

УДК 532.517

© 2001 г. М.В. УСТИНОВ

## ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА СКОЛЬЗЯЩЕМ КРЫЛЕ К СТАЦИОНАРНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОТОКА

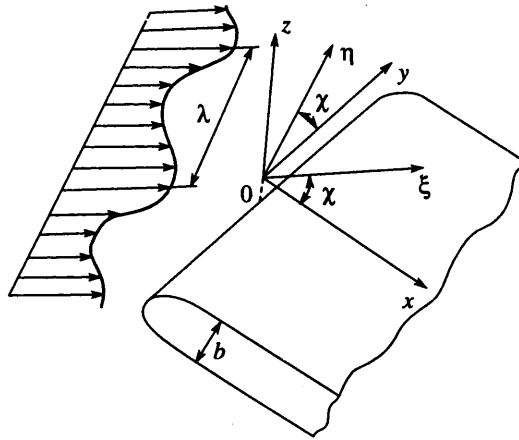
Исследовано течение в пограничном слое на пластине с наклонной затупленной передней кромкой при ее обтекании потоком с малой, периодической по размаху неоднородностью скорости. Такое течение моделирует проникновение внешней турбулентности в пограничный слой скользящего крыла. Показано, что возмущения пограничного слоя, порождаемые неоднородностью, имеют в основном продольную компоненту скорости, величина которой значительно превышает исходную амплитуду неоднородности. Найдены зависимости возмущений от расстояния до передней кромки и поперечного периода неоднородности. Показано, что пограничный слой на скользящем крыле менее восприимчив к рассмотренному типу возмущений, чем на прямом крыле.

Низкочастотные вихревые возмущения набегающего потока существенно влияют на ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое. Проникая в пограничный слой, они порождают полосчатую структуру – вытянутые в направлении потока полосы с повышенной и пониженной скоростью, которые появляются и исчезают с относительно низкой частотой [1]. При повышенной степени турбулентности ( $0,1\% < \epsilon_T < 5\%$ ) возмущения скорости в полосчатой структуре достигают 10–20% скорости потока  $u_\infty$  и непосредственно приводят к ламинарно-турбулентному переходу [2]. В малотурбулентных аэродинамических трубах, где степень турбулентности потока меньше ( $\epsilon_T < 0,1\%$ ), амплитуда этих возмущений составляет всего несколько процентов  $u_\infty$ , однако и этого оказывается достаточно для ускорения перехода вследствие увеличения скорости роста волн Толлмина – Шлихтинга [3]. Особенно сильное влияние малая турбулентность внешнего потока оказывает на ламинарно-турбулентный переход на скользящем крыле [4].

Для учета влияния внешней турбулентности на переход необходимо исследование восприимчивости пограничного слоя к вихревым возмущениям. Такие исследования для пограничного слоя на пластине с прямой (перпендикулярной направлению потока) передней кромкой [5–7] показали, что полосчатая структура наиболее эффективно порождается вертикальной завихренностью или неоднородностью скорости в направлении размаха.

В данной работе исследуется восприимчивость к этому типу возмущений пограничного слоя на скользящем крыле. В качестве его модели рассматривается пластина с затупленной передней кромкой, расположенной наклонно к направлению потока.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим обтекание полубесконечной плоской пластины с затупленной передней кромкой потоком вязкой несжимаемой жидкости. В качестве масштабов для координат и скорости выберем характерный размер затупления передней кромки  $b$  и скорость набегающего потока  $u_\infty$ . Декартову систему координат  $x, y, z$  расположим так, чтобы плоскость  $x, y$  совпадала с верхней поверхностью пластины, а передняя кромка соответствовала  $x = 0$ . Вектор скорости набегающего потока  $\mathbf{V}$  лежит в плоскости  $x, y$  и образует угол  $\chi$  с осью  $x$ . С направлением потока



Фиг. 1. Схема течения

свяжем систему координат  $\xi, \eta, z$ , получающуюся поворотом системы  $x, y, z$  на угол  $\chi$  вокруг оси  $z$ . Схема течения и направления осей координат показаны на фиг. 1. Координаты  $x, y$  связаны с  $\xi, \eta$  соотношениями

$$x = \xi \cos \chi - \eta \sin \chi, \quad y = \xi \sin \chi + \eta \cos \chi \quad (1.1)$$

Набегающий поток имеет слабую периодическую по  $\eta$  неоднородность скорости, единственную отличную от нуля компоненту которой  $V_\xi$  зададим в виде

$$V_\xi = 1 + \epsilon \exp\left(i\beta\eta - \frac{\beta^2}{R}\xi\right) \quad (1.2)$$

где  $\beta = 2\pi b/\lambda$  – поперечное волновое число,  $\lambda$  – размерный период неоднородности,  $\epsilon$  – малый параметр, равный амплитуде неоднородности при  $\xi = 0$ ,  $R = u_\infty b/\nu$  – число Рейнольдса,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости. Здесь используется комплексная форма записи периодических функций, при которой физической величине соответствует действительная часть. Число Рейнольдса считается большим, а период неоднородности сравнимым с размером передней кромки, т.е.  $\beta \sim 1$ . Тогда выражение для скорости набегающего потока (1.2) является решением уравнений Навье – Стокса с точностью до малых величин порядка  $\epsilon/R$ .

Будем искать линейное по  $\epsilon$  решение задачи об обтекании пластины неоднородным потоком. Поле скоростей  $\mathbf{V}$  и давление  $P_\Sigma$  представим в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_b(x, z) + \epsilon \mathbf{v}(x, y, z), \quad P_\Sigma = P_b(x, z) + \epsilon p(x, y, z)$$

Здесь  $\mathbf{V}_b, P_b$  соответствуют основному течению при обтекании пластины однородным потоком, а  $\mathbf{v}, p$  – возмущениям, порождаемым неоднородностью. Развитие возмущений описывается линеаризованными относительно основного течения уравнениями Навье – Стокса с условиями прилипания на поверхности пластины и граничными условиями во внешнем потоке, следующими из (1.2). Их решение ищется методом сращиваемых асимптотических разложений. Поле течения разбивается на две области: окрестность передней кромки размером порядка единицы ( $x \sim z \sim 1$ ), течение в которой является невязким, и область вязкого течения длиной  $x \sim R$  и высотой  $z \sim 1$ .

**2. Течение в окрестности передней кромки.** В этой области основное течение является потенциальным, а возмущения описываются линеаризованными уравнениями Эйлера с условиями непротекания на стенке. В связи с малым размером рассматривае-

мой области затуханием неоднородности по длине в ней можно пренебречь и рассматривать граничные условия в набегающем потоке вида

$$v_{\xi} \rightarrow v_{\infty}(\eta) \equiv e^{i\beta\eta}, \quad v_{\eta}, v_z \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty \quad (2.1)$$

Здесь индексами  $\xi, \eta, x, y, z$  обозначаются составляющие векторов в направлении соответствующих осей координат. Решение задачи для малых вихревых возмущений невязкого потенциального потока можно представить в виде суммы заранее известного вихревого течения  $v^i$  и потенциальной составляющей  $\nabla\varphi$  [8]

$$v = v^i + \nabla\varphi, \quad \nabla^2\varphi = -\nabla \cdot v^i \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(x, z_w(x)) = -v^i \cdot n, \quad \varphi \rightarrow 0, \quad \xi^2 + z^2 \rightarrow \infty$$

Здесь  $n$  – нормальное направление к поверхности пластины,  $z = z_w(x)$  – ее форма. Для частного вида граничных условий (2.1) выражения для вихревой составляющей возмущений, найденные в [8] принимают вид

$$v'_{\xi} = v_{\infty}(Y) \frac{\partial\Delta}{\partial\xi}, \quad v'_{\eta} = v_{\infty}(Y) \frac{\partial\Delta}{\partial\eta}, \quad v'_z = v_{\infty}(Y) \frac{\partial\Delta}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$\Delta(\xi, \eta, z) = \xi + \int_{-\infty}^{\xi} \{ [V_{b\xi}(\xi', \eta_s, z_s)]^{-1} - 1 \} d\xi'$$

Здесь  $\Delta(\xi, \eta, z)$  – функция дрейфа Лайтхилла, а  $Y(\xi, \eta, z)$  – интеграл уравнений для линий тока

$$\frac{d\xi}{V_{b\xi}} = \frac{d\eta}{V_{b\eta}} = \frac{dz}{V_{bz}}$$

такой, что  $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y(\xi, \eta, z) = \eta$ . Интегрирование в выражении для  $\Delta(\xi, \eta, z)$  производится вдоль линии тока, приходящей из бесконечности в точку, где ищется функция дрейфа.

Используя соотношение  $d\xi = (V_{bx}/V_{b\xi})dx$ , справедливое на линии тока, преобразуем выражение для функции дрейфа к виду

$$\Delta(x, y, z) = \xi + \Delta_{\perp}(x, z) \cos \chi, \quad \Delta_{\perp}(x, z) = \int_{-\infty}^x \{ [V_{1x}(x', z_s(x'))]^{-1} - 1 \} dx'$$

В формуле для  $\Delta_{\perp}$  интеграл берется вдоль функции тока двумерного течения, имеющего место при обтекании пластины потоком с единичной скоростью, перпендикулярным передней кромке, а  $V_{1x} = V_{\xi}/\cos \chi$  – продольная составляющая скорости этого течения.

Для нахождения интеграла  $Y$  выпишем соотношение для  $d\eta$  следующее из (1.1)

$$d\eta = \cos \chi dy - \sin \chi dx$$

и проинтегрируем его вдоль линии тока, приходящей из бесконечности, учитывая, что на ней

$$dy = \frac{V_y}{V_x} dx = \frac{\sin \chi}{V_x} dx$$

В результате после элементарных преобразований получим искомый интеграл

$$Y \equiv \eta(-\infty) = \eta - \Delta_{\perp}(x, z) \sin \chi$$

В дальнейшем ограничимся нахождением решения на большом расстоянии вниз по потоку от передней кромки, но на конечном расстоянии от поверхности пластины, т.е. при  $x \rightarrow \infty$  и  $z \sim 1$ . В этих предположениях функция  $\Delta_{\perp}$  перестает зависеть от  $x$ ,

принимая вид

$$\Delta_{\perp} \approx \Delta_0(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ [V_x(x', z_s(x'))]^{-1} - 1 \} dx'$$

причем, как показано в [6],  $\Delta_0(z)$  имеет логарифмическую особенность вблизи стенки, где она ведет себя как

$$\Delta_0(z) \rightarrow -\frac{1}{a} \ln z + A \quad (2.4)$$

Здесь константы  $a$  и  $A$  порядка единицы и зависят от формы затупления передней кромки. Краевая задача для потенциала  $\varphi$  при  $x \gg 1$  принимает вид

$$\nabla^2 \varphi = \left[ i\beta \left( \frac{d\Delta_0}{dz} \right)^2 \sin \chi - \frac{d^2 \Delta_0}{dz^2} \right] e^{i\beta Y_0} \cos \chi, \quad Y_0 = \eta - \Delta_0(z) \sin \chi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \rightarrow -\frac{d\Delta_0}{dz} e^{i\beta Y_0}, \quad z \rightarrow 0, \quad \varphi(x, y, \infty) = 0$$

Подстановка в нее выражения

$$\varphi = \left[ \frac{1}{i\beta \sin \chi} (e^{-i\beta \Delta_0 \sin \chi} - 1) + \varphi_* \right] e^{i\beta Y_0} \cos \chi \quad (2.5)$$

устраняет особенность на стенке и приводит к следующей задаче для  $\varphi_*$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial z^2} - \beta^2 \varphi_* = \frac{i\beta}{\sin \chi} [1 - e^{-i\beta \Delta_0 \sin \chi}]$$

$$\frac{\partial \varphi_*}{\partial z}(x, y, 0) = 0, \quad \varphi_*(\infty) = 0$$

При  $x \gg 1$  ввиду независимости правой части и граничных условий от  $x$  зависимостью решения от этой переменной можно пренебречь. Тогда задача для  $\varphi_*$  сводится к краевой задаче для линейного обыкновенного дифференциального уравнения, решение которой находится аналитически

$$\varphi_*(z) = -\frac{1}{2} i (\sin \chi)^{-1} [(I - I_-(z))e^{\beta z} + (I + I_+(z))e^{-\beta z}] \quad (2.6)$$

$$I_{\pm}(z) = \int_0^z [1 - e^{-i\beta \Delta_0(z') \sin \chi}] e^{\pm \beta z'} dz', \quad I = I_-(\infty)$$

Подстановка (2.5) и ранее найденных выражений для  $\Delta$  и  $Y$  в (2.2), (2.3) дает искомого решение для возмущений скорости вдали от передней кромки

$$v_x = e^{-i\beta \Delta_0(z) \sin \chi + i\beta \eta}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi_*}{\partial z} \cos \chi e^{i\beta \eta} \quad (2.7)$$

$$v_{\eta} = [\text{ctg} \chi (e^{-i\beta \Delta_0(z) \sin \chi} - 1) + i\beta \varphi_*(z) \cos \chi] e^{i\beta \eta}, \quad x \rightarrow \infty$$

В дальнейшем также потребуется асимптотика этого решения при  $z \rightarrow 0$ , получающаяся разложением его в ряд Тейлора с учетом асимптотики для  $\Delta_0$  (2.4)

$$v_x \rightarrow e^{i(\beta \eta + \Phi)} z^{i\mu}; \quad v_{\eta} \rightarrow \text{ctg} \chi e^{i\beta \eta} (-\beta J + e^{i\Phi} z^{i\mu})$$

$$v_z \rightarrow i\beta \text{ctg} \chi e^{i\beta \eta} \left( \beta J z + \frac{e^{i\Phi}}{1 + i\mu} z^{1+i\mu} \right) \quad (2.8)$$

$$\mu = \frac{\beta}{a} \sin \chi, \quad \Phi = -i\beta A \sin \chi, \quad J = 1 - \beta I$$

Найденное решение показывает, что неоднородность продольной составляющей скорости набегающего потока преобразуется в поперечное течение у поверхности пластины. Аналогичная трансформация возмущений имеет место и для пластины с прямой кромкой, на которой поперечная составляющая скорости имеет логарифмическую особенность при  $z \rightarrow 0$  [6, 7]. В случае наклонной передней кромки эта составляющая скорости на стенке ограничена, хотя и не имеет предела при  $z \rightarrow 0$ . Выражение для поперечной составляющей скорости (2.8) состоит из двух слагаемых, одно из которых имеет конечный предел и связано с потенциальной компонентой возмущений, а второе, определяемое их вихревой компонентой, быстро осциллирует возле стенки с периодом, бесконечно малым при  $z \rightarrow 0$ .

**3. Решение в вязкой области ( $x \sim R, z \sim 1$ ).** Основное течение в этой области представляет собой пограничный слой без градиента давления на пластине с наклонной передней кромкой. Давление в нем  $P_b \sim R^{-2}$ , а скорость находится из решения уравнений Прандтля, которые ввиду независимости течения от  $y$  распадаются на две последовательно решаемые системы уравнений. Первая система для продольной  $V_{bx}$  и вертикальной  $V_{bz}$  компонент скорости заменой  $x/\cos \chi \rightarrow x, V_{bx}/\cos \chi \rightarrow V_{bx}, V_{bz}/\cos \chi \rightarrow V_{bz}$  сводится к задаче о двумерном пограничном слое Блазиуса. Оставшееся уравнение для  $V_{by}$  заменой  $x/\cos \chi \rightarrow x, V_{by}/\sin \chi \rightarrow V_{by}$  сводится к этой же задаче. Следовательно, основное течение выражается через решение для пограничного слоя Блазиуса. В дальнейшем будет удобнее разлагать скорость основного течения  $V_b$  и возмущений  $v$  на составляющие вдоль осей  $\xi, \eta, z$ . В таком представлении основное течение имеет вид

$$V_{b\xi} = U_0(X, z), \quad V_{b\eta} = 0, \quad V_{bz} = R^{-1}W_0(X, z) \quad (3.1)$$

$$U_0(X, z) = f'(\kappa), \quad W_0(X, z) = \frac{1}{2} X^{-1/2} (\kappa f' - f)$$

где  $\kappa = z/\sqrt{X}, X = x/(R \cos \chi)$ , а функция  $f$  находится из краевой задачи для уравнения

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0, \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1$$

Из полученного решения следует, что основное течение в пограничном слое является двумерным течением Блазиуса. Решение в окрестности передней кромки (2.8) показывает, что возмущения скорости на границе пограничного слоя, периодические в направлении, перпендикулярном потоку, имеют поперечную компоненту порядка единицы. Они развиваются в пограничном слое Блазиуса на расстоянии порядка  $R$  в полосчатую структуру, в которой возмущения продольной компоненты скорости порядка  $R$ , а остальных ее составляющих порядка единицы [5, 7]. Предполагая аналогичный характер их развития на пластине с наклонной передней кромкой, будем искать решение в вязкой области в виде

$$v_\xi = RU(X, z)e^{i\beta\eta}, \quad v_\eta = V(X, z)e^{i\beta\eta}, \quad v_z = W(X, z)e^{i\beta\eta}, \quad p = \frac{1}{R \cos \chi} P(X, z)e^{i\beta\eta} \quad (3.2)$$

где функции  $U, V, W, P$  порядка единицы.

Подставив возмущения (3.2) в уравнения Навье – Стокса, линеаризованные относительно основного течения (3.1), выразив производные функций  $U, V, W, P, U_0, W_0$  по  $\xi$  и  $\eta$  через производные по  $X$ , используя соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial X}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{1}{R} \operatorname{tg} \chi \frac{\partial}{\partial X}$$

и, отбросив малые члены порядка  $R^{-2}$ , получим систему уравнений

$$U_0 \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U_0}{\partial X} U + W_0 \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W_0}{\partial z} W = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \beta^2 U$$

$$U_0 \frac{\partial V}{\partial X} + W_0 \frac{\partial V}{\partial z} = -i\beta P + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \beta^2 V \quad (3.3)$$

$$U_0 \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial W_0}{\partial X} U + W_0 \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial W_0}{\partial z} W = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \beta^2 W$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + i\beta V + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

Эта система параболического типа и для нее требуются начальные условия в некотором сечении  $X = X_0$  и граничные условия на стенке и во внешнем потоке. Последние условия следуют из решения в набегающем потоке (1.2) и условий прилипания на стенке и являются однородными

$$U(X, 0) = V(X, 0) = U(X, \infty) = V(X, \infty) = 0$$

Заметим, что условие для  $U$  во внешнем потоке (как и начальное условие для этой функции, которое будет найдено ниже) выполняется с точностью до членов порядка  $R^{-1}$ , которыми будем пренебрегать. Такой подход может показаться неверным, так как неучитываемые возмущения продольной составляющей скорости одного порядка малости с возмущениями поперечной и вертикальной компонент скорости в начальном сечении, которые порождают искомое решение. На самом деле неоднородность продольной компоненты скорости во внешнем потоке и начальном сечении также создает возмущения в пограничном слое, однако они затухают вниз по потоку и остаются порядка единицы. Отбрасывание продольной компоненты скорости в граничных условиях означает пренебрежение этими возмущениями по сравнению с возмущениями порядка  $R$ , порожденными поперечным течением.

Начальные условия для (3.3) находятся из сращивания решения в вязкой области с асимптотическим решением в окрестности передней кромки (2.7). Последнее решение справедливо вне пограничного слоя толщиной  $\sqrt{x/R}$ , поэтому дает начальные условия только в верхней части вязкой области при  $z \gg \sqrt{X_0}$

$$U(X_0, z) = 0, \quad V(X_0, z) = \text{ctg } \chi e^{-i\beta \Delta_0(z) \sin \chi} + (i\beta \Phi_*(z) \cos \chi - \text{ctg } \chi), \quad z / \sqrt{X_0} \gg 1 \quad (3.4)$$

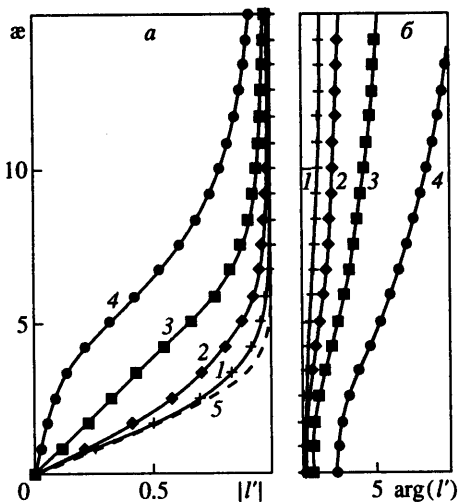
В нижней части вязкой области при  $z \sim \sqrt{X_0}$  начальные условия должны найдаться из сращивания с решением в пограничном слое в окрестности передней кромки. Однако вместо этого там будет найдено так называемое согласованное решение, справедливое при  $X \ll 1$  и соответствующее однородному по  $X$  течению в верхней части вязкой области, заданному начальными условиями (3.4). Заметим, что при  $X \ll 1$  течение в верхней части этой области действительно однородно с точностью до членов  $O(\sqrt{X})$ . Замена точных начальных условий согласованным решением оправдана, если предположить, что возмущения, внесенные в пограничный слой непосредственно на передней кромке, затухнут при  $x \gg 1$ . Согласованное решение ищется в квазиавтомодельном виде

$$\{U, V\} = \text{ctg } \chi e^{i\Phi} \{U_1, V_1\} - J \text{ctg } \chi \{U_2, V_2\} \quad (3.5)$$

$$U_1 = i\beta X^{1+i\frac{\mu}{2}} g'(\kappa), \quad U_2 = \frac{i\beta}{2} X \kappa f''(\kappa)$$

$$V_1 = X^{i\frac{\mu}{2}} l'(\kappa), \quad V_2 = f'(\kappa)$$

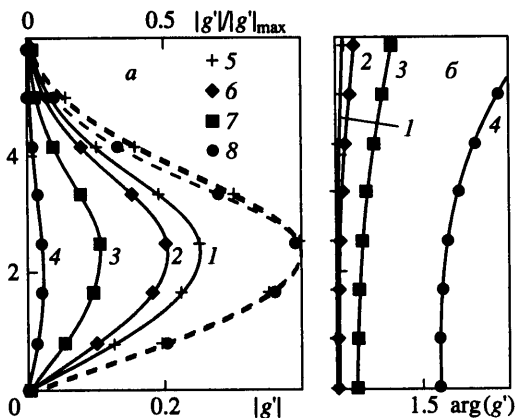
Это решение состоит из двух слагаемых, определяемых вихревой и потенциальной компонентами решения в окрестности передней кромки. Согласованное решение для



Фиг. 2

Фиг. 2. Зависимости модуля (а) и аргумента (б) функции  $l'$  от  $\chi$ : 1–4 –  $\mu = 0,5, 1, 2, 4$ ; 5 – профиль  $v$  на пластине с прямой передней кромкой

Фиг. 3. Зависимости модуля (а) и аргумента (б) функции  $g'$  от  $\chi$ : 1–4 –  $\mu = 0,5, 1, 2, 4$ ; 5–8 –  $|g'/g'_{\max}|$  при тех же  $\mu$



Фиг. 3

второго слагаемого совпадает с аналогичным решением для пластины с прямой передней кромкой [7]. Неизвестные функции  $g$  и  $l$  в решении для вихревой компоненты находятся из двух краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, получающихся в результате подстановки (3.5) в (3.3) и учета членов наименьшего порядка малости по  $X$

$$l''' + \frac{1}{2}fl'' - i\frac{\mu}{2}f'l' = 0, \quad l(0) = l'(0) = 0, \quad \lim_{\chi \rightarrow \infty} l'(\chi) = \kappa^{i\mu}$$

$$g''' + \frac{1}{2}fg'' - \left(1 + i\frac{\mu}{2}\right)f'g' + \frac{3}{2}(1 + i\mu)f''g = -f'l, \quad g(0) = g'(0) = g'(\infty) = 0$$

Решения этих задач  $l'$  и  $g'$ , описывающие профили трансверсальной и продольной составляющих скорости вихревой компоненты возмущений, показаны на фиг. 2 и 3 соответственно. Функции  $l'$  и  $g'$  комплексные, поэтому зависимости их модулей (а) и аргументов (б) от  $\chi$  при  $\mu = 0,5; 1; 2; 4$  изображены отдельно. Профиль трансверсальной составляющей скорости существенно зависит от  $\mu$  или периода возмущений. При малом  $\mu = 0,5$ , соответствующем большому периоду неоднородности, градиент этой составляющей скорости возмущений по  $z$  во внешнем потоке мал по сравнению с  $\partial U_0/\partial z$ . Поэтому наличие градиента во внешнем потоке не влияет на решение в пограничном слое, которое почти совпадает с аналогичным решением  $f'(\chi)$  для пластины с прямой передней кромкой, показанным кривой 5 на фиг. 2, а. При больших  $\mu = 2$  и 4, наоборот, градиент во внешнем потоке велик по сравнению с  $\partial U_0/\partial z$ . Поэтому затухание осцилляций трансверсальной составляющей скорости происходит за пределами пограничного слоя основного течения и возмущения "вытесняются" из него, что приводит к существенному уменьшению модуля функции  $g'$ , описывающей возмущения продольной составляющей скорости, при увеличении  $\mu$  (см. фиг. 3, а). Однако формы профилей этой составляющей скорости (зависимости  $|g'|/|g'_{\max}|$ , показанные кривыми 5–8 на фиг. 3, а) практически не зависят от  $\mu$  и совпадают с

аналогичной зависимостью для пластины с прямой передней кромкой. При умеренных  $\mu$  (кроме  $\mu = 4$ ) аргумент функции  $g'$  практически не меняется поперек пограничного слоя.

Зависимость от  $\mu$  (или волнового числа  $\beta$ ) потенциальной компоненты решения (второго слагаемого (3.5)) проявляется в изменении коэффициента  $J$ , который, как показали последующие вычисления, уменьшается с увеличением  $\mu$ . При  $\mu \gg 1$  эта зависимость может быть получена аналитически подстановкой асимптотики для  $\Delta_0$  (2.4) в интеграл  $I$  из (2.6)

$$J = 1 - \beta I \cong \beta e^{i\Phi} \int_0^{\infty} z^{i\mu} e^{-\beta z} dz = \beta^{i\mu+2} e^{i\Phi} \Gamma(i\mu + 1) \cong \sqrt{2\pi\mu} \beta^{i\mu+2} e^{-\pi\mu/2 + i\Psi(\mu)}$$

Здесь  $\Psi(\mu)$  – действительная функция, определяющая фазу  $J$ .

Таким образом, оба слагаемых в согласованном решении для продольной компоненты возмущений скорости быстро уменьшаются при увеличении  $\beta$ . Следовательно, возмущения в пограничном слое при  $X \ll 1$  убывают с уменьшением периода неоднородности. Так как согласованное решение отражает невязкий механизм роста возмущений, действие которого продолжается и при  $X \sim 1$ , но компенсируется вязкостью, то отмеченная закономерность характерна и для решения при конечных  $X$ . Причиной снижения восприимчивости пограничного слоя к неоднородности при уменьшении ее периода является отмеченный ранее эффект вытеснения возмущений поперечной составляющей скорости из пограничного слоя, действующий и для суммарного решения.

Возмущения в основной части вязкой области при  $X \sim 1$  находились численным решением (3.3) маршевым методом. Для постановки начальных условий использовалось равномерно пригодное по  $z$  композитное решение, полученное из внешнего (3.4) и внутреннего (3.5) решений стандартным методом [9]

$$U(X_0, z) = i\beta \operatorname{ctg} \chi X_0 [X_0^{i\frac{\mu}{2}} g'(\chi) e^{i\Phi} - \frac{1}{2} J \chi f''(\chi)] \quad (3.6)$$

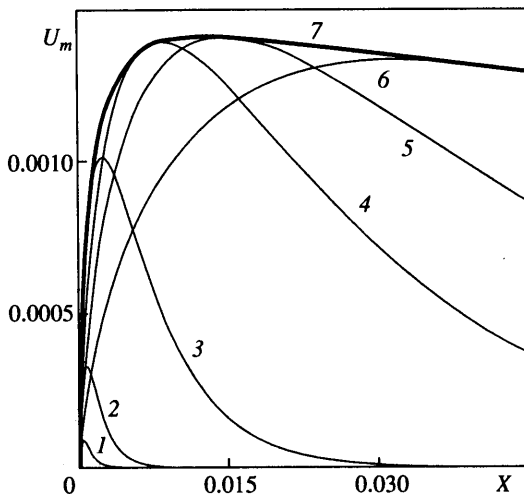
$$V(X_0, z) = \operatorname{ctg} \chi [e^{-i\beta \Delta_0(z) \sin \chi} - 1 + i\beta \Phi_*(z) \sin \chi + X_0^{i\frac{\mu}{2}} (l(\chi) - \chi^{i\mu}) - J(f'(\chi) - 1)]$$

В эти начальные условия входят функция дрейфа  $\Delta_0$  и потенциал  $\Phi_*(z)$ , зависящие от конкретной формы затупления передней кромки. Для определенности выберем в качестве формы пластины полубесконечное тело, ограниченное предельной линией тока при обтекании источника интенсивности  $q = 1/2\pi$ , которое далеко вниз по потоку имеет постоянную толщину, равную единице. Однако из-за медленного (логарифмического) затухания потенциала источника на бесконечности, функция дрейфа для такого тела оказывается бесконечной везде кроме бесконечно удаленной точки. Для улучшения сходимости интеграла для  $\Delta_0$  контур тела был изменен путем добавления стока интенсивности  $q = -1/2\pi$  на большом расстоянии  $c/2\pi$  вниз по потоку за источником. В результате получился сильно вытянутый овал, передняя часть которого практически совпадает с исходным телом. Обтекание этого овала рассматривалось в качестве модели основного течения в окрестности передней кромки, а в качестве  $\Delta_0(z)$  использовалась функция дрейфа, найденная в середине овала. Эта функция представляется в виде интеграла

$$\Delta_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{z-z_0} \frac{c \operatorname{ctg} s - (z_0 + s)}{\sqrt{c^2 - (z_0 + s)^2 + 2c(z_0 + s) \operatorname{ctg} s}} ds, \quad z_0 = z - \operatorname{arccctg} \left( \frac{z^2 - c^2}{2cz} \right)$$

который находился численно. Расчеты показали, что при умеренных  $z \leq 0,2c$  функ-



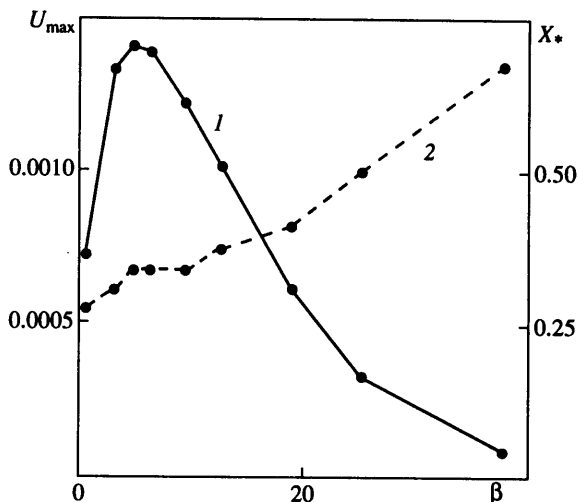


Фиг. 4. Зависимости максимальной по  $z$  амплитуды возмущений продольной компоненты скорости от  $X$ : 1–6 –  $\beta/2\pi = 6, 4, 2, 1, 0,75, 0,5$ ; 7 – их огибающая

ция  $\Delta_0(z)$  практически не зависит от длины овала  $c$ . Так как при численном решении (3.3) верхняя граница расчетной области соответствовала  $z = 12$ , то выбранное для вычислений  $\Delta_0$  значение  $c = 100$  заведомо обеспечило независимость результатов от длины овала. Вычисления  $\Delta_0$  при малых  $z$  также подтвердили справедливость асимптотической формулы (2.4) при  $z \leq 0,05$  и дали значения констант  $a = 6,80$ ,  $A = -0,068$ .

Задача (3.3), (3.6) решалась численно методом [7]. Начальные условия (3.6) задавались на достаточно малом расстоянии от передней кромки  $X_0$  для того, чтобы оно не влияло на результат. Результаты расчетов, полученные при угле стреловидности  $\chi = 45^\circ$  и различных  $\beta$ , в виде зависимостей от  $X$  максимальной по  $z$  абсолютной величины  $U_m$  функции  $U$ , описывающей возмущения продольной компоненты скорости, представлены на фиг. 4, где кривые 1–6 соответствуют значениям  $\beta = (6, 4, 2, 1, 0,75, 0,5) \cdot 2\pi$ , кривая 7 – их огибающая, показывающая максимально возможную величину возмущений при данном  $X$ . Профили возмущений в пограничном слое оказались близкими к профилям на начальном участке пограничного слоя, показанным на фиг. 3, и соответствуют профилю пульсаций в пограничном слое при повышенной степени турбулентности потока, измеренному в [2].

Из фиг. 4 видно, что при всех  $\beta$  возмущения сначала растут, достигают максимума и затем затухают вследствие вязкой диссипации. Мелкомасштабные возмущения (с большими  $\beta$ ) достигают максимума и затухают раньше, чем крупномасштабные. Максимальная по  $X$  величина возмущений  $U_{\max} = \max U_m$  также зависит от волнового числа  $\beta$ . Эта зависимость 1 на фиг. 5 является немонотонной и имеет максимум при  $\beta \approx 0,75 \cdot 2\pi$ . Форма зависимости  $U_{\max}(\beta)$  объясняется тем, что при больших  $\beta$  усилению возмущений препятствует эффект "вытеснения" возмущений трансверсальной составляющей скорости из пограничного слоя, а возрастание крупномасштабных возмущений ограничивается конечным вертикальным размером градиентного основного течения в окрестности передней кромки. Действительно, при взаимодействии исходной неоднородности потока с передней кромкой над поверхностью пластины появляются продольные вихри с вертикальным размером порядка толщины передней кромки. При малом по сравнению с периодом неоднородности размере передней кромки (при малых  $\beta$ ) эти вихри поглощаются пограничным слоем раньше, чем дей-



Фиг. 5. Зависимости от  $\beta$ : 1 – максимальной амплитуды возмущений  $U_{\max}$ ; 2 – нормированного расстояния до максимума  $X_* = \beta^2 X_m$

ствии вязких членов, вызванных градиентом скорости в трансверсальном направлении, остановило бы рост возмущений при бесконечном размере вихрей.

Зависимость от  $\beta$  нормированного расстояния до максимума  $X_* = \beta^2 X_m(\beta)$  ( $X_m$  – положение максимума) показана на фиг. 5 кривой 2. Такая нормировка выбрана потому, что на пластине с прямой передней кромкой бесконечного размера, рассмотренной в [7], расстояние до максимума обратно пропорционально  $\beta^2$ , т.е.  $X_* = \text{const} \approx 0,78$ . Для пластины с наклонной кромкой конечного размера эта закономерность нарушается и  $X_*$  монотонно убывает при уменьшении  $\beta$ , что является косвенным подтверждением описанного выше механизма ограничения роста крупномасштабных возмущений.

Вид зависимостей  $X_m(\beta)$  и  $U_{\max}(\beta)$  задает форму огибающей, которая по мере роста  $X$  определяется возмущениями с уменьшающимися  $\beta$  или увеличивающимся периодом. Так как максимальное усиление возмущений происходит при промежуточном  $\beta$ , то и огибающая имеет максимум при некотором  $X$  и уменьшается как при больших  $X$ , так и при малых расстояниях от передней кромки. Медленное ее уменьшение при больших  $X$  определяется ослаблением роста крупномасштабных возмущений вследствие конечного размера передней кромки и, вероятно, не связано с эффектом скольжения.

Более важным для практики является снижение восприимчивости пограничного слоя скользящего крыла к мелкомасштабным возмущениям, приводящее к резкому уменьшению огибающей при малых  $X$ . Действительно, оценка параметров для крыла транспортного самолета с  $b \sim 0,1$  м при  $u_\infty \sim 200$  м/с показывает, что размер хорды крыла порядка 1 м соответствует  $X \sim 10^{-5}$ . При таком малом  $X$  огибающая значительно меньше своего максимума и определяется очень мелкомасштабными возмущениями с волновым числом  $\beta \sim \sqrt{X_* / X} \sim 200$ . Расчеты развития возмущений для таких больших  $\beta$  не проводились ввиду вычислительных трудностей, связанных с разными масштабами размера передней кромки и толщины пограничного слоя, и поэтому величина огибающей при  $X \sim 10^{-5}$  неизвестна. Однако монотонный характер убывания зависимости  $U_{\max}(\beta)$  при  $\beta \ll 1$  и огибающей при  $X \ll 1$  позволяет считать, что нормированная величина возмущений при этом  $U_{\max} < 10^{-4}$ , а их усиление в пограничном слое  $u = R U_{\max} < 60$ . Решение для пластины с прямой передней кромкой [7], справедливое как раз при  $\beta \gg 1$ , наоборот, предсказывает возрастание возму-

щений при увеличении  $\beta$ , пропорциональное  $\ln(\beta)$ . При аналогичных параметрах на прямом крыле коэффициент усиления возмущений, согласно [7], равен  $2 \cdot 10^4$ , что приблизительно в 300 раз больше, чем на скользящем крыле.

Несмотря на меньшую восприимчивость скользящего крыла к неоднородности потока, нельзя однозначно сделать вывод о меньшем воздействии внешней турбулентности на ламинарно-турбулентный переход на нем. Ввиду кардинального различия механизмов перехода на прямом и скользящем крыле полосчатая структура одинаковой амплитуды должна по-разному влиять на развитие неустойчивых возмущений на них. Известно, что на скользящем крыле переход вызывается стационарными вихрями неустойчивости поперечного течения, периодическими по размаху и почти параллельными внешнему течению [4]. Полосчатая структура, связанная с неоднородностью потока, имеет аналогичные характеристики и поэтому может эффективно порождать эти вихри, оказывая очень сильное воздействие на процесс перехода.

**Заключение.** Полученное решение для развития возмущений характеристик течения в пограничном слое на пластине с наклонной затупленной передней кромкой, вызванных стационарной, периодической вдоль размаха неоднородностью набегающего потока, описывает влияние внешней турбулентности и предсказывает их возрастание в  $R$  раз по сравнению с исходной неоднородностью. Максимально усиливаются возмущения, период которых порядка размера затупления передней кромки ( $\beta = 0,75 \cdot 2\pi$ ). Показано, что восприимчивость пограничного слоя на скользящем крыле к мелкомасштабной турбулентности значительно меньше, чем на прямом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00626).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Кузнецов В.Р., Минеев Б.И., Секундов А.Н. Взаимодействие ламинарного пограничного слоя с внешней турбулентностью // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 5. С. 55–65.
2. Westin K.J.A., Boiko A.V., Klingmann B.G.B., Kozlov V.V., Alfredsson P.H. Experiments in a boundary layer subjected to free stream turbulence. Pt I: Boundary layer structure and receptivity // J. Fluid Mech. 1994. V. 281. P. 193–218.
3. Watmuff J.H. Detrimental effects of almost immeasurably small freestream nonuniformities generated by wing-tunnel screens // AIAA Journal. 1998. V. 36. P. 3–11.
4. Deyhle H., Bippes H. Disturbances growth in an unstable three-dimensional boundary layer and its dependence on environmental conditions // J. Fluid Mech. 1996. V. 316. P. 73–113.
5. Andersson P., Berggren M., Henningson D.S. Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers // Phys. Fluids. 1999. V. 11. № 1. P. 134–150.
6. Goldstein M.E., Leib S.J., Cowley S.J. Distortion of a flat plate boundary layer by free-stream vorticity normal to the plate // J. Fluid Mech. 1992. V. 237. P. 231–260.
7. Устинов М.В. Восприимчивость пограничного слоя на плоской пластине с затупленной передней кромкой к стационарной неоднородности набегающего потока // ПМТФ. 2000. № 4. С. 93–100.
8. Goldstein M.E. Unsteady vortical and entropic distortions of potential flows round arbitrary obstacles // J. Fluid Mech. 1978. V. 89. Pt 4. P. 433–468.
9. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.