // *J. Phys. France*. 1988. V. 49. № 7. P. 1127–1145.