

УДК 533.6.011.72:533.7

© 2001 г. О.Г. БУЗЫКИН, В.С. ГАЛКИН

О МОДИФИКАЦИЯХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МЕТОДА ЧЕПМЕНА – ЭНСКОГА

Ненавье-стоксовы модели сплошной среды, предложенные ранее на основе модификации газодинамических уравнений высших (начиная с барнеттова) приближений метода Чепмена – Энскога для течения в ударной волне, обобщены на случай трехмерных течений простого (одноатомного) газа. Модели апробированы на задачах о структуре ударной волны и о цилиндрическом течении Куэтта разреженного газа.

С помощью газодинамических уравнений высших приближений метода Чепмена – Энскога в ряде случаев удалось значительно расширить область применимости моделей течений газа как сплошной среды (макроскопических моделей) при конечных числах Кнудсена K_n . В первую очередь это относится к уравнениям Барнетта, но иногда используются и газодинамические уравнения следующего (супербарнеттова) приближения [1–3].

Приложения уравнений Барнетта начались с задачи о распространении звука [4, 5]. Важное значение этим уравнениям придавалось в основополагающей для динамики разреженного газа работе [6]. Позже такая позиция укрепилась тем фактом, что уравнения Навье – Стокса не являются, вообще говоря, строгим асимптотическим (при $K_n \rightarrow 0$) следствием кинетических уравнений в отличие от уравнений Эйлера или Прандтля. Оказалось [3], что для пограничного слоя отношение максимальных барнеттовских и даже супербарнеттовских членов уравнений сохранения к слагаемым уравнений Прандтля порядка $(\delta/L)^2 \sim Re^{-1} \sim K_n \ll 1$ (при числе Маха $M = O(1)$), где δ – толщина слоя, L – размер тела, Re – число Рейнольдса. Такой же величины те слагаемые уравнений Навье – Стокса, которые не учитываются в уравнениях пограничного слоя первого (Прандтля) и второго порядков.

Для пограничного слоя на плоской пластине в приближении Прандтля тепловой поток $q \sim q_y^{(1)} = -\lambda \partial T / \partial y$, где λ – коэффициент теплопроводности, y – поперечная координата. Сравним с ним барнеттовы $q_y^{(2)}$ и супербарнеттовы $q_y^{(3)}$ члены выражения для теплового потока. Имеем

$$q_y^{(2)} \ll q_y^{(1)} \frac{\mu}{\rho a^2} \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad q_y^{(3)} \ll q_y^{(1)} \frac{\mu^2}{T^2 \rho^2 a^2} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2$$

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu}, \quad y \sim \delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re}}, \quad x \sim L, \quad u_x \sim u$$

где a – скорость звука, остальные обозначения общепринятые. Таким образом

$$\frac{q_y^{(2)}}{q_y^{(1)}} \ll \frac{1}{Re}, \quad \frac{q_y^{(3)}}{q_y^{(1)}} \ll \frac{1}{Re}$$

Получалось, что уравнения Навье – Стокса можно уточнять за счет высших приближений метода Чепмена – Энскога. Однако многочисленные расчеты и сравнения с опытом показали, что эти уравнения являются очень удачным приближением, справедливым в более широкой области параметров, чем это следовало из оценок. В аэродинамике установилось отношение к ним, как к строго обоснованным. В то же время отношение к уравнениям Барнетта практически стало отрицательным. Основной причиной было то, что не удалось получить их решение для задачи о структуре ударной волны при $M > 1,9$ путем численного интегрирования вверх по потоку. Описанная ситуация не изменилась, когда были указаны примеры того, что уравнения Навье – Стокса не дают правильной асимптотики при $Kn \rightarrow 0$ (например, в случае медленных неизотермических течений приближение Навье – Стокса недостаточно, так как необходим учет температурных напряжений [3]).

Наряду с этим происходила эволюция методов построения макроскопических моделей для $Kn \ll 1$. Обращено внимание на то, что фактически метод Чепмена – Энскога дает формальное разложение решения кинетического уравнения по степеням пространственных производных от газодинамических переменных относительно локально-равновесного решения, причем в каждом приближении учитываются, вообще говоря, внепорядковые по Kn члены. Такая особенность – плата за общность получаемых результатов, за то, например, что уравнения Навье – Стокса применимы для всего поля обтекания вне кинетических слоев как для невязких, так и для вязких областей течения.

Последовательные асимптотические разложения по степеням малого параметра для различных классов и областей течений были получены путем модификаций метода Гильберта [3]. Их результатами являются уравнения Эйлера плюс последовательность неоднородных линейаризованных уравнений Эйлера, уравнения Прандтля плюс последовательность неоднородных линейаризованных уравнений Прандтля и т.д. Те же результаты можно получить и путем выделения асимптотик в методе Чепмена – Энскога. Важно подчеркнуть, что такой путь не приводит к полной системе уравнений Навье – Стокса, изменяет структуру уравнений сохранения. Поэтому предложены [3] промежуточные методики, например, переразложения по Kn цепочки газодинамических уравнений метода Чепмена – Энскога относительно уравнений Навье – Стокса или Барнетта. В [1] переразложение заменено итерациями, уравнения Навье – Стокса – усеченными уравнениями Барнетта.

Поиск новых подходов и многообразие порождаемых ими моделей сплошной среды обусловлены желанием получить эффективные описания тех или иных течений при конечных числах Kn . Однако новые подходы почти всегда носят нестрогий характер в том смысле, что не удается доказать сходимости последовательности получаемых приближений для конечных значений Kn .

Выяснилось, что уравнения Барнетта в большой мере уточняют решение уравнений Навье – Стокса для профилей газодинамических переменных в сильной ударной волне, особенно для температуры [1–3]¹. Более того, для газа из молекул-упругих сфер барнеттовы профили близки к точным, рассчитываемым при помощи кинетического уравнения Больцмана, хотя для газа максвелловских молекул между этими профилями имеются значительные расхождения в низкотемпературной зоне [2].

Это дало надежду на возможность создания на основе высших приближений метода Чепмена – Энскога эффективных моделей гиперзвуковых течений слаборазреженных газов, обеспечивающих достаточно точный расчет зоны размытого скачка уплотнения, а не только течения за ней, где применимы уравнения Навье – Стокса. Знание структуры этой зоны важно при интенсивных физико-химических процессах в газах [3]. Именно для этой зоны предлагаются в первую очередь ненавье-стоксовы модели, в том числе и сформулированные в настоящей работе.

¹ В обзоре [3] в подписях к фиг. 3 допущена ошибка. Должно быть: 2 – решение методом прямого статистического моделирования; 3 – решение уравнений Барнетта.

При создании этих моделей были достигнуты определенные успехи [3], однако обострились известные трудности и противоречия. Помимо того что уравнения высших приближений метода Чепмена – Энскога очень сложны, имеются и принципиальные "дефекты" [3]. Во-первых, в силу высокого порядка систем уравнений сохранения необходимы дополнительные граничные условия. Соответствующая теория не разработана, при численном решении применяются качественные соображения. Во-вторых, эти уравнения обладают ложными (посторонними) решениями, необходимость исключения которых усиливает требования к постановке задачи. В-третьих, данные уравнения неустойчивы к коротковолновым ($K\lambda \sim 1$) возмущениям. При расчете стационарных задач методом установления для подавления неустойчивости вводились специально подобранные демпфирующие слагаемые более высокого порядка по $K\lambda$ (см. [1–3]). Однако это усложняет проблему граничных условий, так как повышается порядок эмпирически полученных уравнений.

В силу сказанного представляется важной разработка модификаций газодинамических уравнений высших приближений метода Чепмена – Энскога, свободных от указанных дефектов и обеспечивающих точность, близкую к точности исходных уравнений. Анализ [1] показал, что для задачи о структуре сильной ударной волны этому требованию можно удовлетворить, если к уравнениям применить следующую итерационную процедуру: сначала решать систему усеченных уравнений Барнетта, включающую некоторые нелинейные по производным компоненты тензора напряжений p_{ij} и вектора теплового потока q_i ; затем при тех же начальных и граничных условиях – систему усеченных неоднородных уравнений Барнетта, отличающуюся наличием неоднородных частей, которые содержат остальные барнеттовы слагаемые p_{ij} и q_i (в том числе и все вторые производные) и рассчитываются на решении системы усеченных уравнений Барнетта. Порядок каждой системы уравнений на каждой итерации равен порядку системы уравнений Навье – Стокса². Их однородные операторы после линеаризации совпадают с операторами линеаризованных уравнений Навье – Стокса. Следовательно, модифицированные уравнения не обладают коротковолновой неустойчивостью.

В задачах о структуре ударной волны [1] и распространении звука [7] точность модификаций оказалась близкой к точности исходных уравнений Барнетта и значительно выше точности уравнений Навье – Стокса, особенно для сильной ударной волны. Однако в случае "мягких" межмолекулярных потенциалов решение уравнений Барнетта для сильной ударной волны существенно отличается от решения методом прямого статистического моделирования, в первую очередь в ее передней (низкотемпературной) части. Найдено [2], что для уточнения необходимо усиление нелинейности модифицированных уравнений Барнетта. Поэтому в последние были введены слагаемые супербарнеттова типа и эмпирически подобраны числовые коэффициенты при барнеттовых и супербарнеттовых членах. В итоге получена макроскопическая модель структуры сильной ударной волны, обеспечивающая близость результатов расчета профилей газодинамических переменных к результатам метода прямого статистического моделирования почти во всей зоне возмущенного течения, как для газа из молекул-упругих сфер, так и для газа максвелловских молекул.

В настоящей работе дается обобщение модификаций [1, 2] на трехмерный случай. Результатом обобщения (разд. 1) явились уравнения, которые в одномерном случае несколько отличаются от моделей [1, 2]. Степень отличий анализируется на задаче о структуре сильной ударной волны (разд. 2). Раздел 3 в основном посвящен анализу фазовой картины усеченных уравнений для структуры ударной волны.

В разд. 4 и 5 соответственно выведены уравнения и рассмотрены результаты решения задачи о цилиндрическом течении Куэтта. В [8, 9] эта задача решена с использованием уравнений Барнетта. Применен метод возмущений с неопределенной

² Для краткости под уравнениями Навье – Стокса понимается полная система уравнений сохранения, а не только уравнение сохранения импульса [3].

степенью точности [8]. Результаты сопоставлены с экспериментальными данными [9] по профилю плотности для течения аргона при различных Кн. Сделан вывод, что приближенное решение уравнений Барнетта с граничными условиями скольжения второго порядка значительно уточняет решение уравнений Навье – Стокса с граничными условиями первого порядка, давая правильную зависимость градиента плотности от Кн. Однако в [10], где данная задача решена методом прямого статистического моделирования, утверждается, что экспериментальные данные получены с большими погрешностями, растущими с числом Кн, и отмечается неточность результатов [8]. Кроме того, вопреки [9] подчеркивается, что в неожиданно широком интервале значений числа Кн решения уравнений Навье – Стокса с граничными условиями скольжения первого порядка для профиля плотности согласуются с расчетными данными метода прямого статистического моделирования: при $Kn \leq 0,1$ – количественно, а при $Kn \leq 0,4$ и даже $Kn \approx 1,1$ – качественно.

1. Для решения задачи о структуре ударной волны применялись [1] однократно проинтегрированные по координате уравнения импульса и энергии, в которых давление p и массовая плотность ρ исключались с помощью уравнений неразрывности и состояния. Разбиению на однородную и неоднородную части подвергались барнеттовы напряжения p_{xx} и тепловой поток q_x . Увеличение порядка системы уравнений определялось слагаемыми p_{xx} и q_x со вторыми производными от скорости u_x и температуры T . Кроме них в неоднородную часть было включено слагаемое с $(dT/dx)^2$, так как его учет в однородной части не позволял получить ограниченное решение.

В общем случае указанное разбиение применяется непосредственно к выражениям для барнеттовых напряжений и тепловых потоков, а не к уравнениям сохранения. При этом не искажается структура уравнений сохранения (важнейшее, по мнению авторов, преимущество метода Чепмена – Энскога), процедура проста и экономна. В неоднородные части уравнений предлагается переносить не только слагаемые выражений для напряжений p_{ij} и тепловых потоков q_i , которые содержат вторые производные от газодинамических переменных и парные производные первых производных от T [1], но и слагаемые, включающие первые производные от p . Последнее делается для того, чтобы устранить вторые производные от p из однородных частей уравнений сохранения. Таким способом модифицированные уравнения по структуре и свойствам приближаются к уравнениям Навье – Стокса.

Обобщение модификации уравнений Барнетта [1] проводится следующим образом. Обозначим через

$$\delta p_{ij} = p_{ij} - p_{ij}^{(1)}, \quad \delta q_i = q_i - q_i^{(1)}$$

даваемые высшими приближениями метода Чепмена – Энскога поправки к напряжениям и тепловым потокам в приближении Навье – Стокса, когда

$$p_{ij}^{(1)} = -2\mu e_{ij}, \quad e_{ij} = \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle, \quad q_i^{(1)} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (1.1)$$

$$\langle A_{ij} \rangle \equiv \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} A_{kk}, \quad \nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

В приближении Барнетта

$$\delta p_{ij} \equiv p_{ij}^{(2)} = \pi_{ij}^{(1)} + \pi_{ij}^{(2)}, \quad \delta q_i \equiv q_i^{(2)} = \kappa_i^{(1)} + \kappa_i^{(2)} + \kappa_i^{(3)} \quad (1.2)$$

$$\pi_{ij}^{(1)} = \frac{\mu^2}{p} \left\{ K_1 e_{ij} \nabla \mathbf{u} - K_2 \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + 2e_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right\rangle + K_6 \langle e_{ik} e_{kj} \rangle \right\} \quad (1.3)$$

$$\pi_{ij}^{(2)} = -\frac{\mu^2}{p} K_2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) \right\rangle + \frac{\mu^2}{\rho T} \left\langle K_3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} + K_4 \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} + K_5 \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right\rangle$$

$$\kappa_i^{(1)} = \frac{\mu^2}{\rho T} \left\{ \left(\theta_1 + \frac{2}{3} \theta_2 \right) \frac{\partial T}{\partial x_i} \nabla \mathbf{u} + 2\theta_2 \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \theta_5 \frac{\partial T}{\partial x_j} e_{ij} \right\} \quad (1.4)$$

$$\kappa_i^{(2)} = \frac{\mu^2}{\rho p} \theta_3 \frac{\partial p}{\partial x_j} e_{ij}, \quad \kappa_i^{(3)} = \frac{\mu^2}{\rho} \left(\frac{2}{3} \theta_2 \frac{\partial \nabla \mathbf{u}}{\partial x_i} + \theta_4 \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} \right)$$

Проводится суммирование по повторяющимся индексам, δ_{ij} – единичный тензор, μ , λ – коэффициенты вязкости и теплопроводности, $p = R\rho T = nkT$, $i, j, k = 1, 2, 3$. Коэффициенты K_α , θ_β , $\alpha = 1 - 6$, $\beta = 1 - 5$, являются функциями T (в формуле (1.4) работы [1] для θ_5 вместо 39 должно быть 35).

Система усеченных уравнений Барнетта будет иметь вид

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \mathbf{u} = 0, \quad \frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (1.5)$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (p_{ij}^{(1)} + \pi_{ij}^{(1)}) = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{3}{2} nk \frac{DT}{Dt} + p \nabla \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x_i} (q_i^{(1)} + \kappa_i^{(1)}) + (p_{ij}^{(1)} + \pi_{ij}^{(1)}) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad (1.7)$$

Полагая $\pi_{ij}^{(1)} = 0$, $\kappa_i^{(1)} = 0$, получим уравнения Навье – Стокса.

Система усеченных неоднородных уравнений Барнетта будет состоять из уравнения неразрывности и (вместо (1.6), (1.7)) уравнений

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (p_{ij}^{(1)} + \pi_{ij}^{(1)}) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \pi_{ij,0}^{(2)} \quad (1.8)$$

$$\frac{3}{2} nk \frac{DT}{Dt} + p \nabla \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x_i} (q_i^{(1)} + \kappa_i^{(1)}) + (p_{ij}^{(1)} + \pi_{ij}^{(1)}) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_i} (\kappa_{i,0}^{(2)} + \kappa_{i,0}^{(3)}) - \pi_{ij,0}^{(2)} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1.9)$$

Индекс ноль снизу означает, что правые (неоднородные) части уравнений (1.8), (1.9) рассчитываются путем решения системы однородных уравнений (1.5) – (1.7) с теми же граничными и начальными условиями, например

$$\kappa_{i,0}^{(2)} = \frac{\mu^2(T_0)}{\rho_0 p_0} \theta_3(T_0) \frac{\partial p_0}{\partial x_j} e_{ij,0}$$

где $T_0, p_0, \rho_0, \mathbf{u}_0$ – решение системы (1.5) – (1.7).

Таким образом, в однородные части включены только те нелинейные по градиентам члены из (1.2) – (1.4), которые содержат произведения производных от u_i (напряжения) и произведения производных от T на производные от u_i (тепловые потоки).

Перейдем к макромодели, которая получена для одномерного случая [2]. В общем случае запишем

$$\delta p_{ij} = 4\pi_{ij}^{(1)} + \pi_{ij}^{(3)}, \quad \pi_{ij}^{(3)} = \frac{3}{2} \alpha_2 \frac{\mu^3}{pT\rho^2} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\rangle \nabla \mathbf{u} \quad (1.10)$$

$$\delta q_i = \frac{3}{4} \kappa_i^{(1)} + 3\kappa_i^{(3)} + q_i^{(1)} \kappa^{(4)}, \quad \kappa^{(4)} = \frac{4}{15} \beta_3 \frac{\mu^2}{\rho T^2} (\nabla T)^2$$

Здесь использованы формулы из (1.1), (1.3), (1.4). Значения коэффициентов α_2 , β_3 получены [2] для предельных случаев максвелловских молекул ($s = 1$) и молекул –

упругих сфер ($s = 1/2$), где s – показатель в степенной зависимости $\mu \propto T^s$. Линейно интерполируя эти значения по s , найдем

$$\alpha_2 = (2,25 - s) \frac{47}{3} > 0, \quad \beta_3 = (1,7s - 0,7) \frac{813}{16} > 0 \quad (1.11)$$

Система усеченных уравнений макромодели получается из (1.5) – (1.7) заменой $\pi_{ij}^{(1)}$, $\kappa_i^{(1)}$ на $4\pi_{ij}^{(1)}$ и $0,75\kappa_i^{(1)} + q_i^{(1)}\kappa^{(4)}$ соответственно. С учетом (1.10), (1.11) усеченные неоднородные уравнения импульса и энергии здесь имеют вид

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (p_{ij}^{(1)} + 4\pi_{ij}^{(1)}) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \pi_{ij,0}^{(3)} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} nk \frac{DT}{Dt} + p \nabla \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[q_i^{(1)} (1 + \kappa^{(4)}) + \frac{3}{4} \kappa_i^{(1)} \right] + (p_{ij}^{(1)} + 4\pi_{ij}^{(1)}) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \\ = -3 \frac{\partial}{\partial x_i} \kappa_{i,0}^{(3)} - \pi_{ij,0}^{(3)} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Полученные системы уравнений предназначены для описания "быстрых" движений газа с большими градиентами газодинамических переменных (в первую очередь – для зоны головного скачка уплотнения) и поэтому не носят общего характера. Исключением являются уравнения термострессовой конвекции [11], когда в главном приближении по $Kn \rightarrow 0$ в уравнении импульса учитываются температурные напряжения.

Для общего алгоритма модификации уравнений высших приближений метода Чепмена – Энскога предлагается следующая формулировка. Обозначим отрезок ряда Чепмена – Энскога для переносных свойств через Σ . Положим $\Sigma = \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)} + \Sigma^{(3)}$, где $\Sigma^{(1)}$ дается приближением Навье – Стокса, $\Sigma^{(2)}$ включает главные члены, $\Sigma^{(3)}$ – остальные члены высших приближений метода Чепмена – Энскога. Слагаемые $\Sigma^{(2)}$ не изменяют порядка системы уравнений сохранения, условий существования и устойчивости решений для данного класса течений. При учете $\Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}$ получаем уравнения сохранения первого приближения (усеченные уравнения), далее строится итерационная процедура, $\Sigma^{(3)}$ учитывается в неоднородных частях уравнений. В полученных выше модификациях сделана только одна итерация. В общем случае число итераций, как и выбор приближения для Σ , определяется условиями задачи.

На обтекаемых стенках могут быть поставлены граничные условия скольжения первого или второго порядков. Под условием скольжения первого порядка в статье понимаются известные формулы [12] для пристеночных скачков тангенциальной составляющей скорости и температуры вместе с условием прилипания для нормальной составляющей скорости. Условия скольжения второго порядка содержат дополнительные слагаемые барнеттова типа, их теория для нелинейного случая почти не разработана (в [8] методом Максвелла получены соответствующие приближенные формулы).

2. Покажем, как сделанные выше обобщения моделей [1, 2] влияют на решение задачи о структуре сильной ударной волны. При выводе [1] усеченных неоднородных уравнений Барнетта, описывающих структуру ударной волны, в формулах для p_{xx} , q_x давление исключалось с помощью уравнения состояния, в неоднородные части переносились слагаемые с τ'' , τ^2 , ν'' , далее плотность выражалась через скорость. В итоге была получена система

$$L_1(\nu, \tau) - \eta^2 \nu \left[\frac{\omega_1}{\sigma \tau} \nu^2 + \omega_5 \left(\frac{\nu'}{\nu} \right)^2 - \omega_6 \frac{\nu'}{\nu} \frac{\tau'}{\tau} \right] = A_1(\nu_0, \tau_0) \quad (2.1)$$

$$L_2(\nu, \tau) - \eta^2 \nu \nu' \left(\gamma_1 \frac{\tau'}{\tau} - \gamma_3 \frac{\nu'}{\nu} \right) = A_2(\nu_0, \tau_0), \quad (') = \frac{d}{dz} ()$$

Через A_1, A_2 обозначены неоднородные части, рассчитанные при помощи решения v_0, τ_0 усеченной системы (получающейся из (2.1) при $A_1 = 0, A_2 = 0$), $\tau = T/T_2$, L_1 и L_2 – навье-стоксовы операторы [2]

$$L_1 = \frac{4}{3} \eta v' - v - \sigma \frac{\tau}{v} + 1 + \sigma, \quad \sigma = \frac{3}{5} M_2^{-2} \quad (2.2)$$

$$L_2 = \frac{15}{4} \sigma \eta \tau' - \frac{3}{2} \sigma \tau + \frac{v^2}{2} - (1 + \sigma)v + \frac{1}{2}(1 + 5\sigma)$$

т.е. в приближении Навье – Стокса имеем $L_1 = 0, L_2 = 0$. Остальные обозначения такие же, как и в [1]: $\eta = \eta(\tau)$, v, z – безразмерные коэффициент вязкости, скорость и координата; M_2 – число Маха за ударной волной; коэффициенты $\omega_\alpha, \gamma_\beta$, где $\alpha = 1-6, \beta = 1-3$, выражаются через барнеттовы коэффициенты K, θ из (1.3), (1.4).

В левые части уравнений (1.8), (1.9) входят только слагаемые $\pi_{ij}^{(1)}, \kappa_i^{(1)}$. Вместо (2.1) получим следующую систему усеченных неоднородных уравнений в приближении Барнетта:

$$L_1(v, \tau) - \omega_1 \frac{\eta^2 v}{\sigma \tau} v'^2 = \eta_0^2 v_0 \left\{ \omega_2 \frac{\tau_0''}{\tau_0} + \omega_3 \left(\frac{\tau_0'}{\tau_0} \right)^2 + \omega_4 \left[2 \left(\frac{v_0'}{v_0} \right)^2 - \frac{v_0''}{v_0} \right] + \omega_5 \left(\frac{v_0'}{v_0} \right)^2 - \omega_6 \frac{v_0'}{v_0} \frac{\tau_0'}{\tau_0} \right\} \quad (2.3)$$

$$L_2(v, \tau) - (\gamma_1 - \gamma_3) \eta^2 \frac{v}{\tau} v' \tau' = \eta_0^2 v_0 \left\{ \gamma_2 v_0'' + \gamma_3 v_0' \left(\frac{\tau_0'}{\tau_0} - \frac{v_0'}{v_0} \right) \right\},$$

$$\eta_0 = \eta(\tau_0)$$

В (2.3) использованы обозначения (2.2) и расписаны операторы A_1, A_2 . Коэффициенты $\omega_\alpha, \gamma_\beta$ являются, вообще говоря, функциями τ_0 , однако в первом приближении по полиномам Сонина при $d \ln \mu / d \ln T = \text{const}$ они постоянны [2].

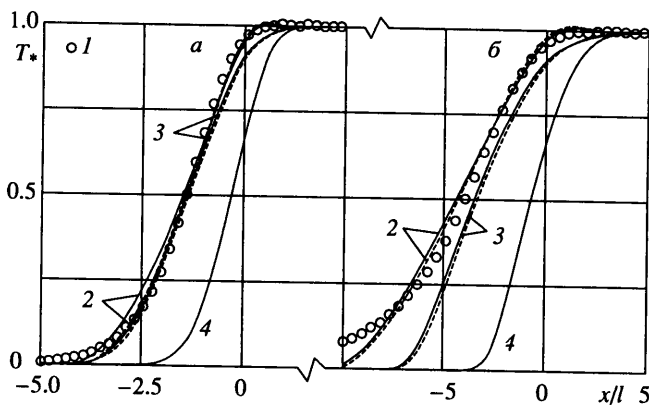
Перейдем к макроскопической модели. При использовании уравнений (1.10) – (1.13) также получаем упрощение левых частей уравнений (2.5) работы [2] (в которых вместо v_2'' должно быть v_0'' , а перед α_2 нужно опустить множитель v^{-2}). Имеем систему усеченных неоднородных уравнений для макромодели

$$L_1(v, \tau) - 4\omega_1 \frac{\eta^2 v}{\sigma \tau} v'^2 = -\alpha_2 \frac{\eta_0^3 \tau_0'}{\sigma \tau_0^2} v_0 v_0'^2 \quad (2.4)$$

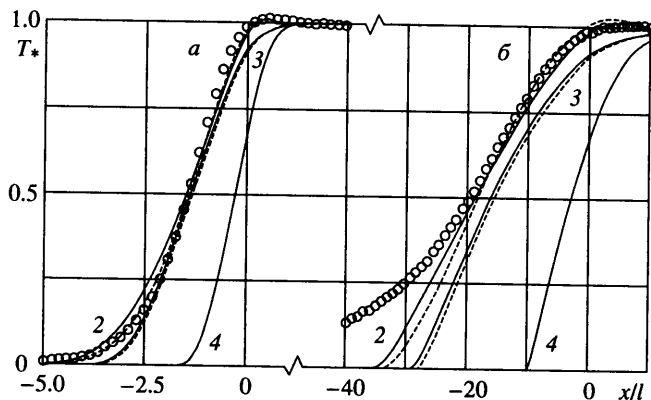
$$L_2(v, \tau) - \eta^2 \frac{v}{\tau} \left[\frac{3}{4} (\gamma_1 - \gamma_3) v' \tau' - \beta_3 \eta v \frac{\tau'^3}{\tau^2} \right] = 3\gamma_2 \eta_0^2 v_0 v_0''$$

Самое главное отличие от (2.3) – усиление нелинейности, особенно учет τ^3 .

Решение системы уравнений (2.3), (2.4) проводилось при помощи методики [1, 2]. Некоторые результаты представлены на фиг. 1, 2. За начало отсчета ($x = 0$) принята точка, где $\rho_* = 1/2$, приведенные температура T_* , плотность ρ_* и безразмерная координата x/l определены в [1, 2]. В случае молекул – упругих сфер использовались значения коэффициентов $\omega_\alpha, \gamma_\beta$, даваемые первым приближением по полиномам Сонина (формулы (1.5) в [2]). Представлены также результаты расчетов методом прямого статистического моделирования [2].



Фиг. 1. Профили приведенной температуры T_* в ударной волне при $M_1 = 5$ (*a* – молекулы – упругие сферы, *б* – максвелловские молекулы); 1 – расчеты методом прямого статистического моделирования; 2 – решение для макроскопической модели; 3 – решение усеченных неоднородных уравнений Барнетта; 4 – решение уравнений Навье – Стокса. Пунктир – расчеты [1, 2]



Фиг. 2. Профили приведенной температуры T_* в ударной волне при $M_1 = 25$. Обозначения см. на фиг. 1

Общий вывод состоит в том, что результаты расчетов T_* при помощи предложенных здесь модификаций (сплошные кривые) близки к результатам [1, 2] (пунктирные кривые). Для ρ_* различия соответствующих профилей еще меньше. Это послужило основанием для формулировки модификаций (1.8), (1.9) и (1.12), (1.13). Отметим, что различия и погрешности модификаций в случае молекул упругих сфер гораздо меньше, чем в случае максвелловских молекул.

3. Качественные особенности структуры ударной волны (особые точки, поведение интегральных кривых) в рамках развиваемого подхода гораздо сложнее, чем в случае уравнений Навье – Стокса: система уравнений неавтономна, неоднородна, неразрешена относительно производных. Однако для систем усеченных (однородных) уравнений легко получить те же результаты, что и в приближении Навье – Стокса. Кратко изложим соответствующее доказательство.

Следуя [13], введем новые переменные

$$d\xi = \frac{dz}{\frac{1}{3}\eta}, \quad \omega = \frac{v}{1+\sigma}, \quad \theta = \frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)^2} \quad (3.1)$$

В переменных (3.1) навье-стоксовы уравнения $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ имеют вид

$$\frac{d\omega}{d\xi} = M(\omega, \theta), \quad \frac{15}{8} \frac{d\theta}{d\xi} = L(\omega, \theta) \quad (3.2)$$

$$M = \omega + \frac{\theta}{\omega} - 1, \quad L = \theta - \frac{1}{3} \left[(\omega - 1)^2 + \frac{\sigma(3 - \sigma)}{(1 + \sigma)^2} \right] \quad (3.3)$$

Отличие от [13] состоит лишь во введении переменной ξ .

В плоскости (θ, ω) кривые $M = 0$, $L = 0$ ограничивают область R существования решения задачи, где $M < 0$, $L > 0$, точки пересечения кривых являются особыми (стационарными) точками ξ_0 , ξ_1 , соответствующими точкам $x = -\infty$, $x = \infty$. Выходящая из ξ_1 интегральная кривая остается внутри R , притягиваясь точкой ξ_0 . В результате эффективной является численное интегрирование уравнений вверх по потоку [13].

Используя переменные (3.1), обратимся к усеченным уравнениям, получающимся из (2.3), (2.4) приравниванием нулю левых частей. Уравнения (2.3) примут вид

$$\frac{d\omega}{d\xi} - M - \frac{9}{16} \omega_1 \frac{\omega}{\theta} \left(\frac{d\omega}{d\xi} \right)^2 = 0, \quad \omega_1 > 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{15}{8} \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{L}{B}, \quad B = 1 - \frac{1}{5} (\gamma_1 - \gamma_3) \frac{\omega}{\theta} \frac{d\omega}{d\xi}, \quad \gamma_1 - \gamma_3 > 0 \quad (3.5)$$

В стационарных точках $d\omega/d\xi = 0$, $d\theta/d\xi = 0$, поэтому здесь $M = 0$ (следствие (3.4)). Это определяет нужный корень квадратного уравнения (3.4)

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{8}{9\omega_1} \frac{\theta}{\omega} \left[1 - \left(1 - \frac{9}{4} \omega_1 \frac{\omega}{\theta} M \right)^{1/2} \right] \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует $d\omega/d\xi < 0$ при $M < 0$. Тогда из (3.5) имеем $B > 0$, $L = 0$ в стационарных точках, $d\theta/d\xi > 0$ при $L > 0$. Линеаризуя (3.5), (3.6) по M , L в стационарных точках, получим линеаризованные уравнения (3.2). Характер поведения интегральных кривых вблизи кривых $M = 0$, $L = 0$ в плоскости (ω, θ) тот же, что и для (3.2). Поэтому свойства стационарных точек и решения в области R такие же, как и в приближении Навье – Стокса, в частности эффективно интегрирование вверх по потоку [13].

Рассмотрим теперь (2.4), опуская правые части. Первое уравнение и его решение отличаются от (3.4), (3.6) только заменой ω_1 на $4\omega_1$, следовательно, справедливы сделанные выше выводы. Второе уравнение (2.4) приводится к виду

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^3 + 3q \frac{d\theta}{d\xi} + 2r = 0 \quad (3.7)$$

$$q = \frac{20}{9} \frac{\theta^3}{\beta_3 \omega^2} \left[1 - \frac{3}{20} (\gamma_1 - \gamma_3) \frac{\omega}{\theta} \frac{d\omega}{d\xi} \right], \quad r = -\frac{16}{9\beta_3} \frac{\theta^3}{\omega^2} L$$

Так как $d\omega/d\xi < 0$, то $q > 0$. Следовательно, $D = q^3 + r^2 > 0$ и кубическое уравнение (3.7) имеет только одно действительное решение

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}} \quad (3.8)$$

для которого из (3.7) следует, что знак $d\theta/d\xi$ определяется знаком r , поэтому при $L > 0$ имеем $d\theta/d\xi > 0$. Кроме того, в стационарных точках $r = 0$, $L = 0$. Линеаризуя (3.7) по L , получаем второе уравнение (3.2). В итоге справедливы те же выводы, что и для (3.4),

(3.5). Таким образом, фазовые картины усеченных уравнений и уравнений Навье – Стокса одинаковы.

Численное интегрирование всех систем уравнений проводилось из окрестности стационарной точки $z = \infty$ вверх по потоку. Описание в [1] решения в этой окрестности требует дополнительных комментариев. В приближении Навье – Стокса здесь имеем автономную систему двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Собственные значения действительны, причем $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, так что выбирается решение, соответствующее λ_1 . В случае рассмотренных выше и в [1, 2] модификациях в эту систему уравнений добавляются неоднородные члены, пропорциональные $\exp(\lambda_1 z)$. Собственные значения те же, в решении перед $\exp(\lambda_1 z)$ появляется множитель – линейная функция z , т.е. изменения по сравнению с приближением Навье – Стокса сводятся как бы к изменению собственных функций [1]. Формула для этого множителя приведена на с. 170 работы [1] с опечаткой. Правильное выражение должно выглядеть так

$$C + \frac{f_v c_{T2} - f_T c_{v2}}{c_{T2} c_{v1} - c_{T1} c_{v2}} z$$

Величины f_u, f_T содержат барнеттовы коэффициенты $\omega_2, \omega_4, \gamma_2$.

4. Перейдем к задаче о цилиндрическом течении Куэтта. Пусть одноатомный газ заключен между коаксиальными круговыми цилиндрами. Внутренний цилиндр с радиусом a и однородной температурой T_{wa} вращается с постоянной угловой скоростью U/a . Внешний цилиндр радиуса b имеет однородную температуру T_{wb} и находится в покое. Введем цилиндрическую систему координат r, ϕ, y , где ось y направлена вдоль оси цилиндров. Полагаем течение стационарным и двумерным, причем $u_y = 0$, $\partial/\partial y = 0$. Из симметрии задачи следует $u_r = 0$, $\partial/\partial \phi = 0$.

В приближении Барнетта уравнения неразрывности, энергии и импульса в проекции на ось r принимают вид [8]

$$\frac{d}{dr} \left[r^3 \mu \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\phi}{r} \right) \right] = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \lambda \frac{dT}{dr} \right) + \mu r^3 \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{u_\phi}{r} \right)^2 \right] = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{dp}{dr} - \rho \frac{u_\phi^2}{r} + \frac{dp_{rr}^{(2)}}{dr} + \frac{1}{r} (p_{rr}^{(2)} - p_{\phi\phi}^{(2)}) = 0 \quad (4.3)$$

Выражения для барнеттовых напряжений $p_{rr}^{(2)}, p_{\phi\phi}^{(2)}$ приведены в [8]. Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{r}{a}, \quad u^* = \frac{u_\phi}{U_{wa}}, \quad T^* = \frac{T}{T_{wa}}, \quad p^* = \frac{p}{p_a}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_a}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_{wa}} \\ k &= \frac{a}{b}, \quad h = b - a, \quad M^2 = \frac{U^2}{\gamma R T_{wa}}, \quad Re = \frac{\rho_a U h}{\mu_{wa}}, \quad \frac{d}{dr^*} () = ()' \\ \varepsilon &= \frac{1-k}{k} \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{M}{Re T_a^*}, \quad \gamma = \frac{5}{3}, \quad Pr = \frac{\gamma}{\gamma-1} R \frac{\mu}{\lambda} = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (4.4)$$

В дальнейшем записываем все соотношения в безразмерном виде, опуская звездочки сверху у безразмерных величин. Тогда вместо (4.1) – (4.3) система усеченных

неоднородных уравнений Барнетта, согласно (1.8), (1.9), запишется в виде

$$\left[r^3 \mu \left(\frac{u}{r} \right)' \right]' = 0 \quad (4.5)$$

$$(r\mu T')' + \text{Pr}(\gamma - 1) M^2 r^3 \mu \left(\frac{u}{r} \right)'' = 0 \quad (4.6)$$

$$p' - \gamma M^2 \frac{p u^2}{T r} + \varepsilon^2 (\Pi_1 + \Pi_2') = \varepsilon^2 (\Pi_{3,0} + \Pi_{4,0}') \quad (4.7)$$

$$\Pi_1 = \frac{\mu^2}{p} \gamma M^2 K_2 \frac{1}{r} \left[\left(\frac{u}{r} \right)^2 - u'^2 \right]$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu^2}{p} \gamma M^2 \left[\left(\frac{1}{3} K_2 + \frac{1}{12} K_6 \right) \left(\frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} K_2 - \frac{1}{6} K_6 \right) \frac{u}{r} u' - \left(\frac{2}{3} K_2 - \frac{1}{12} K_6 \right) u'^2 \right]$$

$$\Pi_{3,0} = \frac{\mu_0^2}{\rho_0} \frac{1}{r} \left\{ -\frac{1}{r} \left[K_2 \frac{\rho_0'}{\rho_0} T_0 + (K_2 - K_3) T_0' \right] + (K_2 - K_3) T_0'' + K_2 \frac{\rho_0''}{\rho_0} T_0 + \right. \\ \left. + (K_2 - K_4) \frac{\rho_0'}{\rho_0} T_0' - K_2 \left(\frac{\rho_0'}{\rho_0} \right)^2 T_0 - (K_4 + K_5) \frac{T_0'^2}{T_0} \right\}$$

$$\Pi_{4,0} = \frac{2}{3} r \Pi_{3,0} + \frac{1}{3} \frac{\mu_0^2}{\rho_0} \frac{1}{r} \left[K_2 \frac{\rho_0'}{\rho_0} T_0 + (K_2 - K_3) T_0' \right]$$

Уравнения в приближении Навье – Стокса следуют отсюда, если все величины Π опустить, усеченная система получается при $\Pi_{3,0} = \Pi_{4,0} = 0$, при помощи ее рассчитываются ρ_0, T_0, u_0 . Коэффициенты K_2, \dots, K_6 в $\Pi_{3,0}, \Pi_{4,0}$ рассчитываются по T_0 , однако в принятом ниже приближении они постоянны [1]. В случае макромодели (1.10) – (1.13) уравнение (4.5) не изменяется, а вместо (4.6), (4.7) имеем

$$\left[r\mu T' \left(1 + \frac{4}{15} \beta_3 \varepsilon^2 \frac{\mu^2}{\rho^2 T^3} T'^2 \right) \right]' + \text{Pr}(\gamma - 1) M^2 r^3 \mu \left(\frac{u}{r} \right)'' = 0 \quad (4.8)$$

$$p' - \gamma M^2 \frac{p u^2}{T r} + 4\varepsilon^2 (\Pi_1 + \Pi_2') = 0 \quad (4.9)$$

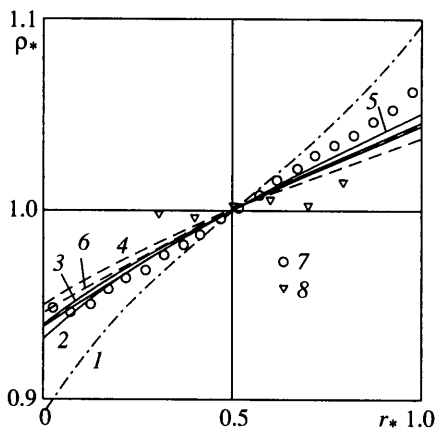
Условие скольжения первого порядка запишем в виде [8]

$$u = 1 + a_1 \varepsilon T_a \frac{\mu}{\sqrt{T}} \left(\frac{u}{r} \right)', \quad T = 1 + b_1 \varepsilon T_a \frac{\mu}{\sqrt{T}} T' \quad (r = 1) \quad (4.10)$$

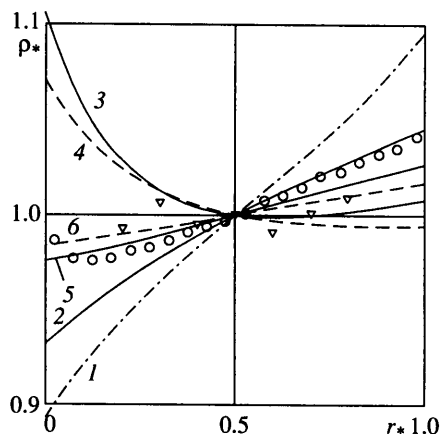
$$u = -a_1 \varepsilon T_a \frac{\mu}{k\rho\sqrt{T}} \left(\frac{u}{r} \right)', \quad T = T_{wb} - b_1 \varepsilon T_a \frac{\mu}{k\rho\sqrt{T}} T' \quad \left(r = \frac{1}{k} \right) \quad (4.11)$$

$$a_1 = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{2 - \sigma}{\sigma}, \quad b_1 = \frac{15}{8} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{2 - \alpha}{\alpha}$$

В (4.10) учтено условие $\rho = 1$ при $r = 1$. Условия прилипания получаются отсюда при $\varepsilon = 0$. В дальнейшем коэффициенты аккомодации $\sigma = \alpha = 1$. В соответствии с асимп-



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Профили плотности в цилиндрическом течении Куэтта при $Kn = 0,406$. 1, 2 – решения уравнений Навье – Стокса с граничными условиями прилипания и скольжения первого порядка; 3, 4 – решения усеченных неоднородных уравнений Барнетта с граничными условиями скольжения первого и второго порядков; 5, 6 – решения для макроскопической модели с граничными условиями скольжения первого и второго порядков; 7 – расчеты методом прямого статистического моделирования [10]; 8 – экспериментальные данные [9]

Фиг. 4. Профили плотности в цилиндрическом течении Куэтта при $Kn = 1,065$. Обозначения см. на фиг. 3

тотической теорией ($Kn \rightarrow 0$) в коэффициентах формул (4.10), (4.11) температуру газа полагают равной температуре стенки, т.е. $\mu\sqrt{T} = 1$ в (4.10) и $\mu\sqrt{T} = \mu_{wb}\sqrt{T_{wb}}$ в (4.11). Однако запись (4.10), (4.11) иногда расширяет область применимости теории.

5. Как и в [9, 10], полагаем $b/a = 1,5$, температуры стенок – одинаковы ($T_{wb} = 1$), $M = 0,9917$. Для аргона [9] $\mu \propto T^s$, $s \approx 0,8$, хотя при данных условиях температура в поле течения меняется слабо и влияние величины s незначительно [9, 10]. Число $Kn = 0,04-1,06$ [9, 10].

Некоторые результаты расчетов задачи при помощи систем уравнений (4.5) – (4.7) и (4.5), (4.8), (4.9) приведены на фиг. 3–6, где использованы приведенные параметры

$$r_* = (r-1) \frac{k}{1-k}, \quad \rho_* = \frac{\rho}{\rho(r_* = 1/2)}$$

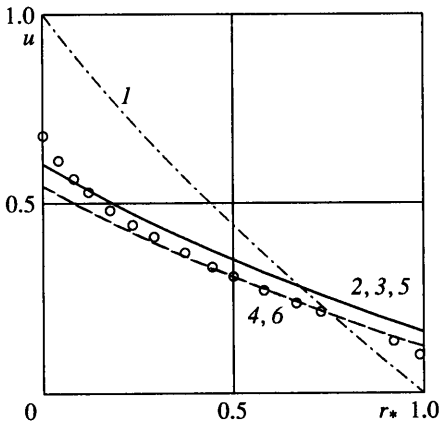
Значения чисел Кнудсена (как и в [10])

$$Kn = \frac{\mu_{wa}}{\langle \rho \rangle h} \left(\frac{\pi}{2RT_{wa}} \right)^{1/2}$$

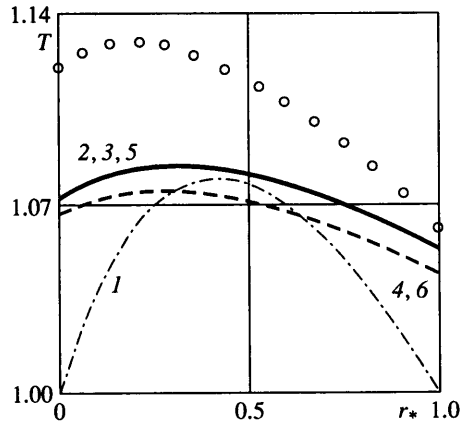
для сопоставимости с [9] вычислялись по средней плотности $\langle \rho \rangle$ и подгонялись путем итераций. Некоторая неоднозначность, связанная со способом усреднения в [9, 10], не выходит за рамки точности интерпретации данных эксперимента [9] в целом.

Расчеты показали, что макроскопические модели начинают расходиться с методом прямого статистического моделирования при $Kn \geq 0,2$, по мере дальнейшего роста Kn расхождения увеличиваются. Поэтому в основном сравнение результатов применения различных моделей с данными [9, 10] проводится для $Kn = 0,406$.

На фиг. 3, 4 сравниваются данные по профилям плотности и демонстрируется влияние числа $Kn \sim 1$. На фиг. 5, 6 приведено сопоставление с результатами расчетов в приближении Навье – Стокса, подтверждающее вывод [10] о широкой области приме-



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 5. Профили скорости в цилиндрическом течении Куэтта при $Kn = 0,406$. Обозначения см. на фиг. 3

Фиг. 6. Профили температуры в цилиндрическом течении Куэтта при $Kn = 0,406$. Обозначения см. на фиг. 3

нимости этого приближения с граничными условиями скольжения первого порядка. Как видно из фиг. 3, расхождение этого приближения с результатами метода прямого статистического моделирования по градиенту плотности в средней части течения меньше, чем расхождение между данными [9, 10]. Градиенты скорости (фиг. 5) в основной части течения практически совпадают. Различия в температуре (фиг. 6) значительно больше.

Результаты всех макроскопических теорий с граничными условиями скольжения первого порядка при $Kn = 0,406$ близки друг к другу, особенно для скорости и температуры, где соответствующие графики практически сливаются. При $Kn = 1,065$ (фиг. 4) ухудшается точность усеченных неоднородных уравнений Барнетта (особенно для r_* , где меняется знак градиента). Неожиданным и обнадеживающим результатом явилась довольно высокая точность макромодели: при $Kn = 1,065$ для всех газодинамических переменных она дала лучшие (или почти одинаковые) результаты по сравнению с приближением Навье – Стокса при использовании граничных условий первого порядка.

Переход от граничных условий прилипания к граничным условиям скольжения первого порядка имеет более принципиальное значение, чем переход от приближения Навье – Стокса для переносных свойств к более высоким приближениям. В этом отличие такого рода краевых задач от задачи о структуре ударной волны. Применение граничных условий скольжения второго порядка [8] носит менее регулярный характер: в одних случаях оно улучшает точность теории, в других – ухудшает.

Заключение. Предложен новый алгоритм построения ненавье-стоксовых моделей ламинарных течений газов и их смесей как сплошной среды. В системе уравнений первого приближения дополнительно к навье-стоксовым членам учитываются главные члены высших приближений метода Чепмена – Энскога для переносных свойств, не изменяющие порядок системы уравнений, условия существования и устойчивости решений. Системы уравнений следующих приближений отличаются наличием неоднородных частей, в которых учитываются остальные члены выражений для переносных свойств и которые рассчитываются при помощи предыдущих итераций. Такая процедура не искажает структуры уравнений сохранения. Выбор отрезка ряда Чепмена – Энскога, главных членов, числа и вида итераций зависит от специфики рассматриваемого класса течений, баланса требований точности и простоты. Конкрет-

ными реализациями алгоритма являются описанные выше модификации, в которых делается только одна итерация.

В модификации уравнений Барнетта главные члены состоят из парных произведений пространственных производных компонентов скорости (тензор напряжений) и произведений компонентов градиента температуры на производные компонентов скорости (вектор теплового потока). Остальные члены выражений для барнеттовых вкладов в переносные свойства переносятся в правую часть и рассматриваются как известные функции, вычисленные с помощью решения тех же уравнений, но без правых частей, при тех же граничных и начальных условиях. Тем самым исходные, однородные уравнения заменяются неоднородными. В уравнениях макроскопической модели ряд барнеттовых слагаемых тензора напряжений и вектора теплового потока опускается и учитываются некоторые супербарнеттовы слагаемые.

Левые (однородные) части перечисленных уравнений имеют основные свойства, аналогичные уравнениям Навье – Стокса, в частности – второй порядок по пространственным производным от скорости и температуры и первый порядок по производным давления и плотности.

Модели имеют ту же точность для задачи о структуре сильно ударной волны, что и модели [1, 2], причем обобщенная макроскопическая модель дает распределения параметров по большей части толщины ударной волны, близкие к результатам метода прямого статистического моделирования.

В задаче о цилиндрическом течении Куэтта без температурного перепада при околосвуковой скорости и числе $Kn \approx 0,4$ уравнения Навье – Стокса и предложенные модели с граничными условиями скольжения первого порядка имеют близкую точность, удовлетворительно согласуясь с методом прямого статистического моделирования.

Полученные модели могут быть использованы для расчета обтекания тел гиперзвуковым потоком одноатомного газа (в первую очередь в области головного скачка уплотнения). За этой областью, вблизи передней поверхности тела в большинстве практически интересных случаев барнеттовы и супербарнеттовы слагаемые несущественны. При этом в зонах отрыва эффекты разреженности могут быть значительными и здесь особенно необходим сравнительный анализ макроскопических и кинетических моделей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00409 и грант поддержки ведущих научных школ 96-15-96063).

Авторы признательны О.Г. Фридендеру за внимание к работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бузыкин О.Г., Галкин В.С., Носик В.И. Модификации уравнений Барнетта и задача о структуре ударной волны // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 3. С. 164–176.
2. Бузыкин О.Г., Галкин В.С., Ерофеев А.И., Носик В.И. Макроскопическая модель структуры сильной ударной волны // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 4. С. 125–135.
3. Галкин В.С., Шавалиев М.Ш. Газодинамические уравнения высших приближений метода Чепмена – Энскога (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. С. 3–28.
4. Primakoff H. Translational dispersion of sound in gases // J. Acoust. Soc. America. 1942. V. 14. № 1. P. 14–18.
5. Tsien H.S., Schamberg R. Propagation of plane sound waves in rarefied gases // J. Acoust. Soc. America. 1946. V. 18. № 2. P. 335–341.
6. Tsien H.S. Superaerodynamics, mechanics of rarefied gases // J. Aeronaut. Sci. 1946. V. 13. № 12. P. 653–664.
7. Галкин В.С., Носик В.И. О модификации уравнений Барнетта на примере задачи о распространении звука // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 3. С. 126–133.

8. *Lin T.C., Street R.E.* Effect of variable viscosity and thermal conductivity on high-speed sleep flow between concentric cylinders // NACA. Rep. 1954. № 1175. 36 p.
9. *Alofs D.J., Springer G.S.* Cylindrical Couette flow experiments in the transition regime // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 2. P. 298–305.
10. *Nambu K.* Analysis of cylindrical Couette flows by use of the direction simulation method // Phys. Fluids. 1984. V. 27. № 11. P. 2632–2635.
11. *Коган М.Н., Галкин В.С., Фридлендер О.Г.* О напряжениях, возникающих в газах вследствие неоднородности температуры и концентраций. Новые типы свободной конвекции // Успехи физ. наук. 1976. Т. 119. Вып. 1. С. 111–125.
12. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
13. *Gilbarg D., Paolucci D.* The structure of shock waves in the continuum theory of fluids // J. Ration. Mech. Analysis. 1953. V. 2. № 4. P. 617–642.

Москва

Поступила в редакцию
28.XII.1999