

УДК 532.516

© 2001 г. А.Г. ЯРМИЦКИЙ

**СФЕРИЧЕСКИЕ ВИХРЕОБРАЗОВАНИЯ С ЯДРОМ И ОБОЛОЧКОЙ**

Целью данной работы являются построение и исследование вихревой структуры, представляющей собой сферический вихрь (ядро вихреобразования) внутри сферического вихревого слоя (оболочки). Одним из частных случаев такого вихреобразования служит сферический вихрь с однородновинтовым движением жидкости внутри ядра и оболочки. Напряженности винтовых течений в ядре и оболочке этого вихря, вообще говоря, различны. Случай одинаковых напряженностей исследуется подробно. Приведена картина линий тока. Найдена предельная скорость движения вихря, при которой он не коллапсирует. Она оказалась примерно в 1,7 раза меньше аналогичной величины для винтового вихря без оболочки и в 4 раза меньше максимальной скорости вихря Хилла.

Интерес к вихревым структурам постоянно возрастает. Обширная библиография приведена в [1, 2]. Этот интерес стимулируется не только тем, что многие процессы в природе и технике сопровождаются различными вихреобразованиями, но и вновь возобновляющимися попытками моделирования структур вещества и полей на основе представлений об эфире [3].

В работах [4, 5] приводится обобщение задачи о сферическом вихреобразовании [6], одним из частных случаев которого является классический вихрь Хилла. В статьях [4, 5] рассматривается вихревая структура, занимающая сферический слой и обтекаемая потенциальным потоком. Вихреобразования, изученные в [6], представляют предельный случай вихревых структур [4, 5], когда сферическая полость (внутренняя граница слоя) стягивается в точку.

Ниже обобщаются результаты [4, 5]: сферическая полость заполняется вихревым движением жидкости, сопряженным с течением в шаровом слое (оболочке). Подробно исследуется сферический винтовой вихрь [6] с ядром и оболочкой.

Аналогичная задача для цилиндрического вихря рассмотрена в [7].

**1. Постановка задачи. Основные соотношения.** Уравнение вихревого двухпараметрического потока несжимаемой жидкости в сферических координатах имеет вид [8]

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \Psi = E'(\psi) R^2 \sin^2 \theta - \Phi(\psi) \Phi'(\psi) \quad (1.1)$$

где  $E(\psi)$  и  $\Phi(\psi)$  – энергия (переменная Бернулли) и азимутальный момент количества движения единицы массы жидкости, постоянные вдоль линий тока.

Рассмотрим сферическую вихревую структуру с ядром ( $0 \leq R \leq a$ ) и оболочкой ( $a \leq R \leq b$ ). Начало координат поместим в центре вихря.

Положим

$$E_i(\psi_i) = C_i \psi_i + D_i, \quad \Phi_i(\psi_i) = k_i \psi_i \quad (1.2)$$

где  $i = 0, 1, 2$  – вне вихря, в оболочке и в области ядра соответственно.

Функцию тока  $\psi_i$  будем искать в виде  $\psi_i = \Psi_i(R) \sin^2 \theta$ . Тогда компоненты вектора скорости имеют вид

$$V_{Ri} = 2\Psi_i'(R)R^{-2} \cos \theta, \quad V_{\theta i} = -\Psi_i'(R)R^{-1} \sin \theta, \quad V_{\phi i} = k\Psi_i(R)R^{-1} \sin \theta \quad (1.3)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по аргументу.

Пусть на рассматриваемое вихреобразование слева направо вдоль оси симметрии набегают безвихревой поток со скоростью  $W$  на бесконечности. Тогда в (1.2) надо положить  $C_0 = k_0 = 0$ ,  $\Phi_0(\Psi_0) \equiv 0$ , при этом

$$\Psi_0(R) = \frac{1}{2} W \left( 1 - \left( \frac{b}{R} \right)^3 \right) R^2 \quad (R \geq b)$$

В силу соотношений (1.2) основное уравнение (1.1) в областях, занятых оболочкой и ядром, принимает вид

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + k_i^{(2)} \right] \Psi_i = C_i R^2 \sin^2 \theta \quad (i = 1, 2)$$

Разделением переменных находим

$$\Psi_i(r_i) = C_i k_i^{-4} \left[ (A_i J_{3/2}(r_i) + B_i Y_{3/2}(r_i)) r_i^{-3/2} + l \right] r_i^2 \quad (r_i = k_i R) \quad (1.4)$$

Здесь  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  – постоянные,  $J_{3/2}(r_i)$  и  $Y_{3/2}(r_i)$  – сферические бесселевы функции первого и второго рода соответственно.

Краевые условия

$$\Psi_i(\alpha_i) = \Psi_1(\beta_1) = 0 \quad (\alpha_i = k_i a; \beta_i = k_i b) \quad (1.5)$$

$$\Psi_1'(\beta_1) = \frac{3}{2} W k_1^{-2} \beta_1, \quad k_1 \Psi_1'(\alpha_1) = k_2 \Psi_2'(\alpha_2) \quad (1.6)$$

$$E_1(b, \theta) = D_0 = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{W^2}{2}, \quad E_1(a, \theta) = E_2(a, \theta) \quad (1.7)$$

$$\Psi_2(r_2) |_{r_2 \rightarrow 0} = O(r_2^2) \quad (1.8)$$

Здесь  $\rho$  – плотность,  $p_\infty$  – давление вдали от вихря.

Соотношение (1.5) отражает условие непроницаемости поверхностей раздела, (1.6) – непрерывность скоростей на этих поверхностях, (1.7) – непрерывность переменных Бернулли и, наконец, (1.8) – условие отсутствия особенности в центре.

**2. Течения в оболочке ( $\alpha_1 \leq r_1 \leq \beta_1$ ) и ядре ( $0 \leq r_2 \leq \alpha_2$ ).** Постоянные  $A_1$  и  $B_1$  найдем, удовлетворяя условиям непроницаемости границ оболочки

$$A_1 = \delta_a / \delta, \quad B_1 = \delta_b / \delta$$

$$\delta_a = \beta_1^{3/2} Y_{3/2}(\alpha_1) - \alpha_1^{3/2} Y_{3/2}(\beta_1), \quad \delta_b = \alpha_1^{3/2} J_{3/2}(\beta_1) - \beta_1^{3/2} J_{3/2}(\alpha_1)$$

$$\delta = J_{3/2}(\alpha_1) Y_{3/2}(\beta_1) - J_{3/2}(\beta_1) Y_{3/2}(\alpha_1)$$

Принимая во внимание, что

$$\Psi_i'(r_i) = 2r_i^{-1} \Psi_i(r_i) - C_i k_i^{-4} r_i^{3/2} Z_i(r_i), \quad Z_i(r_i) = A_i J_{3/2}(r_i) + B_i Y_{3/2}(r_i) \quad (2.1)$$

и с помощью первых двух условий (1.5) сращивая скорости на наружной поверхности оболочки, найдем

$$C_1 = -\frac{1,5 W k_1^2 \beta_1^{3/2}}{Z_1(\beta_1)}, \quad Z_1 = (\delta_a J_{3/2}(r_1) + \delta_b Y_{3/2}(r_1)) \delta^{-1}$$

Таким образом, на основании (1.4)

$$\Psi_1^*(r_1) = -\frac{3}{2} \beta_1^{-3/2} \frac{\delta_a J_{3/2}(r_1) + \delta_b Y_{3/2}(r_1) + \delta r_1^{3/2}}{\delta_a J_{3/2}(\beta_1) + \delta_b Y_{3/2}(\beta_1)} r_1^{1/2}, \quad \left( \Psi_1^*(r_1) = \frac{\Psi_1(r_1)}{Wb^2} \right) \quad (2.2)$$

Замечая, что в силу (1.5) и соотношения (2.1)  $\Psi_i^*(\alpha_i) = -C_i k_i^{-4} \alpha_i^{1/2} Z_i(\alpha_i)$  ( $i = 1, 2$ ), из непрерывности скорости на внутренней границе оболочки (поверхности ядра) получим

$$C_2 = \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^{3/2} \frac{Z_1(\alpha_1)}{Z_2(\alpha_2)} C_1$$

Из условия непроницаемости поверхности ядра и (1.8) находим  $A_2 = -\alpha_2^{3/2} / J_{3/2}(\alpha_2)$ ,  $B_2 = 0$ , так что

$$Z_2(\alpha_2) = A_2 J_{3/2}(\alpha_2) = -\alpha_2^{3/2} \frac{J_{3/2}(\alpha_2)}{J_{3/2}(\alpha_2)}$$

В соответствии с (1.4)

$$\Psi_2^*(r_2) = \frac{3}{2} \alpha_2^{-3} \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)^{3/2} \frac{\delta_a J_{3/2}(\alpha_1) + \delta_b Y_{3/2}(\alpha_1)}{\delta_a J_{3/2}(\beta_1) + \delta_b Y_{3/2}(\beta_1)} \frac{J_{3/2}(\alpha_2)}{J_{3/2}(\alpha_2)} \times \left[ 1 - \left( \frac{\alpha_2}{r_2} \right)^{3/2} \frac{J_{3/2}(r_2)}{J_{3/2}(\alpha_2)} \right] r_2^2, \quad \left( \Psi_2^*(r_2) = \frac{\Psi_2(r_2)}{Wb^2} \right) \quad (2.3)$$

Рассмотрим два предельных случая:

$$a \rightarrow 0, \quad A_1 \rightarrow -\beta_1^{3/2} / J_{3/2}(\beta_1), \quad B_1 \rightarrow 0$$

$$Z_1(\beta_1) = A_1 J_{3/2}(\beta_1) = -\beta_1^{3/2} \frac{J_{3/2}(\beta_1)}{J_{3/2}(\beta_1)},$$

$$\Psi_1^*(r_1) = \frac{3}{2} \beta_1^{-3} \frac{J_{3/2}(\beta_1)}{J_{3/2}(\beta_1)} \left[ 1 - \left( \frac{\beta_1}{r_1} \right)^{3/2} \frac{J_{3/2}(r_1)}{J_{3/2}(\beta_1)} \right] r_1^2 \quad (2.4)$$

$$a \rightarrow b, \quad \alpha_1 \rightarrow \beta_1, \quad \alpha_2 \rightarrow \beta_2 = k_2 b$$

$$\Psi_2^*(r_2) = \frac{3}{2} \beta_2^{-3} \frac{J_{3/2}(\beta_2)}{J_{3/2}(\beta_2)} \left[ 1 - \left( \frac{\beta_2}{r_2} \right)^{3/2} \frac{J_{3/2}(r_2)}{J_{3/2}(\beta_2)} \right] r_2^2 \quad (2.5)$$

Формулы (2.4) и (2.5) полностью соответствуют [6].

**3. Сферический винтовой вихрь с оболочкой.** Если течения в ядре и оболочке винтовые, то  $\delta = 0$  и  $J_{3/2}(\alpha_2) = 0$ . И согласно (2.2) и (2.3)

$$\Psi_1^*(r_1) = -\frac{3}{2} \beta_1^{-3/2} \frac{\delta_a J_{3/2}(r_1) + \delta_b Y_{3/2}(r_1)}{\delta_a J_{3/2}(\beta_1) + \delta_b Y_{3/2}(\beta_1)} r_1^{1/2} \quad (3.1)$$

$$\Psi_2^*(r_2) = \frac{3}{2} \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)^{3/2} \frac{\delta_a J_{3/2}(\alpha_1) + \delta_b Y_{3/2}(\alpha_1)}{\delta_a J_{3/2}(\beta_1) + \delta_b Y_{3/2}(\beta_1)} \frac{J_{3/2}(r_2)}{j_{3/2,1}^{3/2} J_{3/2}(j_{3/2,1})} r_2^{1/2} \quad (3.2)$$

$t$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\chi$
1,2	15,7607	18,9128	3,5075
1,5	6,3858	9,5787	1,4212
1,7	4,4934	7,7253	1,0000
2,0	3,2860	6,5720	0,7313
3,0	1,7370	5,2110	0,3866
4,0	1,2097	4,8388	0,2692
5,0	0,9373	4,6865	0,2086
6,0	0,7688	4,6128	0,1711
7,0	0,6530	4,5710	0,1453
8,0	0,5684	4,5472	0,1265
9,0	0,5036	4,5324	0,1121
10,0	0,4522	4,5220	0,1006
11,0	0,4105	4,5155	0,0914
19,0	0,2367	4,4973	0,0527
39,0	0,1153	4,4967	0,0257
$\infty$	0,0000	4,4934	0,0000

где  $j_{\frac{3}{2},1} = 4,4934$  – первый корень уравнения  $J_{\frac{3}{2}}(\alpha_2) = 0$ , при этом  $J_{\frac{5}{2}}(j_{\frac{3}{2},1}) = -J_{\frac{1}{2}}(j_{\frac{3}{2},1})$ .

Условие  $\delta = 0$  приводит к уравнению

$$J_{\frac{3}{2}}(\alpha_1)Y_{\frac{3}{2}}(t\alpha_1) - Y_{\frac{3}{2}}(\alpha_1)J_{\frac{3}{2}}(t\alpha_1) = 0 \quad (t = b/a) \quad (3.3)$$

Корни этого уравнения [9, 10] и соответствующие им значения  $\beta_1 = t\alpha_1$  и  $\chi = k_1/k_2 = \alpha_1/j_{\frac{3}{2},1}$  для некоторых значений параметра  $t$  сведены в таблицу.

Из таблицы видно, что с ростом относительной толщины оболочки отношение напряженностей  $\chi$  винтовых течений в оболочке и ядре падает.

С учетом (3.3) замечаем, что

$$\frac{\delta_a}{\delta_b} = -\frac{Y_{\frac{3}{2}}(\beta_1)}{J_{\frac{3}{2}}(\beta_1)}$$

Это позволяет записать (3.1) и (3.2) в виде

$$\Psi_1^*(r_1) = -\frac{3}{4}\pi(Y_{\frac{3}{2}}(\beta_1)J_{\frac{3}{2}}(r_1) - J_{\frac{3}{2}}(\beta_1)Y_{\frac{3}{2}}(r_1))(r_1/\beta_1)^{\frac{1}{2}}$$

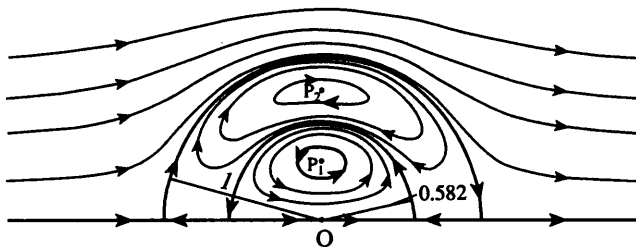
$$\Psi_2^*(r_2) = \frac{3}{2}\frac{Y_{\frac{3}{2}}(\beta_1)}{Y_{\frac{3}{2}}(\alpha_1)}\frac{J_{\frac{3}{2}}(r_2)}{j_{\frac{3}{2},1}^{\frac{3}{2}}J_{\frac{1}{2}}(j_{\frac{3}{2},1})}(r_2/t)^{\frac{1}{2}}$$

Примем в качестве масштаба длины внешний радиус оболочки  $b$ . Тогда

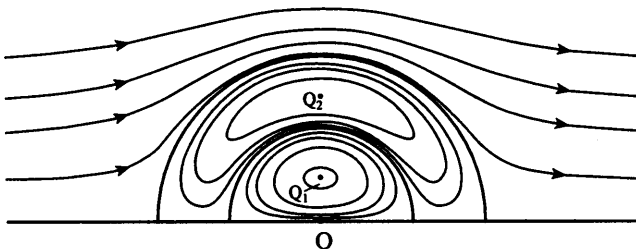
$$\Psi_0^*(R^*) = \frac{1}{2}(R^{*2} - R^{*-1}) \quad (R^* \geq 1)$$

$$\Psi_1^*(R^*) = -\frac{3}{4}\pi(Y_{\frac{3}{2}}(\beta_1)J_{\frac{3}{2}}(\beta_1 R^*) - J_{\frac{3}{2}}(\beta_1)Y_{\frac{3}{2}}(\beta_1 R^*))R^{*\frac{1}{2}} \quad (t^{-1} \leq R^* \leq 1)$$

$$\Psi_2^*(R^*) = \frac{3}{2}\frac{Y_{\frac{3}{2}}(\beta_1)}{Y_{\frac{3}{2}}(\alpha_1)}\frac{J_{\frac{3}{2}}(j_{\frac{3}{2},1}tR^*)}{j_{\frac{3}{2},1}^{\frac{3}{2}}J_{\frac{1}{2}}(j_{\frac{3}{2},1})}R^{*\frac{1}{2}} \quad (0 \leq R^* \leq t^{-1})$$



Фиг. 1. Картина линий тока в меридиональной плоскости,  $P_1, P_2$  – точки с наибольшим по абсолютной величине значением функции тока



Фиг. 2. Изоахи азимутальной компоненты скорости,  $Q_1, Q_2$  – точки с наибольшей по абсолютной по величине азимутальной скоростью

В частном случае:  $\chi = 1, k_1 = k_2 = k, \alpha_1 = \alpha_2 = j_{3/2,1}, t = 1,7, \beta_1 = j_{3/2,2} = 7,7253$ . Если принять во внимание, что

$$J_{1/2}(j_{3/2,s})Y_{3/2}(j_{3/2,s}) = -\frac{2}{\pi j_{3/2,s}} \quad (s=1, 2)$$

то убедимся, что

$$\Psi_1^*(R^*) = \Psi_2^*(R^*) = \Psi^*(R^*) = -\frac{3}{4} \pi Y_{3/2}(j_{3/2,2}) J_{3/2}(j_{3/2,2} R^*) R^{*1/2} \quad (0 \leq R^* \leq 1) \quad (3.4)$$

По существу рассматриваемый случай представляет собой единый вихрь с напряженностью  $k = j_{3/2,2}/b$ , разделившийся на две части – ядро радиуса  $j_{3/2,1} / j_{3/2,2} = 0,582$  и оболочку толщиной 0,418.

Картина линий тока в меридиональной плоскости показана на фиг. 1. Наибольшего по абсолютной величине значения функция тока достигает в точках  $P_1(0,355; \pi/2)$  и  $P_2(0,790; \pi/2)$ . В этих точках  $V_R^* = V_\theta^* = 0$ , а  $V_\varphi^*$  равняется 4,6 и  $-1,94$  соответственно. Вихревые линии, проходящие через эти точки, вращаются в противоположных направлениях вокруг оси симметрии.

На фиг. 2 изображены изоахи  $\varphi$ -компоненты скорости. Наибольшие по абсолютной величине значения  $V_\varphi$  принимает в точках  $Q_1(0,269; \pi/2)$  и  $Q_2(0,764; \pi/2)$ , при этом  $V_\varphi \approx 5,1$  и  $-1,96$  соответственно.

Компоненты вектора скорости в любой точке вихря найдем с помощью (1.3) и (3.4)

$$V_R^* = \frac{3}{j_{3/2,2} J_{1/2}(j_{3/2,2})} (R^*)^{-3/2} J_{1/2}(j_{3/2,2} R^*) \cos \theta$$

$$V_{\theta}^* = -\frac{3}{2j_{3/2,2} J_{1/2}(j_{3/2,2})} (R^*)^{-3/2} (j_{3/2,2} R^* J_{1/2}(j_{3/2,2} R^*) - J_{3/2}(j_{3/2,2} R^*)) \sin \theta$$

$$V_{\varphi}^* = \frac{3}{2J_{1/2}(j_{3/2,2})} (R^*)^{-1/2} J_{3/2}(j_{3/2,2} R^*) \sin \theta$$

Все компоненты отнесены к скорости набегающего потока  $W$ .

Наибольшие значения скоростей на поверхностях раздела достигаются в экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ). На наружной поверхности оболочки ( $R^* = 1$ )

$$V_{\max}^* = -1,5; \text{ на границе между оболочкой и ядром } (R^* = 0,582)$$

$$V_{\max}^* = -\frac{3}{2} \left( \frac{j_{3/2,2}}{j_{3/2,1}} \right)^{1/2} \frac{J_{1/2}(j_{3/2,1})}{J_{1/2}(j_{3/2,2})} = 2,54$$

Самая большая по абсолютной величине скорость и соответственно наименьшее давление достигаются в центре вихря ( $R^* = 0$ )

$$|V_{\max}^*| = \left( \frac{2j_{3/2,2}}{\pi} \right)^{1/2} |J_{1/2}^{-1}(j_{3/2,2})| = 7,8, \quad p_{\min}^* = p_{\infty}^* + 1 - V_{\max}^{*2}$$

Здесь  $p_{\min}^*$  и  $p_{\infty}^*$  – безразмерные давления в центре вихря и набегающем потоке, отнесенные к скоростному напору.

Величина  $|V_{\max}^*|$  в 1,7 раза превышает ту же величину в сферическом винтовом вихре без оболочки [6]. При получении этих формул использованы условия непрерывности скоростей и переменной Бернулли на поверхностях раздела, а также то, что в винтовом течении уравнение Бернулли применимо ко всему потоку в целом [8]. Для того чтобы вихрь не коллапсировал, необходимо соблюдение условия

$$p_{\min}^* = p_{\infty}^* - 60 > 0 \quad \text{или} \quad W < 0,183 \left( \frac{p_{\infty}}{\rho} \right)^{1/2} = W_{\max}$$

Величина  $W_{\max}$  примерно в 1,7 раза меньше соответствующей величины в случае сферического винтового вихря без оболочки [6] и в 4 раза меньше предельной скорости обтекания вихря Хилла.

Сообщив всей массе жидкости скорость  $W$  в противоположном направлении, получим вихреобразование, перемещающиеся поступательно в покоящейся на бесконечности жидкости.

**Заключение.** Проведено обобщение результатов [4–6]. Построены вихревые структуры, состоящие из сферического ядра и шарового слоя (оболочки), частным случаем которых являются вихреобразования, рассмотренные в [4, 5], а также винтовой вихрь с ядром и оболочкой. Подробно исследован сферический вихрь с отделившейся от него оболочкой с той же самой напряженностью винтового движения.

Работа частично поддержана грантом № АРУ 051115 Международной Соросовской программы поддержки образования в области точных наук.

Автор приносит извинения Н.В. Салтанову и В.А. Горбаню за то, что в силу образовавшегося в 90-е годы информационного вакуума не имел возможности в [11] сделать ссылку на книгу [1], а также выражает признательность В.Е. Давидсону, обратившему его внимание на [4, 5], и научному редактору А.А. Бармину за скрупулезное, тщательное редактирование рукописи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Салтанов Н.В., Горбань В.А.* Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения. Киев: Наук. думка, 1993. 244 с.
2. *Ярмицкий А.Г.* Обобщение классических задач гидромеханики вихревых течений. Мариуполь: изд-е Приазов. техн. ун-та, 1997. 102 с.
3. *Ацюковский В.А.* Общая эфиродинамика. М.: Энергоатомиздат, 1990. 278 с.
4. *Салтанов Н.В., Салтанов В.Н.* Вихрь с азимутальной закруткой на сфере во внешнем потенциальном потоке и его связь с вихрем Хилла // Докл. РАН. 1999. Т. 367. № 3. С. 349–352.
5. *Салтанов Н.В., Ефремова Н.С., Салтанов В.Н.* Вторичное течение вокруг сферы при наличии спиральности // Доп. НАН України. 1999. № 9. С. 59–63.
6. *Ярмицкий А.Г.* Об одном пространственном аналоге вихревого столба Чаплыгина (обобщенный вихрь Хилла) // ПМТФ. 1974. № 5. С. 137–141.
7. *Ярмицкий А.Г.* Смерчеподобный вихрь Чаплыгина // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 4. С. 52–59.
8. *Васильев О.Ф.* Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М., Л.: Госэнергоиздат, 1958. 144 с.
9. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
11. *Ярмицкий А.Г.* Спиральные волны в трехмерных винтовых течениях вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 5. С. 25–29.

Мариуполь

Поступила в редакцию  
31.VII.2000