

УДК 532.5.011

© 2001 г. А.Д. ВАСИН, Э.В. ПАРЫШЕВ

ПОГРУЖЕНИЕ ЦИЛИНДРА В ЖИДКОСТЬ ЧЕРЕЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ СВОБОДНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

Рассмотрена плоская задача о погружении цилиндра в жидкость в цилиндрической полости, радиус которой изменяется с течением времени. Определены зависимости смоченной ширины погружающегося круга от величины погружения при различных значениях зазора. Полученные результаты сравниваются с асимптотическими зависимостями.

Задача о погружении цилиндра через горизонтальную свободную поверхность жидкости рассмотрена в [1] в постановке [2]. В [1] определена величина гидродинамической силы, действующей на цилиндр при малом погружении, когда окружность можно аппроксимировать параболой. В [3, 4] приведены выражения для смоченной поверхности цилиндра для больших погружений. Результаты решения задачи о погружении цилиндра в цилиндрической впадине (при малых зазорах между телом и полостью) опубликованы в [5].

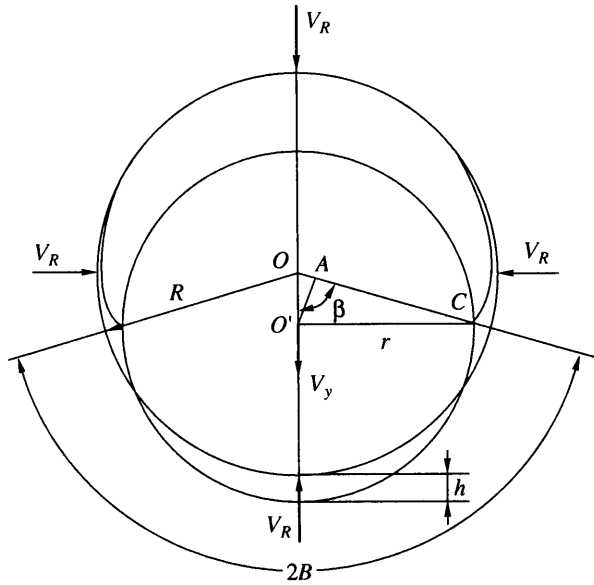
В данной работе в постановке [2] рассмотрена плоская задача о погружении цилиндра в цилиндрической полости при произвольном соотношении между радиусом тела и радиусом полости. Показано, что при радиусе полости, стремящемся к бесконечности, решение соответствует погружению цилиндра через горизонтальную свободную поверхность [3, 4]. При малых зазорах решение совпадает с ранее полученными результатами [5].

1. Рассматривается плоская задача. В безграничной несжимаемой невесомой идеальной жидкости существует круговая полость радиуса R , сужающаяся со скоростью V_R , зависящей от времени (положительное направление скорости – к центру). В жидкость симметрично погружается с переменной скоростью V_y тело в форме круга радиуса $r < R$ (фиг. 1) с зазором $\varepsilon = R - r$. Скорость погружения берется относительно центра полости O , положительное направление – внутрь жидкости.

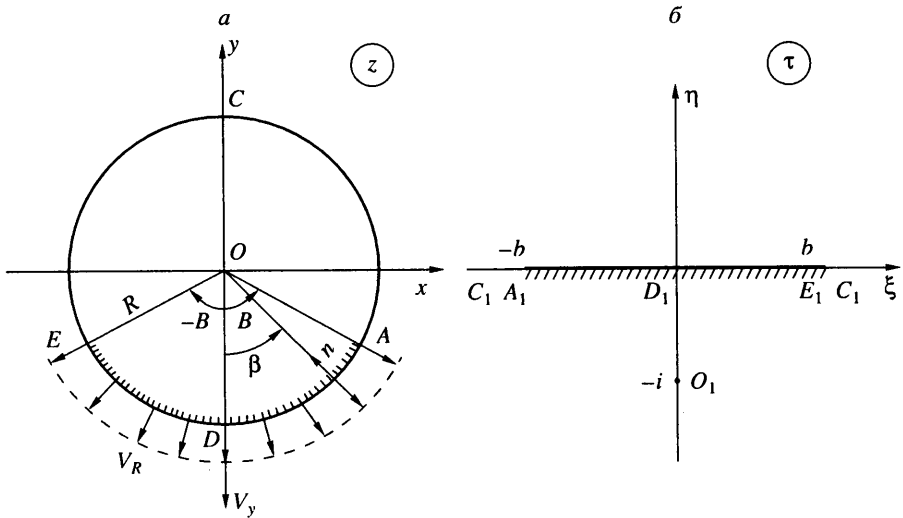
Для решения задачи используется известный подход, развитый в задаче о погружении клина [2]. Погружение тупого клина рассматривается как удар о поверхность жидкости плоской расширяющейся пластинки, имеющей в каждый момент времени одинаковую с клином смоченную ширину. Аналогично считается, что течение, возникающее при погружении круга в круговую полость, эквивалентно течению от удара круговой дужки радиуса $r = R$, ширина которой в каждый момент времени равна смоченной ширине погружающегося круга (фиг. 1, $2B$ – угол раствора смоченной поверхности).

Таким образом, для решения основной задачи необходимо рассмотреть вспомогательную задачу об ударе дужки (пластинки) в сужающейся цилиндрической полости. Для получения решения вспомогательной задачи удобно обратить радиальное течение – считать, что пластинка расширяется в радиальном направлении, а на свободной границе до удара начальные нормальные скорости отсутствуют.

2. Вспомогательная задача рассматривается в следующей постановке. Идеальная несжимаемая невесомая жидкость с плотностью ρ , заполняющая безграничное прост-



Фиг. 1. Схема погружения цилиндра в цилиндрической полости



Фиг. 2. Схема удара расширяющейся круговой дужки о цилиндрическую свободную поверхность

ранство, имеет внутреннюю свободную поверхность в виде цилиндра радиуса R (фиг. 2, а). В момент $t = 0$ о поверхность жидкости ударяется расширяющаяся в радиальном направлении пластинка радиуса R с центральным углом раствора $2B$. Скорость удара V_y , скорость расширения пластинки V_R в каждой точке направлена по радиусу. Движение жидкости безотрывное и безвихревое. Требуется найти скорости частиц жидкости в момент непосредственно после удара.

До удара жидкость находится в состоянии покоя. После удара под действием нормальных давлений возникает течение с потенциалом ϕ , удовлетворяющим уравне-

нию Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

На поверхности дужки ADE граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -V_y \cos \beta - V_R$$

где центральный угол β отсчитывается от оси симметрии, положительный – против часовой стрелки (фиг. 2, a), n – внутренняя нормаль к контуру.

На свободной поверхности ECA потенциал $\varphi = 0$; это равенство выражает известное условие: при ударе импульсивное давление на свободной поверхности равно нулю [6]. Граничные условия определяют внешнюю краевую задачу смешанного типа: на одной части границы задано значение потенциала φ , а на другой – его нормальная производная $\partial \varphi / \partial n$. На бесконечно больших расстояниях от дужки движение жидкости исчезает: $\text{grad} \varphi \rightarrow 0$.

Задача для внешности круга сводится к задаче для верхней полуплоскости τ с помощью дробно-линейного конформного преобразования

$$\tau = i \frac{z + iR}{z - iR}$$

которое переводит контур круга $ACEDA$ в действительную ось ξ плоскости τ , а точку C контура – в бесконечно удаленную точку C_1 (соответствие остальных точек указано буквами на фиг. 2, b). При этом $\xi = -\text{tg} \beta / 2$. В частности, концы дужки отображаются в точки $\xi = \pm b$, $b = \text{tg} B / 2$. Граничные условия в плоскости τ выражаются следующим образом: на $A_1 E_1$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{2R}{1 + \xi^2} \left(\frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} V_y + V_R \right) \quad (2.1)$$

на $C_1 A_1$ и $E_1 C_1$ $\varphi = 0$

Комплексный потенциал и его производная записываются в виде

$$W(\tau) = \varphi(\tau) + i\psi(\tau), \quad \frac{dW}{d\tau} = \frac{\partial \varphi}{d\xi} - i \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$F(\tau) = i \frac{dW}{d\tau}, \quad F(\tau) = \frac{\partial \varphi}{d\eta} + i \frac{\partial \varphi}{d\xi}$$

Граничные условия (2.1) для потенциала φ переходят в следующие граничные условия для функции $F(\tau)$: на $C_1 A_1$ и $E_1 C_1$

$$\text{Im} F(\tau) = 0$$

на $A_1 E_1$

$$\text{Re} F(\tau) = \frac{2R}{1 + \xi^2} \left(\frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} V_y + V_R \right)$$

Решение получается с помощью теоремы Келдыша – Седова для смешанной краевой задачи [7]. Нетрудно убедиться, что функция $F(\tau)$ удовлетворяет всем условиям этой теоремы. Решение имеет вид

$$F(\tau) = \frac{2R}{\pi i} \sqrt{\frac{\tau + b}{\tau - b}} \int_{-b}^b \left(\frac{1 - l^2}{1 + l^2} V_y + V_R \right) \sqrt{\frac{l - b}{l + b}} \frac{dl}{(1 + l^2)(l - \tau)} + \frac{\gamma_0}{\sqrt{\tau^2 - b^2}} \quad (2.2)$$

где γ_0 – константа, подлежащая определению, l – переменная интегрирования.

Для вычисления интеграла I в (2.2) рассматривается функция $G(\theta)$ комплексного переменного $\theta = u + iv$

$$G(\theta) = \frac{1}{(1+\theta^2)(\theta-\tau)} \left(\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} V_y + V_R \right) \sqrt{\frac{\theta-b}{\theta+b}}$$

Функция $G(\theta)$ имеет точки ветвления $\theta = \pm b$, полюс первого порядка $\theta = \tau$ и полюса второго порядка в точках $\theta = \pm i$. Внутри контура, изображенного на фиг. 3, существует однозначная ветвь функции $G(\theta)$. Выберем ее так, чтобы при $\theta = u \rightarrow +\infty$

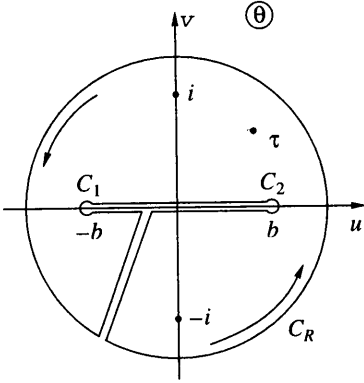
значение корня $\sqrt{(\theta-b)/(\theta+b)}$ было положительным. Тогда при $-b < \theta < b$

$$\sqrt{\frac{\theta-b}{\theta+b}} = \pm i \sqrt{\frac{b-\theta}{b+\theta}}$$

Знак плюс соответствует верхнему берегу разреза, минус – нижнему.

Рассматривается интеграл $\oint G(\theta)d\theta$ от выбранной ветви функции по замкнутому контуру (фиг. 3). На контурах C_1 , C_2 и C_R выполняются следующие соотношения при $r_1 \rightarrow 0$, $r_2 \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$:

$$\int_{C_1} G(\theta)d\theta \rightarrow 0, \quad \int_{C_2} G(\theta)d\theta \rightarrow 0, \quad \int_{C_R} G(\theta)d\theta \rightarrow 0$$



Фиг. 3. Контур интегрирования

Так как на верхнем и нижнем берегах разреза функция $G(\theta)$ имеет разные знаки, то выполняется

равенство $2I = \oint G(\theta)d\theta$. Для определения интеграла применяется теорема о вычетах [7], в результате выражение (2.2) принимает вид

$$F(\tau) = \frac{2RV_y}{(1+\tau^2)^2} \left[1 - \tau^2 - \sqrt{\frac{\tau+b}{\tau-b}} \frac{1+3b\tau+b\tau^3-2b^2\tau^2+2b^3\tau-\tau^2}{\sqrt{1+b^2}(1+b^2)} \right] + \frac{2RV_R}{1+\tau^2} \left(1 - \sqrt{\frac{\tau+b}{\tau-b}} \frac{1+b\tau}{\sqrt{1+b^2}} \right) + \frac{\gamma_0}{\sqrt{\tau^2-b^2}}$$

В силу линейности уравнения Лапласа и граничных условий решение обладает свойством суперпозиции, поэтому $\gamma_0 = V_y\gamma_y + V_R\gamma_R$. При вертикальном ударе в силу симметрии течения в точке $\tau = 0$ производная $\partial\phi/\partial\xi = 0$ или $\text{Im } F(\tau) = 0$, откуда следует

$$\gamma_y = \frac{2bR}{\sqrt{1+b^2}(1+b^2)}, \quad \gamma_R = \frac{2bR}{\sqrt{1+b^2}}$$

В результате комплексная скорость в плоскости τ записывается в виде

$$\frac{dW}{d\tau} = -\frac{2Ri}{1+\tau^2} \left[\frac{V_y}{1+\tau^2} \left(1 - \tau^2 - \frac{\tau(1+2b^2-\tau^2)}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{\tau^2-b^2}} \right) + V_R \left(1 - \frac{\tau\sqrt{1+b^2}}{\sqrt{\tau^2-b^2}} \right) \right] \quad (2.3)$$

После интегрирования (2.3) выражение для комплексного потенциала в плоскости τ имеет вид

$$W = -2Ri \left[\frac{V_y}{1+\tau^2} \left(\tau - \frac{\sqrt{\tau^2-b^2}}{\sqrt{1+b^2}} \right) + V_R \left(\text{arctg } \tau - \text{arctg } \frac{\sqrt{\tau^2-b^2}}{\sqrt{1+b^2}} \right) \right] \quad (2.4)$$

После подстановки $\tau = \xi$ ($|\xi| \leq b$) в (2.4) находится значение потенциала скоростей на дужке ($|\beta| \leq B$)

$$\varphi = -2R \left(V_y \sqrt{a} \cos \frac{\beta}{2} - \frac{V_R}{2} \ln \frac{\cos \beta/2 - \sqrt{a}}{\cos \beta/2 + \sqrt{a}} \right) \quad (2.5)$$

$$a = \cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \frac{B}{2}$$

Из (2.3) определяется нормальная скорость на свободной поверхности ($|\beta| > B$)

$$V_n = V_y \left(-\cos \beta \pm \sin \frac{\beta}{2} \frac{\cos^2 \beta/2 + a}{\sqrt{-a}} \right) + V_R \left(-1 \pm \frac{\sin \beta/2}{\sqrt{-a}} \right) \quad (2.6)$$

Знак плюс берется при $B < \beta < \pi$, минус – при $-\pi < \beta < -B$.

Импульсивная сила P_y , действующая на дужку при вертикальном ударе и расширении, направлена по оси Y и определяется из выражения

$$P_y = -2\rho R \int_0^B \varphi(\beta) \cos \beta d\beta \quad (2.7)$$

После подстановки (2.5) в (2.7) находится вертикальная импульсивная сила

$$P_y = \rho \pi R^2 \sin^2 \frac{B}{2} \left[\left(1 + \cos^2 \frac{B}{2} \right) V_y + 2V_R \right] \quad (2.8)$$

Из (2.8) определяются присоединенные массы жидкости при вертикальном ударе m_y^* и расширении пластинки в радиальном направлении m_R^*

$$m_y^* = \rho \pi R^2 \left(1 - \cos^4 \frac{B}{2} \right), \quad m_R^* = \rho \pi R^2 2 \sin^2 \frac{B}{2}$$

3. После решения вспомогательной задачи продолжим рассмотрение погружения цилиндра в сужающейся цилиндрической полости. Пусть в момент времени $t = 0$ тело впервые касается свободной поверхности жидкости. Радиус полости в этот момент обозначим через R_0 , зазор в начальный момент $\varepsilon_0 = R_0 - r$. Выполняются следующие соотношения:

$$R = R_0 - \int_0^t V_R dt, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 - \int_0^t V_R dt \quad (3.1)$$

Обозначим через h_0 погружение круга, отсчитываемое относительно первоначальной жидкой границы с радиусом R_0 , тогда погружение h относительно окружности радиуса R (фиг. 1) запишется следующим образом:

$$h = h_0 + R_0 - R, \quad h_0 = \int_0^t V_y dt, \quad h = \int_0^t (V_y + V_R) dt \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) следует тождество

$$\varepsilon + h = \varepsilon_0 + h_0 \quad (3.3)$$

Выбирается частица на свободной поверхности, определяемая угловой координатой β . Поскольку течение рассматривается как возникшее при ударе, то на свободной поверхности существуют только нормальные скорости. Величину нормальной скорости определим, если к выражению (2.6) добавим скорость V_R (обращенное радиальное течение по отношению к вспомогательной задаче). В силу симметрии для

определенности рассматривается правая половина течения ($\beta > 0$). Пусть в момент t рассматриваемая частица достигает поверхности круга ($B = \beta$). Условие их встречи запишется в виде (фиг. 1)

$$\int_0^l V_n dt + OC = R_0 \quad (3.4)$$

Отрезок OC определяется из следующих соотношений ($O'A \perp OC$)

$$\begin{aligned} OC &= OA + \sqrt{r^2 - O'A^2}, \quad OA = OO' \cos \beta \\ O'A &= OO' \sin \beta, \quad OO' = \varepsilon_0 + h_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

После подстановки в (3.4) соотношений (3.5) и выражения для нормальной скорости, с учетом (3.2) и (3.3), получим

$$\int_0^t \frac{V_y(\cos^2 \beta / 2 + a) + V_R}{\sqrt{-a}} \sin \frac{\beta}{2} dt = r + \varepsilon_0(1 - \cos \beta) - \sqrt{r^2 - (\varepsilon + h)^2 \sin^2 \beta} \quad (3.6)$$

В уравнении (3.6) угол смоченной ширины $2B$ является переменным, угловая координата β фиксирована.

Введем новые переменные $s = 1 - \cos B$, $f = 1 - \cos \beta$. Уравнение (3.6) примет вид

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{V_y(2+s-2f) + 2V_R}{\sqrt{f-s}} dt = \frac{r + \varepsilon_0 f - \sqrt{r^2 - (\varepsilon + h)^2 f(2-f)}}{\sqrt{f}} \quad (3.7)$$

Здесь V_y и V_R – известные функции времени, $s(t)$ – искомая функция. Из физических соображений следует, что заданной паре функций $V_y(t)$ и $V_R(t)$ будет соответствовать единственная зависимость $s(t)$ и, обратно, $t = t(s)$. Поэтому можно принять s за независимую переменную. Дифференциалы в (3.7) представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} V_y dt &= dh_0 = \varphi_y(s) ds, \quad V_R dt = -dR = \varphi_R(s) ds \\ h_0 &= \int_0^s \varphi_y(s) ds, \quad R_0 - R = \int_0^s \varphi_R(s) ds \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\varphi_y(s)$ и $\varphi_R(s)$ – неизвестные функции.

При $t = 0$ угол смоченной ширины $2B = 0$, следовательно, $s = 0$. В момент времени t встречи частицы с кругом $B = \beta$ и $s = f$. После подстановки (3.8) в (3.7) интегральное уравнение запишется в виде

$$\frac{1}{2} \int_0^f \frac{(2+s-2f)\varphi_y(s) + 2\varphi_R(s)}{\sqrt{f-s}} ds = \frac{r + \varepsilon_0 f - \sqrt{r^2 - (\varepsilon + h)^2 f(2-f)}}{\sqrt{f}} \quad (3.9)$$

4. Умножим обе части (3.9) на $1/\sqrt{z-f}$ и проинтегрируем по f в пределах от 0 до z

$$\int_0^z \int_0^f \frac{(2+s-2f)\varphi_y(s) + 2\varphi_R(s)}{\sqrt{(f-s)(z-f)}} ds df = 2 \int_0^z \frac{r + \varepsilon_0 f - \sqrt{r^2 - (\varepsilon + h)^2 f(2-f)}}{\sqrt{f(z-f)}} df$$

Областью интегрирования для двойного интеграла в плоскости переменных f, s является треугольник, образованный тремя прямыми: $s = f$, $s = 0$, $f = z$. Изменим порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^z \int_s^z \frac{(2+s-2f)\varphi_y(s) + 2\varphi_R(s)}{\sqrt{(f-s)(z-f)}} df ds = 2 \int_0^z \frac{r + \varepsilon_0 f - \sqrt{r^2 - (\varepsilon + h)^2 f(2-f)}}{\sqrt{f(z-f)}} df \quad (4.1)$$

Определим внутренний интеграл в левой части уравнения (4.1). Вынесем из-под знака интеграла величины, не зависящие от f . В результате получим интегралы, которые записываются следующим образом:

$$\int_s^z \frac{df}{(f-s)(z-f)} = \pi, \quad \int_s^z \frac{fdf}{(f-s)(z-f)} = \frac{\pi}{2}(z+s) \quad (4.2)$$

Из правой части уравнения (4.1) выделяется интеграл

$$\int_0^z \frac{\sqrt{f}df}{\sqrt{z-f}} = \frac{\pi z}{2} \quad (4.3)$$

В результате использования соотношений (4.2), (4.3) и (3.8) уравнение (4.1) преобразуется к виду

$$2h - z(\varepsilon + h) = \frac{2}{\pi} \int_0^z \frac{r - \sqrt{r^2 - (\varepsilon + h)^2 f(2-f)}}{\sqrt{f(z-f)}} df \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) определяет связь между погружением, зазором и смоченной шириной ($z = 1 - \cos B$). Оно получено в предположении произвольных переменных скоростей V_y и V_R и при произвольном соотношении между радиусом тела и радиусом полости. Покажем, что уравнение (4.4) описывает также предельные случаи (случай малых зазоров и случай, соответствующий радиусу полости, стремящемуся к бесконечности).

В случае малого зазора ($\varepsilon \ll r$) и малых погружений ($h \ll r$) радикал из правой части (4.4) приближенно представляется в виде

$$\sqrt{r^2 - (\varepsilon + h)^2 f(2-f)} \approx r \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon + h}{r} \right)^2 f(2-f) \right]$$

Пренебрегая малыми второго порядка, получим

$$\sqrt{r^2 - (\varepsilon + h)^2 f(2-f)} \approx r$$

В результате уравнение (4.4) переходит в равенство

$$\cos B = \frac{\varepsilon - h}{\varepsilon + h} \quad (4.5)$$

Равенство (4.5) ранее получено в [5]. При рассмотрении предельного случая $R \rightarrow \infty$ введем новые переменные $B = c/R$, $\beta = x/R$, где c и x – дуги окружности радиуса R , соответствующие смоченной ширине и фиксированной точке свободной поверхности. В пределе выполняются следующие соотношения:

$$z = 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \rightarrow \frac{c^2}{2R^2}, \quad f = 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \rightarrow \frac{x^2}{2R^2} \quad (4.6)$$

$$df \rightarrow \frac{xdx}{R^2}, \quad \varepsilon \rightarrow R, \quad z(\varepsilon + h) \rightarrow 0$$

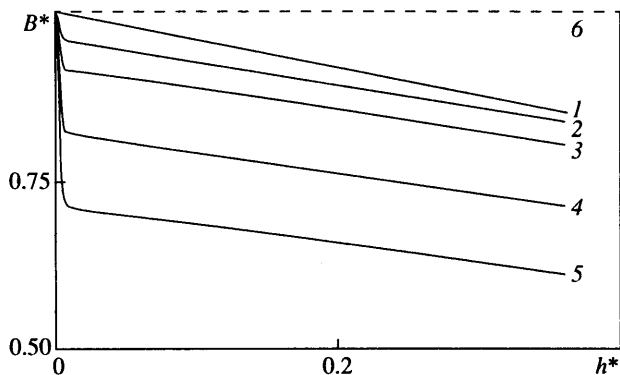
После подстановки (4.6) в (4.4) получим

$$h = \frac{2}{\pi} \int_0^c \frac{(r - \sqrt{r^2 - x^2}) dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} \quad (4.7)$$

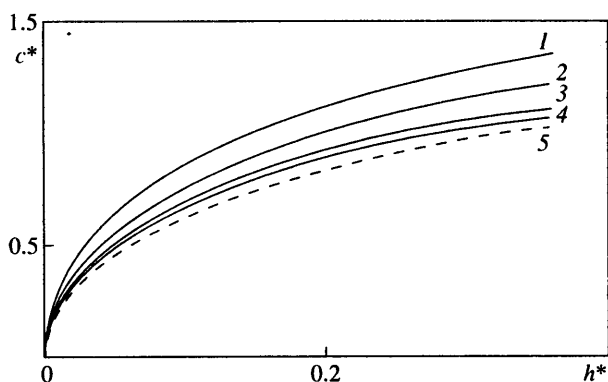
Уравнение (4.7) приводится к известному виду [3, 4]

$$\frac{h}{r} = 1 - \frac{2}{\pi} E\left(\frac{c}{r}\right), \quad E\left(\frac{c}{r}\right) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - (cs/r)^2}{1 - s^2}} ds \quad (4.8)$$

где $E(c/r)$ – полный эллиптический интеграл второго рода.



Фиг. 4. Зависимость отношения $B^* = B_2/B_1$ от безразмерной глубины погружения h^* . Кривые 1-5 - $\epsilon^* = 0,02, 0,1, 0,2, 0,5, 1$; 6 - $B^* = 1$



Фиг. 5. Зависимость безразмерной смоченной ширины c^* от безразмерной глубины погружения h^* . Кривые 1-4 - $\epsilon^* = 1, 2, 5, 10$; 5 - $\epsilon^* = \infty$

5. Введем безразмерные переменные $\epsilon^* = \epsilon/r$, $h^* = h/r$ и сделаем замену $z = z_1^2$, $f = f_1^2$, в результате интеграл в правой части (4.4) преобразуется к виду

$$F(z_1) = \frac{4}{\pi} \int_0^{z_1} \frac{1 - \sqrt{1 - (\epsilon^* + h^*)^2 f_1^2 (2 - f_1^2)}}{\sqrt{z_1^2 - f_1^2}} df_1$$

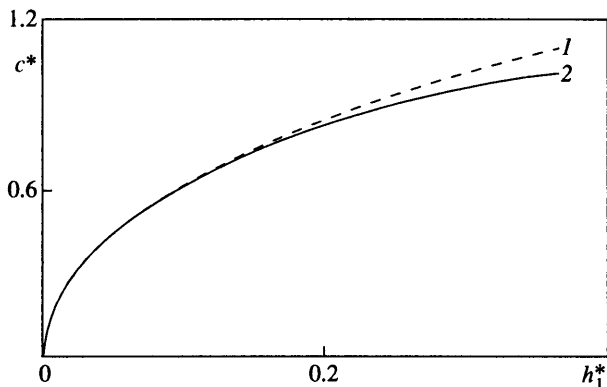
Таким образом, задача о погружении цилиндра в цилиндрической полости свелась к решению трансцендентного уравнения при заданных ϵ^* и h^*

$$2h^* - z_1^2(\epsilon^* + h^*) - F(z_1) = 0 \quad (5.1)$$

После нахождения z_1 из численного решения (5.1) угол B и безразмерная смоченная ширина $c^* = c/r$ определяются из соотношений

$$B = \arccos(1 - z_1^2), \quad c^* = B(\epsilon^* + 1) \quad (5.2)$$

Величины B и c^* определялись при следующих значениях h^* и ϵ^* : $0 \leq h^* \leq 0,36$, $0,02 \leq \epsilon^* \leq 10$. Рассчитанные по (5.1) и (5.2) значения B и c^* сравнивались со значениями, получаемыми из асимптотических соотношений (4.5) и (4.8). При малых



Фиг. 6. Зависимость безразмерной смоченной ширины c^* от безразмерной глубины погружения h_1^* . Кривая 1 – $\epsilon \rightarrow 0$, кривая 2 – $\epsilon \rightarrow \infty$

ϵ^* ($0,02 \leq \epsilon^* \leq 1$) вычислялось отношение $B^* = B_2/B_1$, величина B_1 определялась по асимптотической формуле (4.5), величина B_2 рассчитывалась по (5.1) и (5.2). Зависимости B^* от h^* представлены на фиг. 4 при различных значениях ϵ^* (кривые 1–5). Штриховая прямая 6 соответствует значению $B^* = 1$ (асимптотика при ϵ^* и $h^* \rightarrow 0$). Из фиг. 4 видно, что величины B_1 и B_2 близки друг к другу при $\epsilon^* = 0,02$ ($B^* \approx 1$), однако по мере роста ϵ^* расхождение между B_1 и B_2 увеличивается. Из фиг. 4 следует, что асимптотической формулой (4.5) можно пользоваться для расчета B при $\epsilon^* \leq 0,2$ и $h^* \leq 0,2$.

При больших значениях ϵ^* ($1 \leq \epsilon^* \leq 10$) величины c^* , рассчитанные по формулам (5.1) и (5.2), сравнивались с величинами, определяемыми по асимптотической зависимости (4.8). Зависимости c^* от h^* представлены на фиг. 5 при различных значениях ϵ^* (кривые 1–4). Штриховая кривая 5 соответствует $\epsilon^* = \infty$ (погружение цилиндра через горизонтальную свободную поверхность). Из рассмотрения фиг. 5, следует вывод, что асимптотику (4.8) можно применять для определения c^* при $\epsilon^* \geq 2$ и $h^* \leq 0,3$. Для вычисления B и c^* в интервале $0,2 < \epsilon^* < 2$ следует пользоваться уравнением (5.1) и соотношениями (5.2).

Введем новую переменную $h_1^* = hR/(\epsilon r)$. При $\epsilon \rightarrow \infty$ и $R \rightarrow \infty$ (случай погружения цилиндра через горизонтальную свободную поверхность) $h_1^* \rightarrow h^*$. При $\epsilon \rightarrow 0$ и $r \rightarrow R$ (малый зазор между цилиндром и полостью) $h_1^* \rightarrow h/\epsilon$. Установлено, что при $0 \leq h^* \leq 0,36$ и $0 \leq h/\epsilon \leq 0,36$ два крайних случая ($\epsilon \rightarrow 0$ и $\epsilon \rightarrow \infty$) описываются зависимостями $c^* = F(h_1^*)$, которые близки друг другу. Фигура 6 иллюстрирует это положение: кривая 1 соответствует $c^* = F(h/\epsilon)$ и уравнению (4.5), кривая 2 – $c^* = F(h^*)$ и уравнению (4.8). Зависимости $c^* = F(h_1^*)$ при $0,02 \leq \epsilon^* \leq 10$ и $0 \leq h_1^* \leq 0,36$ находятся между кривыми 1 и 2.

Заключение. Решена задача о погружении цилиндра в жидкость в сужающейся цилиндрической полости при произвольном соотношении между радиусом тела и радиусом полости. Определение смоченной ширины при заданных величинах зазора и погружения сведено к решению трансцендентного уравнения. Определены области изменения величин зазора и погружения, в которых применимы асимптотические формулы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Логвинович Г.В.* Гидродинамика течений со свободными границами. Киев: Наук. думка, 1969. 215 с.
2. *Wagner H.* Über Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten // ZAMM. 1932. Bd. 12. № 4. S. 193–215.
3. *Парышев Э.В., Рыков В.Н.* Экспериментальное исследование глиссирования цилиндра по поверхности воды // Тр. ЦАГИ. 1984. Вып. 2242. С. 21–25.
4. *Васин А.Д.* Нестационарное глиссирование тел вращения по поверхности жидкости // Тр. ЦАГИ. 1993. Вып. 2496. С. 28–35.
5. *Логвинович Г.В.* Некоторые вопросы глиссирования // Тр. ЦАГИ. 1980. Вып. 2052. С. 3–12.
6. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
7. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.III.2000