

УДК 532.59:533.692

© 2001 г. С.И. ФИЛИППОВ

ОБТЕКАНИЕ ПОДВОДНОГО КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ

Численно-аналитическим методом, основанным на распределении особенностей по свободной поверхности, с использованием схемы возмущений дано решение задачи обтекания крылового профиля поступательным потоком весомой жидкости с нелинейными граничными условиями. Проведено сравнение результатов расчетов с экспериментальными и расчетными данными других авторов.

В настоящее время активно развиваются методы решения задач генерации поверхностных гравитационных волн поступательно движущимся телом, позволяющие учитывать нелинейность граничных условий на свободной поверхности и контуре. Полученные результаты в значительной мере отражены в обзорных работах [1–3]. Наибольшие успехи достигнуты при обтекании особенностей [4–7]. Рассмотрение цилиндрических форм при нелинейных граничных условиях было начато в [8]. Среди последних работ этой области отметим исследования [9, 10]. Применению так называемой двойной модели [11], связанной с введением зеркально отображенного контура, посвящены работы [12–14]. Обтекание тонкого профиля по схеме возмущений [15] рассматривалось в [16, 17]. Границы применимости теории возмущений подробно исследованы в [4]. Тонкий профиль в полной нелинейной постановке исследовался в [18]. Методы конечных и граничных элементов для решения задачи о движении подводного крыла применялись в [19, 20]. В [21, 22] предложен метод для вычисления полностью нелинейного течения около подводного крылового профиля, в котором решение опирается на панельный метод высокого порядка.

Телесный симметричный профиль с нулевым углом атаки на основе схемы возмущений исследовался в [23]. Условие на контуре в [23] выполнялось приближенно, что объяснялось рассмотрением теории дальнего поля. Наиболее подробно в [23] изучены нелинейные эффекты на свободной поверхности. Получено хорошее согласование числовых результатов с экспериментом. Ниже предлагается метод, сочетающий схему возмущений с возможностью точно удовлетворять граничному условию на контуре.

1. Постановка задачи. Рассмотрим в системе координат, связанной с профилем C , имеющим хорду длины l и толщину b , установившийся поток идеальной несжимаемой весомой жидкости плотности ρ (фиг. 1). Пусть ось x совпадает с невозмущенным уровнем свободной поверхности E и направлена навстречу потоку, а ось y – вертикально вверх и проходит через середину хорды профиля точку $(0, -h)$. Скорость потока на бесконечности перед профилем параллельна оси x и равна $-U$.

В предположении потенциальности течения задача сводится к определению комплексного потенциала возмущенного течения $W(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ при $z = x + iy$, удовлетворяющего граничным условиям на свободной поверхности, контуре C и на бесконечности соответственно

$$-U \frac{\partial \phi}{\partial x} + g\eta + \frac{1}{2} \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 = 0, \quad -U\eta + \psi(x, \eta) = 0 \quad (y = \eta(x)) \quad (1.1)$$

где g – ускорение силы тяжести;

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = U \cos(n, x) \quad (z \in C) \quad (1.2)$$

$$\left| \frac{dW}{dz} \right| \leq A \quad (A = \text{const}), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{dW}{dz} = 0 \quad (1.3)$$

Воспользуемся схемой возмущений, т.е. будем отыскивать решение в виде ряда

$$W(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w^{(k)}(z), \quad \eta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta^{(k)}(x), \quad U = \sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)} \quad (1.4)$$

где для малого параметра $\varepsilon = b/h$ величины $w^{(k)}(z)$, $\eta^{(k)}(x)$, $u^{(k)}$ будут $O(\varepsilon^k)$. Используя



Фиг. 1. Схема течения; штрихпунктирные, штриховые и сплошные кривые на фиг. 1–5 соответствуют теории возмущений первого, второго и третьего порядка

разложение (1.1) в ряд Тейлора по y вблизи оси x , а также представления (1.4), сгруппировав члены одинакового порядка малости по ε , найдем

$$\text{Re} \left[\frac{dw^{(k)}(z)}{dz} + i v w^{(k)}(z) \right] = q^{(k)}(x) \quad (1.5)$$

$$v = g / u^{(0)^2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad q^{(1)}(x) \equiv 0$$

$$q^{(2)}(x) = \frac{1}{2u^{(0)}} \left(\psi_y^{(1)^2} + \psi_x^{(1)^2} \right) + \eta^{(1)} \left(v \psi_y^{(1)} - \psi_{yy}^{(1)} \right) - 2v u^{(1)} \eta^{(1)}$$

$$q^{(3)}(x) = v \left(\eta^{(2)} \psi_y^{(1)} + \frac{1}{2} \eta^{(1)^2} \psi_{yy}^{(1)} + \eta^{(1)} \psi_y^{(2)} \right) - \eta^{(2)} \psi_{yy}^{(1)} - \frac{1}{2} \eta^{(1)^2} \psi_{yyy}^{(1)} - \eta^{(1)} \psi_{yy}^{(2)} +$$

$$+ \frac{1}{u^{(0)}} \left(\eta^{(1)} \psi_y^{(1)} \psi_{yy}^{(1)} + \eta^{(1)} \psi_x^{(1)} \psi_{xy}^{(1)} + \psi_y^{(1)} \psi_y^{(2)} + \psi_x^{(1)} \psi_x^{(2)} \right) - 2u^2 v \eta^{(1)} +$$

$$+ u^{(1)} \left(\eta^{(1)} \psi_{yy}^{(1)} - \psi_y^{(2)} - v \eta^{(2)} \right) \text{ и т.д.}$$

Граничное условие (1.2) представим в виде

$$\frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial s} = u^{(k-1)} \cos(n, x) \quad (z \in C) \quad (1.6)$$

Условие (1.3) будем считать выполняющимся для всех функций $w^{(k)}(z)$.

2. Метод решения. Для решения задачи применим метод, впервые предложенный для обтекания кругового цилиндра в [24] и развитый для крылового профиля в [25, 26]. В [24–26] рассмотрено линеаризованное условие на свободной поверхности. Метод основывается на распределении двойного слоя особенностей (диполей) по невозмущенному уровню свободной поверхности. Будем искать решение в виде суммы

$$W(z) = u^{(0)} \sum_{k=1}^{\infty} w^{(k)}(z) + \gamma w_{\gamma}(z), \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{(k)} \quad (2.1)$$

где γ – значение циркуляции. Функции $u^{(0)}w^{(k)}(z)$ удовлетворяют условиям (1.5), (1.6), (1.3). Многочленные функции $w_\gamma(z)$ удовлетворяют условию (1.3) и условиям

$$\operatorname{Re} \left[\frac{dw_\gamma(z)}{dz} + ivw_\gamma(z) \right] = 0 \quad (y=0)$$

$$\frac{\partial \psi_\gamma}{\partial s} = 0 \quad (z \in C), \quad \Delta_C w_\gamma(z) = 1$$

где Δ_C – приращение $w_\gamma(z)$ при обходе контура C .

Согласно методу решения представим $w^{(k)}(z)$ в виде

$$w^{(k)}(z) = w_\infty^{(k)}(z) + V^{(k)}(z) + \Phi^{(k)}(z), \quad w_\infty^{(k)}(z) = u^{(k-1)}w_\infty^{(1)}(z) / u^{(0)} \quad (2.2)$$

$$V^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^{(k)}(t)}{z-t} dt, \quad \Phi^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(z,t)\mu^{(k)}(t) dt$$

где $w_\infty^{(1)}(z)$ – потенциал обтекания контура безграничным потоком, $V^{(k)}(z)$ – потенциал от распределенных особенностей вещественной плотности $\mu^{(k)}(x)$, $\Phi^{(k)}(z)$ – дополнительный потенциал к $V^{(k)}(z)$. Функция $F(z, t)$ строится в параметрической плоскости ζ на основании теоремы Милл-Томсона об окружности так, чтобы выполнялось условие на контуре (1.6)

$$F[f(\zeta) - ih, f(\tau) - ih] = \frac{H(\zeta, \tau) + G(\zeta, \tau)}{f'(\tau)}, \quad G(\zeta, \tau) = \frac{1}{\bar{\tau}^2(\zeta - 1/\bar{\tau})}$$

$$H(\zeta, \tau) = \frac{f(\zeta) - f(\tau) - f'(\tau)(\zeta - \tau)}{(\zeta - \tau)[f(\zeta) - f(\tau)]}$$

Здесь $z = f(\zeta) - ih$ – конформное отображение внешности окружности $C^0: |\zeta| = 1$ на внешность профиля, причем $f(\infty) = \infty$, $\zeta_a = -1$ соответствует задней кромке профиля z_a , $\tau = f^{-1}(t + ih)$ при $t \in E$.

3. Вывод интегрального уравнения. Для определения $\mu^{(k)}(x)$ подставим (2.2) в (1.5)

$$\operatorname{Re} \left[\frac{dV^{(k)}}{dz} + ivV^{(k)} + \left(\frac{d}{dz} + iv \right) \Omega^{(k)}(z) \right] = q^{(k)}(x) \quad (z = x - i0)$$

$$\Omega(z) = w_\infty^{(k)}(z) + \Phi^{(k)}(z)$$

Данное уравнение равносильно следующему

$$\operatorname{Re} \left[\frac{dV^{(k)}}{dz} + ivV^{(k)} + \left(\frac{d}{dz} - iv \right) \bar{\Omega}^{(k)}(z) \right] = q^{(k)}(x) \quad (y=0)$$

Поскольку теперь под знаком действительной части стоит функция, регулярная в нижней полуплоскости, то при $y < 0$

$$\frac{dV^{(k)}}{dz} + ivV^{(k)} + \left(\frac{d}{dz} - iv \right) \bar{\Omega}^{(k)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q^{(k)}(t) dt}{z-t} + iN \quad (3.1)$$

Решая уравнение (3.1) как дифференциальное относительно $V^{(k)}$ с учетом определения вещественной постоянной N с помощью равенства $\lim_{x \rightarrow \infty} V^{(k)}(z) = 0$, получим

$$V^{(k)}(z) = Q^{(k)}(z) + \bar{\Omega}^{(k)}(z) - 2 \exp(-ivz) \int_{-\infty}^z \exp(-ivv) \frac{d\bar{\Omega}^{(k)}(v)}{dv} dv \quad (3.2)$$

$$Q^{(k)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-iv(z-t)] \text{Ei}[iv(z-t)] q^{(k)}(t) dt \quad (3.3)$$

где $\text{Ei}(z)$ – интегральная показательная функция.

Для сходимости интеграла (3.3) необходимо [23], чтобы функции $q^{(k)}(x)$ не были осциллирующими при больших отрицательных значениях x . В работе [23] доказано, что при $k=2$: $u^{(1)}=0$, а при $k=3$ $u^{(2)} = \frac{1}{2} u^2 a^{(1)2} u^{(0)}$, где $a^{(1)}$ – амплитуда волн в линейной теории. Находя действительную часть предела (3.2) при $z \rightarrow x$ (предельный переход в сингулярном интеграле осуществляется по формуле Сохоцкого), в параметрической плоскости для $\mu^{(k)}$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu^{(k)}(\xi) = \sigma^{(k)}(\xi) + \text{Im} \int_T L(\xi, \tau) \mu^{(k)}(\tau) d\tau \quad (k=1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

$$\sigma^{(k)}(\xi) = 2 \text{Re} Q^{(k)}(\xi) + u^{(k-1)} \sigma^{(1)}(\xi) / u^{(0)}$$

$$\sigma^{(1)}(\xi) = 2 \text{Re} \left\{ w_{\infty}^{(1)}(\xi) - 2 \exp[ivf(\xi)] \int_{\infty}^{\xi} \exp[-ivf(u)] \frac{dw_{\infty}^{(1)}}{du} du \right\}$$

$$w_{\infty}^{(1)}(\xi) = -(K\xi + \bar{K} / \xi) + f(\xi), \quad K = f'_{\xi}(\infty)$$

$$L(\xi, \tau) = \frac{1}{\pi} \left\{ H(\xi, \tau) + G(\xi, \tau) - 2 \exp[ivf(\xi)] \int_{\infty}^{\xi} \exp[-ivf(u)] \cdot [H'_v(u, \tau) + G'_v(u, \tau)] du \right\}$$

где T : $\xi = f^{-1}(x + ih)$ – образ свободной поверхности в плоскости ζ .

Для нахождения циркуляционной части потенциала $W(z)$ представим $w_{\gamma}(z)$ в виде, аналогичном (2.2), заменив $\mu^{(k)}$ на μ_{γ} , а $w_{\infty}^{(k)}$ на

$$w_{\gamma\infty}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\zeta - 1 / \bar{\zeta}_{\gamma}}{\zeta - \zeta_{\gamma}}$$

где ζ_{γ} – произвольно выбранная точка вне области течения [26]. В итоге для определения μ_{γ} получается уравнение типа (3.4) с тем же интегральным ядром $L(\xi, \tau)$ и следующей свободной частью

$$\sigma_{\gamma}(\xi) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \ln \frac{(\xi - 1 / \bar{\zeta}_{\gamma}) [f(\xi) - f(\zeta_{\gamma})]}{(\xi - \zeta_{\gamma}) [f(\xi) - \bar{f}(\zeta_{\gamma}) - 2ih]} - 2 \exp[ivf(\xi)] \int_{\infty}^{\xi} \exp[-ivf(u)] \left[\frac{1}{u - \bar{\zeta}_{\gamma}^{-1}} + \frac{f'(u)}{f(u) - f(\zeta_{\gamma})} - \frac{1}{u - \zeta_{\gamma}} \right] du \right\}$$

Значение циркуляции находится из постулата Жуковского–Чаплыгина о конечности скорости на острой кромке профиля

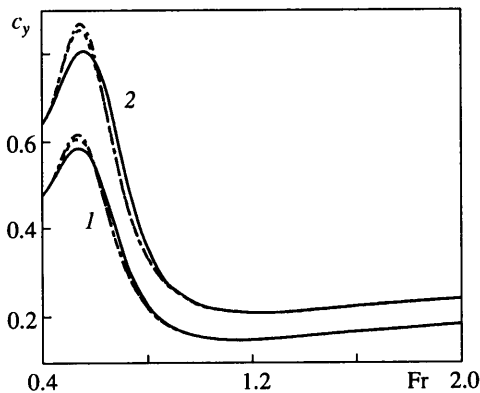
$$\gamma^{(k)} = \frac{2\pi \text{Im}(-K + \bar{K} / \zeta_a^2) + u^{(0)} \text{Re} J^{(k)}(\zeta_a)}{\text{Re}[(\zeta_a - 1 / \bar{\zeta}_{\gamma})^{-1} - (\zeta_a - \zeta_{\gamma})^{-1} - J_{\gamma}(\zeta_a)]} \quad (3.5)$$

$$J^{(k)}(\zeta_a) = \int_T I(\zeta_a, \tau) \mu^{(k)}(\tau) d\tau, \quad J_{\gamma}(\zeta_a) = \int_T I(\zeta_a, \tau) \mu_{\gamma}(\tau) d\tau$$

$$I(\zeta_a, \tau) = (\zeta_a - \tau)^{-2} + [\bar{\tau}(\zeta_a - 1 / \bar{\tau})]^{-2}$$

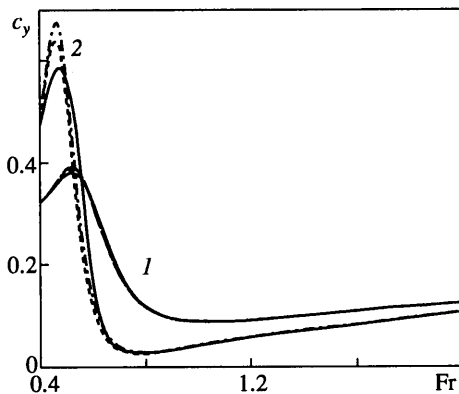
4. Расчет гидродинамических характеристик. Уравнение (3.4) можно записать в операторном виде

$$\mu^{(k)}(\xi) = \sigma^{(k)}(\xi) + B[\mu^{(k)}]. \quad (4.1)$$



Фиг. 2

Фиг. 2. Зависимость коэффициента подъемной силы c_y от числа Фруда Fr при $h = 0,6$; $\alpha = 2^\circ$; 3° (кривые 1, 2)



Фиг. 3

Фиг. 3. Зависимость c_y от Fr при $\alpha = 1^\circ$ и $h = 0,6$; $0,4$ (кривые 1, 2)

При достаточном отстоянии h до свободной поверхности, как показано в [24, 25], B – сжимающий оператор в пространстве непрерывных функций и $\|B\| < 1$. Решение уравнения (4.1) получается в виде ряда

$$\mu^{(k)}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^{(k)}(\xi)$$

методом последовательных приближений $\mu_n^{(k)}(\xi) = B[\mu_{n-1}^{(k)}]$, где нулевым приближением служит $\mu_0^{(k)}(\xi) = \sigma^{(k)}(\xi)$. Аналогично решается уравнение относительно μ_y . Вычислив по формуле (3.5) значение циркуляции, можем определить комплексный потенциал течения и по формуле Чаплыгина

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_{c^c} \frac{1}{f'(\zeta)} \left[\frac{dW(\zeta)}{d\zeta} \right]^2 d\zeta - i\rho\gamma U$$

найти волновое сопротивление и подъемную силу профиля.

Возвышение свободной поверхности по теории первого, второго и третьего порядков и коэффициент давления на профиле определяются по формулам

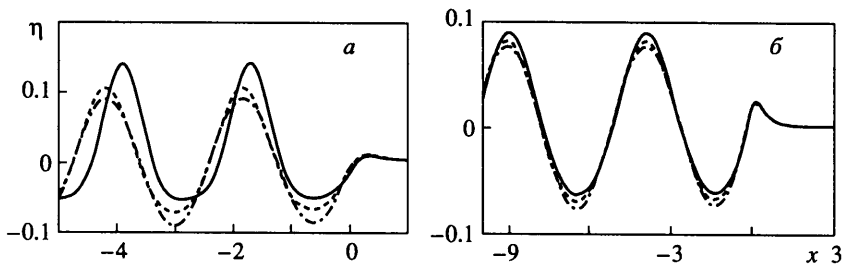
$$\eta^{(1)} = \frac{1}{u^{(0)}} \Psi^{(1)}(x, 0), \quad \eta^{(2)} = \frac{1}{u^{(0)}} [\Psi^{(2)} + \eta^{(1)} \Psi_y^{(1)} - u^{(1)} \eta^{(1)}]_{y=0}$$

$$\eta^{(3)} = \frac{1}{u^{(0)}} \left[\Psi^{(3)} + \eta^{(2)} \Psi_y^{(1)} + \eta^{(1)} \Psi_y^{(2)} + \frac{1}{2} \eta^{(1)2} - u^{(2)} \eta^{(1)} - u^{(1)} \eta^{(2)} \right]_{y=0}$$

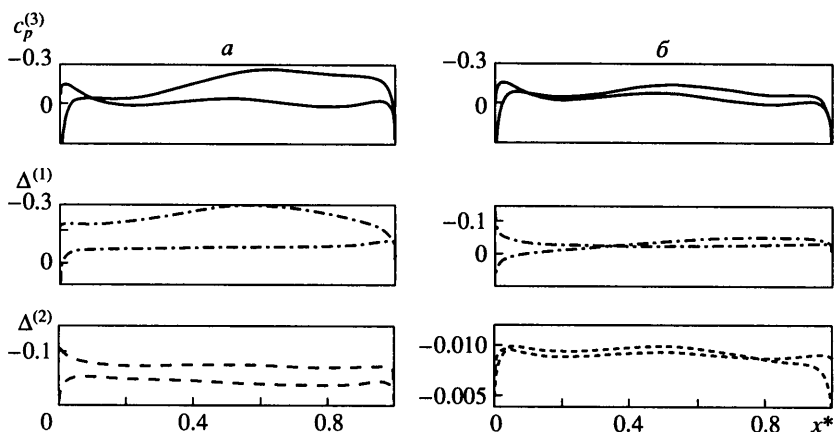
$$c_p = 1 - \left| \frac{1}{f'(\zeta)} \frac{dW(\zeta)}{d(\zeta)} \right|^2 \frac{1}{U^2}$$

Результаты расчетов гидродинамических характеристик для профиля NACA-6бтоd представлены на фигурах приведенных ниже, на которых все линейные размеры отнесены к длине хорды профиля $l = 1$.

На фиг. 2, 3 представлена зависимость коэффициента подъемной силы $c_y = 2Y/(\rho U^2 l)$ от числа Фруда $Fr = U/\sqrt{gl}$. Изменение c_y дано для разных приближений в зависимости от глубины погружения h и угла атаки α . Отметим, что различие резуль-



Фиг. 4. Вид свободной поверхности при $h = 0,4$; $\alpha = 1^\circ$ и $Fr = 0,611$; $0,904$ (варианты *a*, *б*)

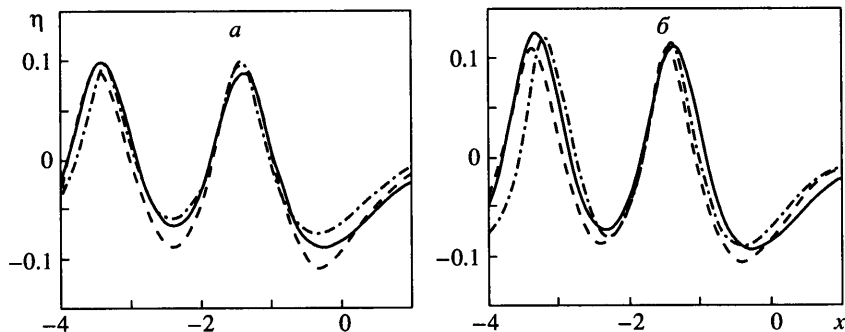


Фиг. 5. Зависимость коэффициента распределения на профиле $c_p^{(3)}$ и $\Delta^{(k)} = c_p^{(k)} - c_p^{(3)}$ ($k = 1, 2$) от x^* – расстояния от носика по хорде профиля. Параметры см. на фиг. 4

татов относится к диапазону чисел Фруда в области максимальных значений c_y и возрастает с уменьшением глубины погружения и увеличением угла атаки. В отличие от работы [23], где под теорией k -го порядка подразумевалось сохранение членов $O(\varepsilon^k)$ в граничных условиях на свободной поверхности и на контуре, причем часть потенциала $O(\varepsilon^k)$ на контуре не учитывалась и вычислялось только волновое сопротивление, в данном методе условие на контуре в каждом приближении выполняется точно и понятие "теория k -го порядка" относится к граничному условию на свободной поверхности. Для достаточно тонких гидропрофилей при малых углах атаки (а именно такие углы реальны) коэффициент волнового сопротивления мал и одной из наиболее важных характеристик является коэффициент подъемной силы, а его вычисление требует наиболее точного выполнения граничного условия на профиле. В предлагаемом методе это условие выполняется точно по построению решения.

Примеры расчета формы свободной поверхности представлены на фиг. 4, а на фиг. 5 даны соответствующие величины коэффициента распределения давления на профиле c_p . Формы свободной поверхности, соответствующие теориям первого и третьего порядков, изображенные на фиг. 4, *a*, в пропорциональном масштабе изображены на фиг. 1, где представлен также профиль *NACA-6bmod*.

Как можно заметить на фиг. 2–5, при увеличении числа Фруда результаты расчетов по теории первого, второго и третьего порядков сближаются. Это можно объяснить тем, что, как было вывлено в [8, 23], по мере увеличения числа Фруда вначале преобладает влияние свободной поверхности, а далее – условие на контуре, которое в данном методе всегда выполняется точно.



Фиг. 6. Вид свободной поверхности при обтекании профиля NACA-0012 при $\alpha = 5^\circ$, $Fr = 0,567$, $h = 1,034$; $0,950$ (варианты *a*, *б*). Сплошные кривые – расчет по схеме возмущений третьего порядка; штрихпунктир – численные расчеты [21] (*a*), [22] (*б*), штриховые – данные эксперимента [27]

Тестирование алгоритма и программы, разработанных для расчета гидродинамических характеристик, проводилось как внутри алгоритма, так и путем сравнения результатов расчетов с результатами других авторов и экспериментальными данными. Для линейного граничного условия на свободной поверхности метод хорошо апробирован [26]. В случае нелинейного условия вид интегрального ядра $L(\xi, \tau)$ не меняется и совпадает с линейной теорией. Для нового элемента в свободной части уравнения (3.4) для функций $q^{(2)}$ и $q^{(3)}$ во всех расчетах для больших отрицательных значений x наблюдалось устойчивое приближение их к постоянным значениям, что соответствует выводам [23].

Сравнения волн, рассчитанных предлагаемым методом, с экспериментальными данными [27] и расчетами панельным методом высокого порядка [21, 22] для симметричного профиля NACA-0012 при $Fr = 0,567$ для двух глубин погружения даны на фиг. 6. Графики представлены в увеличенном масштабе по оси y . При пропорциональном представлении кривые в значительной части сливаются, так как результаты достаточно близки.

Заключение. Применяя метод моделирования свободной поверхности особенностями с привлечением схемы возмущений, получено решение задачи обтекания подводного крылового профиля с учетом нелинейного условия на свободной поверхности при точном выполнении граничного условия на контуре. Выполнение нелинейных граничных условий обеспечивает хорошие результаты вычислений гидродинамических характеристик даже малопогруженных профилей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 99-01-00169, 99-01-00173).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yeung R.W. Numerical methods in free-surface flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 1982. V. 14. P. 395–442.
2. Стурова И.В. Численные расчеты в задачах генерации плоских поверхностных волн: Препринт № 5. Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1990. 47 с.
3. Gorlov S.I. Methods for solving steady problems of the generation of surface and interval waves by a body moving in a liquid // Russ. J. Eng. Thermophys. 1999. V. 9. № 4. P. 297–319.
4. Salvesen N., Kerczek C., von. Comparison of numerical and perturbation solutions of two-dimensional nonlinear water-wave problems // J. Ship. Res. 1976. V. 20. № 3. P. 160–170.
5. Амромин Э.Л., Вальдман Н.А., Иванов А.Н. К нелинейной теории плоских волн на поверхности жидкости // Асимптотические методы. Задачи механики. Новосибирск: Наука, 1988. С. 169–175.

6. Житников В.П., Шерыхалин О.И. О решениях солитонного вида в докритических течениях весомой жидкости при наличии источника или вихря // Тр. VI Всерос. научн. школы "Гидродинамика больших скоростей". Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1996. С. 63–67.
7. Маклаков Д.В. Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами. М.: Янус-К, 1997. 280 с.
8. Tuck E.O. The effect of non-linearity at the free surface on flow past a submerged cylinder // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. Pt 2. P. 401–414.
9. Горлов С.И. Генерация нелинейных волн контуром, совершающим поступательное движение под границей раздела двух жидких сред // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 5. С. 126–136.
10. Киселев О.М., Филиппов С.И. О движении цилиндра под свободной поверхностью жидкости при больших числах Фруда // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 4. С. 34–45.
11. Dawson C.W. A practical computer method for solving ship-wave problems // Proc. 2nd Intern. Conf. on Numer. Ship Hydrodynamics. Berkeley, 1977. P. 30–38.
12. Nakatake K., Kawagoe T., Andou J., Kataoka K. Calculation of hydrodynamic forces acting on hydrofoils // Proc. 17th Session Sci. and Methodol. Seminar on Ship. Hydrodyn. Varna, 1988. V. 1. P. 4/1–4/8.
13. Maruo H., Ogivara S. A method of computation for steady ship waves with nonlinear free surface conditions // Proc. 4th Intern. Conf. on Numer. Ship Hydrodynamics. Washington: Nat. Acad. Sci., 1985. P. 218–233.
14. Lalli F., Campana E., Bulgarelli U. Numerical simulation of fully non-linear steady free surface flow // Intern. J. Numer. Methods in Fluids. 1992. V. 14. № 10. P. 1135–1149.
15. Wehausen J.V., Laitone E.V. Surface waves // Handbuch der Physik. Berlin: Springer, 1960. B. 9. S. 446–778.
16. Hough G.R., Moran S.P. Froude number effects on two-dimensional hydrofoils // J. Ship. Res. 1969. V. 13. № 1. P. 53–60.
17. Kennel C., Plotkin A. A second-order theory for the potential flow about thin hydrofoils // J. Ship. Res. 1984. V. 28. P. 55–64.
18. Golovchenko V.V., Gorelov D.N. Steady motion of thin profile near interface of two heavy fluids // Arch. Mech. 1977. V. 29. № 2. P. 223–227.
19. Bai K.J., Han J.H. A localized finite-element method for the nonlinear steady waves due to a two-dimensional hydrofoil // J. Ship. Res. 1994. V. 38. № 1. P. 42–51.
20. Ясько Н.Н. Численное решение нелинейной задачи о движении плоского крылового профиля под свободной поверхностью идеальной несжимаемой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 4. С. 100–107.
21. Thiert G., Bertram V., Jensen G. A higher-order panel method for nonlinear 2-D free-surface flows about hydrofoils // Proc. 10th Intern. Workshop on Water Waves and Floating Bodies. Oxford, 1995.
22. Thiert G., Bertram V. Staggered-grid panel method for hydrofoils with fully nonlinear free-surface effect // Intern. Shipbuild. Progr. 1998. V. 45. № 444. P. 313–329.
23. Salvesen N. On higher-order wave theory for submerged two-dimensional bodies // J. Fluid Mech. 1969. V. 38. Pt 2. P. 415–432.
24. Тумашев Г.Г., Черепенин Н.Д. Задача о движении круглого цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости // Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1973. Вып. 10. С. 140–151.
25. Черепенин Н.Д. Один метод решения задачи о движении тел вблизи поверхности раздела двух жидкостей // Сб. аспирант. работ: Точные науки. Математика. Механика. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1973. С. 143–152.
26. Лотфуллин М.В., Филиппов С.И. Моделирование границ раздела в задачах обтекания профиля крыла весомой жидкостью // ПМТФ. 1992. № 4. С. 84–89.
27. Duncan J.H. The breaking and non-breaking wave resistance of a two-dimensional hydrofoil // J. Fluid Mech. 1983. V. 126. P. 507–520.