

УДК 532.516

© 2001 г. С.В. РЕВИНА, В.И. ЮДОВИЧ

ВОЗНИКНОВЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ ПРИ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Изучается длинноволновая асимптотика вторичного режима, возникающего при потере устойчивости стационарного пространственно-периодического течения, когда один из периодов стремится к бесконечности (волновое число α стремится к нулю). Показано, что если поток основного течения вдоль длинного периода отличен от нуля и выполняются некоторые условия невырожденности, то при уменьшении вязкости от основного решения ответвляется автоколебательный режим, причем возможна как мягкая, так и жесткая потеря устойчивости. Для главных членов асимптотики получены явные формулы. Приведены примеры расчета автоколебаний для конкретных течений, исследовано поведение траекторий движения частиц жидкости в автоколебательном режиме типа бегущей волны, ответвляющемся от сдвигового течения.

Исследованию автоколебаний, возникающих при потере устойчивости параллельных течений относительно длинноволновых возмущений, посвящены работы [1, 2]. Длинноволновая асимптотика широко используется в кинематической проблеме магнитного динамо – см. [3, 4], а также [5]. В линейной постановке асимптотика задачи устойчивости трехмерных стационарных пространственно-периодических течений рассмотрена в [6]. В ней показано, что если среднее продольной компоненты скорости отлично от нуля: $\langle V_3 \rangle \neq 0$, то при уменьшении вязкости происходит колебательная потеря устойчивости. Возникновению трехмерных вторичных автоколебаний на сдвиговых течениях посвящена работа [7], аналогичная задача для двумерных непараллельных течений рассмотрена в [8].

Настоящая работа посвящена нахождению автоколебательного режима, ответвляющегося от трехмерного стационарного пространственно-периодического течения вида $\mathbf{V} = (\alpha V_1, \alpha V_2, V_3)$ при малых α , когда число Рейнольдса переходит критическое значение, найденное в [6]. Подробный вывод приведенных в статье формул изложен в [9]. Применяется метод Ляпунова–Шмидта в форме, развитой в [10, 11], в сочетании с асимптотическим методом малых α . В качестве приложения полученных формул приведены результаты расчета траекторий движения частиц жидкости во вторичном тении.

В консервативных системах фазовое пространство делится на "море хаоса" и "острова устойчивости" [12, 13]. Течение несжимаемой жидкости в физическом пространстве обнаруживает аналогичное поведение. Одна из целей работы – обратить внимание на возможность исследования лагранжевой турбулентности, которая открывается всякий раз, когда методом Ляпунова–Шмидта рассчитывается вторичный стационарный или периодический режим.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство, под действием заданных сил, описываемое системой урав-

нений Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

Предположим, что все компоненты поля скорости \mathbf{v} и поля внешних сил \mathbf{F} периодичны по x_1, x_2, x_3 с периодами L_1, L_2, L_3 , причем один из периодов $L_3 \rightarrow \infty$, когда два остальных фиксированы: $L_3 = 2\pi/\alpha$, волновое число $\alpha \rightarrow 0$. Безразмерная вязкость $\nu = 1/\operatorname{Re} = \nu_d/(v_d a_d)$, где ν_d – размерная кинематическая вязкость, a_d – масштаб длины, не зависящий от α (например, можно положить $a_d = L_1$ или $a_d = L_2$), масштаб скорости v_d также не зависит от α .

Далее через $\langle f \rangle$ обозначено среднее f по прямоугольнику, а через $\langle\langle f \rangle\rangle$ – среднее по параллелепипеду периодов $D = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2, \quad \langle\langle f \rangle\rangle = \frac{1}{|D|} \int f(x) dx$$

При этом $\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle = \mathbf{q}$ считается заданным.

Предположим, что система (1.1) имеет стационарное пространственно-периодическое решение вида $\mathbf{V} = (\alpha V_1, \alpha V_2, V_3)(x_1, x_2, x_3)$. В частном случае, когда $\mathbf{F} = (0, 0, \nu f(x_1, x_2))$, $\mathbf{q} = (0, 0, Q)$, единственное стационарное параллельное течение имеет вид $\mathbf{V} = (0, 0, W(x_1, x_2))$, где $W(x_1, x_2)$ – периодическое по x_1, x_2 решение задачи

$$-\Delta_0 W = f(x_1, x_2) - \langle f \rangle; \quad \langle W \rangle = Q, \quad \Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Известны различные механизмы возникновения вихревых массовых сил, действующих на жидкость. Примером может служить архимедова сила в уравнениях Обербека–Буссинеска, когда ввиду высокой теплопроводности жидкости влияние ее движения на температурное поле пренебрежимо мало. Разнообразные массовые силы могут быть созданы также при использовании магнитных полей в условиях, когда нет обратного влияния жидкости на магнитное поле. Наиболее известна экспериментальная реализация течения Колмогорова с синусоидальным профилем [14].

В работе исследованы автоколебания, ответвляющиеся от указанных стационарных течений при критическом значении параметра ν , в предположении, что $\langle V_3 \rangle \neq 0$ и волновое число α мало.

2. Отыскание автоколебания. Линейная спектральная задача. Через ε^2 обозначим надкритичность: $\nu_c - \nu = \varepsilon^2$, возмущения (\mathbf{u}, P) и частоту ω будем разыскивать в виде рядов по степеням ε

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \mathbf{u}_k, \quad P = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k P_k, \quad \omega = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \omega_k$$

Пусть φ есть решение линейной спектральной задачи

$$\begin{aligned} i\omega_0 \varphi_j - \nu_c \left(\Delta_0 + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_j + \alpha V_s \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s} + \alpha V_3 \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} + \alpha \varphi_s \frac{\partial V_j}{\partial x_s} + \\ + \alpha^2 \varphi_3 \frac{\partial V_j}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} i\omega_0 \varphi_3 - \nu_c \left(\Delta_0 + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_3 + \alpha V_s \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_s} + \alpha V_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \varphi_s \frac{\partial V_3}{\partial x_s} + \\ + \alpha \varphi_3 \frac{\partial V_3}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \alpha \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

$$\langle \varphi_3 \rangle = 0, \quad \int_0^{L_2} \int_0^{2\pi} \varphi_1 dx_2 dz = 0, \quad \int_0^{L_1} \int_0^{2\pi} \varphi_2 dx_1 dz = 0 \quad (2.4)$$

Здесь и в дальнейшем $z = \alpha x_3$, индексы j, s, l, n меняются от 1 до 2, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Предполагается, что собственные значения $\pm i\omega_0$ простые и что при $v = v_c$ на мнимой оси нет других собственных значений. Тогда

$$\mathbf{u}_1 = \alpha_1 (\varphi e^{i\omega t} + \bar{\varphi} e^{-i\omega t})$$

Рассмотрим линейную спектральную задачу (2.1)–(2.4). Собственные значения, собственные функции и критическое значение вязкости v_c разыскиваются в виде рядов по степеням малого параметра α

$$i\omega_0(\alpha) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \alpha^k, \quad \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k \alpha^k, \quad v_c = v_* + \sum_{k=0}^{\infty} v_k \alpha^k \quad (2.5)$$

Пусть θ_k, F_k, M_k суть решения следующих вспомогательных задач:

$$\Delta_0 \theta_k = V_k - \langle V_k \rangle, \quad \langle \theta_k \rangle = 0;$$

$$\Delta_0 F_k = \theta_k, \quad \langle F_k \rangle = 0$$

$$\Delta_0 M_k = F_k, \quad \langle M_k \rangle = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

Введем обозначения

$$a_{js}(z) = 2 \left\langle \frac{\partial \theta_3}{\partial x_j} \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s} \right\rangle - \delta_{js} \langle (\nabla_0 \theta_3)^2 \rangle; \quad b_{js} = \langle \langle a_{js} \rangle \rangle \quad (2.6)$$

Очевидно, что $\mathbf{B} = \{b_{js}\}_{j,s=1,2}$ – симметричная матрица с нулевым следом. Ее спектр состоит из пары собственных значений $\{-v_*^2, v_*^2\}$, где, как показано в [6], v_* есть нулевой член критической вязкости в разложении (2.5), причем

$$v_*^2 = \sqrt{-\det \mathbf{B}} = \sqrt{b_{11}^2 + b_{12}^2} \quad (2.7)$$

Пусть $\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^1$ – собственные векторы матрицы \mathbf{B} , отвечающие собственным значениям v_*^2 и $-v_*^2$ соответственно. При $b_{12} \neq 0$ компоненты вектора \mathbf{C}^0 определим по формулам

$$C_1^0 = \frac{b_{12}}{\sqrt{b_{12}^2 + (v_*^2 - b_{11})^2}}, \quad C_2^0 = \frac{v_*^2 - b_{11}}{\sqrt{b_{12}^2 + (v_*^2 - b_{11})^2}} \quad (2.8)$$

если же $b_{12} = 0$, то $C_1^0 = 1, C_2^0 = 0$ при $b_{11} > 0$ и $C_1^0 = 0, C_2^0 = 1$, когда $b_{11} < 0$. Во всех указанных случаях положим для компонент вектора \mathbf{C}^1 : $C_1^1 = -C_2^0, C_2^1 = C_1^0$.

Алгоритм вычисления членов рядов (2.5) указан в [6]. Решив краевые задачи, которые получаются из (2.1)–(2.4) при α^0 и α^1 , находим φ^0, φ^1 и δ_0

$$\varphi_j^0(z) = C_j^0 e^{-imz}, \quad \varphi_3^0(z) = \frac{1}{v_*} \varphi_s^0(z) \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s}, \quad \delta_0 = im \langle V_3 \rangle \quad (2.9)$$

где целое $m \neq 0$ есть продольное волновое число

$$\varphi_j^1 = \frac{1}{v_*} \varphi_s^0(z) \frac{\partial \theta_j}{\partial x_s} + \frac{1}{v_*} \frac{d\varphi_s^0}{dz} \left(\delta_{js} \theta_3 - 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_s \partial x_j} \right) + \langle \varphi_j^1 \rangle \quad (2.10)$$

$$\varphi_3^1 = \frac{1}{v_*^2} \varphi_s^0(z) G_s^1 + \frac{1}{v_*^2} \frac{d\varphi_s^0}{dz} G_s + \frac{1}{v_*} \langle \varphi_s^1 \rangle \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s} - \frac{v_1}{v_*} \varphi_3^0$$

причем функции G_s , G_s^1 определяются как решения задач

$$\Delta_0 G_s = \frac{\partial}{\partial x_s} (\theta_3 \Delta_0 \theta_3) - 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_s \partial x_j} \frac{\partial \Delta_0 \theta_3}{\partial x_j}, \quad \langle G_s \rangle = 0 \quad (2.11)$$

$$\Delta_0 G_s^1 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial x_s} V_3 \right) + \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial x_j \partial x_s} V_j + \frac{\partial \theta_j}{\partial x_s} \frac{\partial V_3}{\partial x_j}, \quad \langle G_s^1 \rangle = 0$$

Из условия разрешимости осредненного уравнения (2.1) при α^2 находятся v_* (2.7) и $\delta_1 = 0$. Среднее поперечной компоненты скорости $\langle \varphi_j^1 \rangle$ имеет вид

$$\langle \varphi_j^1 \rangle = B_j(z) e^{-imz}, \quad B_j(z) = B_j^1(z) + B_j^0$$

где $B_j^1(z)$ есть решение задачи

$$\frac{d}{dz} B_j^1(z) = \frac{1}{v_* \langle V_3 \rangle} [m^2 (a_{js}(z) C_s^0 - v_*^2 C_j^0) + ima'_{js}(z) C_s^0] \equiv g_m(z), \quad \langle \langle B_j^1 \rangle \rangle = 0 \quad (2.12)$$

а константа $B_j^0 = \langle \langle B_j(z) \rangle \rangle$ определяется из условия разрешимости осредненного по x_1 , x_2 уравнения (2.1) при α^3 . Чтобы исключить тривиальную неединственность в определении φ , достаточно считать, что вектор $\mathbf{B}^0 = (B_1^0, B_2^0)$ перпендикулярен \mathbf{C}^0 , определенному в (2.8), или, что равносильно, \mathbf{B}^0 коллинеарен \mathbf{C}^1 : $\mathbf{B}^0 = \beta \mathbf{C}^1$ при некотором β .

Опустив для краткости выражение $\Delta_0 \varphi_j^2$, которое участвует в промежуточных выкладках, выпишем осредненное уравнение (2.1) при α^3

$$\delta_0 \langle \varphi_j^2 \rangle + \langle V_3 \rangle \frac{d \langle \varphi_j^2 \rangle}{dz} = -(\delta_2 + m^2 v_1) \varphi_j^0 - \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{v_*} a_{js}(z) \frac{d \langle \varphi_s^1 \rangle}{dz} - v_* \frac{d \langle \varphi_j^1 \rangle}{dz} + \frac{1}{v_*^2} \frac{d^2 \varphi_s^0}{dz^2} f_{js}(z) - \frac{v_1}{v_*^2} a_{js}(z) \frac{d \varphi_s^0}{dz} + \frac{1}{v_*^2} \varphi_s^0(z) f_{js}^1(z) + \frac{1}{v_*^2} \frac{d \varphi_s^0}{dz} f_{js}^2(z) \right) \quad (2.13)$$

$$f_{js}(z) = \delta_{js} \langle \theta_3^2 \Delta_0 \theta_3 \rangle - 2 \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_s \partial x_j} \Delta_0 \theta_3 \theta_3 \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\partial Q_s}{\partial x_j} \theta_3 \right\rangle$$

$$f_{js}^1(z) = \langle G_s^1 V_j \rangle + \langle \Delta_0 H_{js}^1 \theta_3 \rangle - 2 \left\langle \frac{\partial Q_s^1}{\partial x_j} \theta_3 \right\rangle \quad (2.14)$$

$$f_{js}^2(z) = \langle G_s V_j \rangle + \langle \Delta_0 H_{js}^2 \theta_3 \rangle + 2 \left\langle \frac{\partial Q_s^2}{\partial x_j} \theta_3 \right\rangle + \langle h_{js} \theta_3 \rangle$$

$$h_{js} = -2 \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_s \partial x_j \partial z} V_3 - 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_s \partial x_j \partial x_l} V_l + \delta_{js} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial z} V_3 + \frac{\partial \theta_3}{\partial x_l} V_l \right)$$

функции G_s , G_s^1 определены в (2.11), а Q_s , Q_s^1 , Q_s^2 и H_{js}^1 , H_{js}^2 определяются как решения задач

$$\Delta_0 Q_s = 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_j \partial x_s} \frac{\partial V_3}{\partial x_j} - \theta_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_s}, \quad \langle Q_s \rangle = 0$$

$$\Delta_0 Q_s^1 = \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial x_s \partial x_l} \frac{\partial V_l}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial x_j \partial x_s} \frac{\partial V_j}{\partial z} + \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial x_s \partial z} \frac{\partial V_3}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial z \partial x_s} \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

$$\langle Q_s^1 \rangle = 0;$$

$$\Delta_0 Q_s^2 = 2 \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_l \partial x_j \partial x_s} \frac{\partial V_l}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_s \partial x_j \partial z} \frac{\partial V_3}{\partial x_j} - \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s} \frac{\partial V_3}{\partial z} - \frac{\partial \theta_3}{\partial z} \frac{\partial V_3}{\partial x_s} - \frac{\partial \theta_l}{\partial x_s} \frac{\partial V_3}{\partial x_l} - \frac{\partial \theta_3}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_s}; \quad \langle Q_s^2 \rangle = 0$$

$$\Delta_0 H_{js}^1 = \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial x_s \partial z} V_3 + \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial x_l \partial x_s} V_l + \frac{\partial \theta_l}{\partial x_s} \frac{\partial V_j}{\partial x_l} + \frac{\partial V_j}{\partial z} \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s}, \quad \langle H_{js}^1 \rangle = 0$$

$$\Delta_0 H_{js}^2 = \frac{\partial \theta_j}{\partial x_s} \Delta_0 \theta_3 + \theta_3 \frac{\partial V_j}{\partial x_s} - 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_s \partial x_l} \frac{\partial V_j}{\partial x_l}, \quad \langle H_{js}^2 \rangle = 0$$

Через ξ_i , η_i , ζ_i обозначим компоненты разложения по базису C^0 , C^1 векторов с компонентами $\langle\langle f_{js} \rangle\rangle C_s^0$, $\langle\langle f_{js}^1 \rangle\rangle C_s^0$ и $\langle\langle f_{js}^2 \rangle\rangle C_s^0$ соответственно

$$\langle\langle f_{js} \rangle\rangle C_s^0 = \xi_1 C_j^0 + \xi_2 C_j^1;$$

$$\langle\langle f_{js}^1 \rangle\rangle C_s^0 = \eta_1 C_j^0 + \eta_2 C_j^1; \quad (2.15)$$

$$\langle\langle f_{js}^2 \rangle\rangle C_s^0 = \zeta_1 C_j^0 + \zeta_2 C_j^1$$

Тогда из условия разрешимости уравнения (2.13) находим v_1 , $\text{Im } \delta_2$ и β

$$v_1 = \frac{1}{2v_*^2} \zeta_1; \quad \text{Im } \delta_2 = -\frac{m^3}{v_*^2} \xi_1 + \frac{m^3}{v_*^2} \kappa_1 + \frac{m}{v_*^2} \eta_1$$

$$\text{Re } \beta = \frac{1}{2v_*^3} \zeta_2 - \frac{1}{2v_*^3} \kappa_2 + \frac{m^2}{2v_*^3} \kappa_3 \quad (2.16)$$

$$\text{Im } \beta = -\frac{m}{2v_*^3} \xi_2 + \frac{1}{2v_*^3 m} \eta_2$$

$$\kappa_1 = \frac{2}{\langle V_3 \rangle} \left\{ \langle\langle a_{11}^2(z) + a_{22}^2(z) \rangle\rangle - b_{11}^2 - b_{12}^2 \right\}, \quad \kappa_2 = \frac{2}{\langle V_3 \rangle} \langle\langle a_{11}^1(z) a_{12}(z) \rangle\rangle \quad (2.17)$$

$$\kappa_3 = \frac{2}{\langle V_3 \rangle} \left\langle \left\langle (a_{12}(z) - b_{12}) \int_0^z (a_{11}(s) - b_{11}) ds \right\rangle \right\rangle$$

В случае сдвигового трехмерного течения $\mathbf{V} = (0, 0, W(x_1, x_2))$ найденные выражения упрощаются. Так, в формуле (2.10) для φ^1 отсутствуют слагаемые, содержащие θ_j , G_s^1 и v_1 . Далее, среднее φ_j^1 имеет вид $\langle \varphi_j^1 \rangle = B_j^0 e^{-imz}$ ($B_j^1(z) = 0$ в силу того, что правая часть уравнения (2.12) равна нулю). В (2.14) $f_{js}^1(z)$ и $f_{js}^2(z)$ равны

нулю, так как $Q_s^1, Q_s^2, H_{js}^1, H_{js}^2$ равны нулю и потому в (2.15) η_j, ζ_j равны нулю. Легко видеть, что в случае сдвигового течения в (2.17) $\kappa_i = 0, i = 1, 2, 3$, и, следовательно, в (2.16)

$$v_1 = 0, \quad \text{Im } \delta_2 = -\frac{m^3}{v_*^2} \xi_1, \quad \text{Re } \beta = 0, \quad \text{Im } \beta = -\frac{m}{2v_*^3} \xi_2$$

Формулы (2.9)–(2.17) нетрудно переписать и для двумерного течения вида $\mathbf{V} = (\alpha V_1(x_1, z), V_2(x_1, z))$, и в этом частном случае они значительно упрощаются. Например, для двумерного течения $\beta = 0$. Аналогично рассматривается линейное сопряженное уравнение. Подробные выкладки приведены в [9].

3. Нелинейная поправка. Автоколебание. Чтобы найти второй член разложения возмущения скорости в ряд по степеням ϵ

$$\mathbf{u}_2 = \alpha_1^2 (\mathbf{w} + v e^{2i\omega t} + \bar{v} e^{-2i\omega t})$$

надо решить неоднородные уравнения

$$\begin{aligned} -v_c \left(\Delta_0 + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w_j + \alpha V_s \frac{\partial w_j}{\partial x_s} + \alpha V_3 \frac{\partial w_j}{\partial z} + \alpha w_s \frac{\partial V_j}{\partial x_s} + \alpha^2 w_3 \frac{\partial V_j}{\partial z} = \\ = -\frac{\partial P}{\partial x_j} - \varphi_s \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial x_s} - \bar{\varphi}_s \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s} - \alpha \left(\varphi_3 \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial z} + \bar{\varphi}_3 \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} -v_c \left(\Delta_0 + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w_3 + \alpha V_s \frac{\partial w_3}{\partial x_s} + \alpha V_3 \frac{\partial w_3}{\partial z} + w_s \frac{\partial V_3}{\partial x_s} + \alpha w_3 \frac{\partial V_3}{\partial z} = \\ = -\alpha \frac{\partial P}{\partial z} - \varphi_s \frac{\partial \bar{\varphi}_3}{\partial x_s} - \bar{\varphi}_s \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_s} - \alpha \left(\varphi_3 \frac{\partial \bar{\varphi}_3}{\partial z} + \bar{\varphi}_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \alpha \frac{\partial w_3}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} i2\omega_0 v_j - v_c \left(\Delta_0 + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_j + \alpha V_s \frac{\partial v_j}{\partial x_s} + \alpha V_3 \frac{\partial v_j}{\partial z} + \alpha v_s \frac{\partial V_j}{\partial x_s} + \\ + \alpha^2 v_3 \frac{\partial V_j}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x_j} - \varphi_s \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s} - \alpha \varphi_3 \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} i2\omega_0 v_3 - v_c \left(\Delta_0 + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_3 + \alpha V_s \frac{\partial v_3}{\partial x_s} + \alpha V_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} + v_s \frac{\partial V_3}{\partial x_s} + \\ + \alpha v_3 \frac{\partial V_3}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial P}{\partial z} - \varphi_s \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_s} - \alpha \varphi_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \alpha \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0 \quad (3.6)$$

с краевыми условиями вида (2.4).

Сначала рассмотрим задачу (3.1)–(3.3). Разыскивая \mathbf{w} в виде ряда по степеням параметра α , для нулевого и первого членов ряда находим

$$w_j^0 = 0; \quad w_3^0 = \frac{2}{v_*^2} C_s^0 C_j^0 \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_s \partial x_j} \quad w_j^1 = \frac{2}{v_*^2} C_s^0 C_l^0 \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_s \partial x_l} + \langle w_j^1 \rangle \quad (3.7)$$

среднее $\langle w_j^1 \rangle$ определяется из условия разрешимости уравнения (3.1) при α^2 и имеет вид

$$\langle w_j^1 \rangle = \frac{2}{v_*^2 \langle V_3 \rangle} C_l^0 C_s^0 \left\{ \left\langle \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s} \frac{\partial \theta_j}{\partial x_l} \right\rangle - \left\langle \left\langle \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s} \frac{\partial \theta_j}{\partial x_l} \right\rangle \right\rangle \right\} \quad (3.8)$$

а для w_3^1 имеем выражение, в котором N_j и N_{lj} – решения следующих задач:

$$w_3^1 = \frac{2}{v_*^3} C_l^0 C_j^0 N_{lj} + \frac{2}{v_*^3} C_l^0 C_j^0 \frac{\partial N_j}{\partial x_l} + \frac{4}{v_*^2} C_j^0 \operatorname{Re} B_j(z) \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_l \partial x_j} + \frac{1}{v_*} \langle w_s^1 \rangle \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s} - \frac{v_1}{v_*} w_3^0 \quad (3.9)$$

$$\Delta_0 N_j = G_j^1, \quad \langle N_j \rangle = 0$$

$$\Delta_0 N_{lj} = V_s \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_s \partial x_j \partial x_l} + V_3 \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_j \partial x_l \partial z} + \frac{\partial^2 F_s}{\partial x_l \partial x_j} \frac{\partial V_3}{\partial x_s} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_l \partial x_j} \frac{\partial V_3}{\partial z} + \frac{\partial \theta_s}{\partial x_l} \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial x_s \partial x_j} - \frac{5}{2} \frac{d}{dz} \left\langle \frac{\partial \theta_3}{\partial x_l} \frac{\partial \theta_3}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \langle N_{lj} \rangle = 0$$

Для сдвигового течения $\mathbf{V} = (0, 0, W(x_1, x_2))$ в формулах (3.7)–(3.9) отлична от нуля лишь компонента w_3^0 .

Рассмотрим систему уравнений (3.4)–(3.6). В общем случае, если нет специальных вырождений, разложение ее решения в ряд по степеням α начинается со степени -1 , а для сдвигового течения, как показано ниже, с нулевой.

Подставив разложение \mathbf{v} в виде ряда по степеням α в (3.4)–(3.6) и решив задачи, которые получаются при α^{-1} и α^0 , приходим к следующим выражениям:

$$v_j^{-1} = C_j e^{-i2mz}, \quad v_3^{-1} = \frac{1}{v_*} v_s^{-1}(z) \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s}$$

$$v_j^0 = \frac{1}{v_*} v_s^{-1}(z) \frac{\partial \theta_j}{\partial x_s} + \frac{1}{v_*} \frac{dv_s^{-1}}{dz} \left(\delta_{sj} \theta_3 - 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_s \partial x_j} \right) + \langle v_j^0 \rangle$$

$$v_3^0 = \frac{1}{v_*^2} v_s^{-1}(z) G_s^1 + \frac{1}{v_*^2} \frac{dv_s^{-1}}{dz} G_s + \frac{1}{v_*} \langle v_s^0 \rangle \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s} - \frac{v_1}{v_*} v_3^{-1} + \frac{1}{v_*^2} \varphi_s^0(z) \varphi_j^0(z) \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_s \partial x_j}$$

Из условия разрешимости осредненного уравнения (3.4) при α^1 выводим: $C_j = \gamma C_j^0$. Среднее $\langle v_j^0 \rangle$ имеет вид

$$\langle v_j^0 \rangle = D_j(z) e^{-2imz}, \quad D_j(z) = D_j^1(z) + D_j^0$$

где $D_j^1(z)$ есть решение задачи

$$\frac{d}{dz} D_j^1(z) = g_{2m}(z), \quad \langle \langle D_j^1 \rangle \rangle = 0$$

$g_{2m}(z)$ получается из правой части уравнения (2.12) $g_m(z)$ заменой $m \rightarrow 2m$. Так как, по предположению, $2i\omega_0$ не является собственным значением оператора $A(\mathbf{v}_c)$, необходимо потребовать, чтобы векторы $\mathbf{D}^0 = (D_1^0, D_2^0)$ и \mathbf{C}^1 были коллинеарны: $D_j^0 = \delta C_j^1$. Константы γ и δ определяются из условия разрешимости уравнения (3.4)

в порядке α^2

$$\gamma = \frac{\left\langle \left\langle \frac{\partial \theta_j}{\partial x_s} \frac{\partial \theta_3}{\partial x_l} \right\rangle \right\rangle C_s^0 C_l^0 C_j^0}{3m^2(\kappa_1 - \xi_1)},$$

$$\text{Re } \delta = \gamma \left[\text{Re } \beta + \frac{3m^2}{2v_*^3} \kappa_3 \right]$$

$$\text{Im } \delta = \gamma \left[\frac{1}{2} \text{Im } \beta - \frac{3m}{4v_*^3} \xi_2 \right] - \frac{1}{4v_*^3 m} \left\langle \left\langle \frac{\partial \theta_j}{\partial x_s} \frac{\partial \theta_3}{\partial x_l} \right\rangle \right\rangle C_l^0 C_s^0 C_j^1$$

Для сдвигового течения $\mathbf{V} = (0, 0, W(x_1, x_2))$ имеем: $\gamma = 0$ и $\delta = 0$, а для двумерного течения вида $\mathbf{V} = (\alpha V_1(x_1, z), V_2(x_1, z))$ получается, что $\delta = 0$. Другой пример, когда удовлетворится условие $\gamma = 0$, или

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial \theta_j}{\partial x_s} \frac{\partial \theta_3}{\partial x_l} \right\rangle \right\rangle C_l^0 C_s^0 C_j^0 = 0 \quad (3.10)$$

при выполнении которого в разложении \mathbf{v} член ряда при α^{-1} отсутствует, дает течение вида $\mathbf{V} = (\alpha V_1, \alpha V_2, \alpha V_3)$, где

$$V_1 = A \cos(kx_1) \sin(lx_2) \sin(nz); \quad V_2 = B \sin(kx_1) \cos(lx_2) \sin(nz)$$

$$V_3 = C \sin(kx_1) \sin(lx_2) \cos(nz) + \langle V_3 \rangle$$

при условии $Ak + Bl + Cn = 0$. В то же время для $\mathbf{V} = (\alpha f(x_1, z), f(x_1, z))$, где $f(x_1, z) = \cos x_1 \cos z + \sin x_1 \sin z + \langle f \rangle$, коэффициент $\gamma \neq 0$.

Из условия разрешимости нелинейного уравнения возмущений при ε^3 находятся амплитуда α_1 и поправка к частоте ω_2 , которые мы также будем разыскивать в виде рядов по степеням параметра α : $\alpha_{1*}^2 = \alpha_{1*}^2 + O(\alpha)$, $\alpha \rightarrow 0$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{1*}^2 &= v_*^3 \left[(b_{sn}^1 + \gamma C_l^0 \langle \langle A_{sni}(z) \rangle \rangle) C_s^0 C_n^0 + \frac{v_*}{m^2} C_l^0 \left\langle \left\langle D_{sn}(z) \left\langle \frac{\partial \theta_n}{\partial x_l} \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s} \right\rangle \right\rangle \right]^{-1} \\ \omega_2^0 &= 0, \quad \omega_2^1 = -\alpha_{1*}^2 C_l^0 C_n^0 C_j^0 \frac{2m\gamma}{v_*^2} \left\langle \left\langle \frac{\partial \theta_j}{\partial x_l} \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s} \right\rangle \right\rangle \\ \omega_2^2 &= -\alpha_{1*}^2 \left[\frac{2m\gamma}{v_*^3} C_l^0 C_n^0 C_s^0 \langle \langle B_{sni}(z) \rangle \rangle + \frac{2m\gamma}{v_*^2} \left\langle \left\langle E_{sn}(z) \left\langle \frac{\partial \theta_n}{\partial x_l} \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s} \right\rangle \right\rangle \right] C_l^0 + \\ &+ \frac{2m^3\gamma}{v_*^3} C_l^0 C_n^0 C_s^0 \langle \langle C_{sni}(z) \rangle \rangle \quad (3.11) \end{aligned}$$

$$b_{sn}^1 = \left\{ 2 \left\langle \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_l \partial x_s} \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_n \partial x_s} \right\rangle \right\rangle - \delta_{ij} \left\langle \left\langle \theta_3 \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_n \partial x_s} \right\rangle \right\rangle \right\} C_l^0 C_j^0 \quad (3.12)$$

где функции $A_{sni}(z)$, $B_{sni}(z)$, $C_{sni}(z)$, $D_{sn}(z)$, $E_{sn}(z)$ найдены явно [9], и здесь не приводятся ввиду их громоздкости. Вообще, для течения $\mathbf{V} = (\alpha V_1, \alpha V_2, V_3)$, если условие (3.10) выполнено, выражение квадрата амплитуды имеет ту же структуру, что и для сдви-

гового течения [7]

$$\alpha_{1*}^2 = v_*^3 \left[C_s^0 C_n^0 C_l^0 C_j^0 \left\{ 2 \left\langle \left\langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_l \partial x_j} \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_n \partial x_s} \right\rangle \right\rangle - \delta_{ij} \left\langle \left\langle \theta_3 \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_s \partial x_n} \right\rangle \right\rangle \right\} \right]^{-1} \quad (3.13)$$

$$\omega_2^0 = 0, \quad \omega_2^1 = 0, \quad \omega_2^2 = 0$$

Основной режим $\mathbf{V} = (\alpha V_1, \alpha V_2, V_3)$ (или $\mathbf{V} = (0, 0, W(x_1, x_2))$) асимптотически устойчив при малых $v - v_c$, если $v > v_c$, и неустойчив, если $v < v_c$ [11]. Поэтому характер потери устойчивости основного режима (мягкая или жесткая) при малых α зависит от знака знаменателя в выражении α_{1*}^2 в (3.11) (или (3.13) соответственно). Если знаменатель больше нуля, то цикл существует при $v < v_c$ и происходит мягкая потеря устойчивости, если же он меньше нуля, то цикл существует при $v > v_c$ и неустойчив.

4. Мягкая и жесткая потеря устойчивости. Примеры. В случае параллельного течения $\mathbf{V} = (0, W(x_1))$ из (3.13) следует результат работы [2]: $\alpha_{1*}^2 = v_*^3 / \langle \langle (\theta'_3)^2 \rangle \rangle$. Следовательно, длинноволновая неустойчивость – мягкая. Покажем, что для трехмерного сдвигового течения $\mathbf{V} = (0, 0, W(x_1, x_2))$ возможна как мягкая, так и жесткая потеря устойчивости.

Перепишем равенство (3.13) в виде $\alpha_{1*}^2 = v_*^3 / b_{sn}^1 C_s^0 C_n^0$, где b_{sn}^1 определены в (3.12). С учетом (2.6), (2.8), если $b_{12} \neq 0$

$$b_{sn}^1 C_s^0 C_n^0 = \frac{2(v_*^2 - b_{11})(b_{11}^1 b_{11} + b_{12}^1 b_{12})}{b_{12}^2 + (v_*^2 - b_{11})^2}$$

следовательно, $\text{sgn}(b_{sn}^1 C_s^0 C_n^0) = \text{sgn}(b_{11}^1 b_{11} + b_{12}^1 b_{12})$, а если $b_{12} = 0$, то $\text{sgn}(b_{sn}^1 C_s^0 C_n^0) = \text{sgn}(b_{11}^1 b_{11})$.

Нетрудно показать, что для профиля

$$W(x_1, x_2) = A \cos(kx_1) \cos(mx_2) + B \cos(kx_1) \sin(mx_2) + C \sin(kx_1) \cos(mx_2) + D \sin(kx_1) \sin(mx_2) + \langle W \rangle$$

$k, m \neq 0$, выполняются равенства $b_{11}^1 = a^2 b_{11}$, $b_{12}^1 = b^2 b_{12}$ и, значит, потеря устойчивости – мягкая.

В то же время, например, для профиля

$$W(x_1, x_2) = A \cos(kx_1) \cos(mx_2) + B \cos(Lx_1) \cos(nx_2) + \langle W \rangle$$

когда $k^2 > m^2$, $n^2 > l^2$ и коэффициенты A и B удовлетворяют неравенству

$$p^4 q < \frac{B^2}{A^2} < p^2 q \quad (4.1)$$

$$p = \frac{l}{n} \frac{1 + (n/l)^2}{1 + (m/k)^2}, \quad q = \frac{1 - (m/k)^2}{(n/l)^2 - 1}$$

происходит жесткая потеря устойчивости, так как неравенства (4.1) означают одновременное выполнение двух условий: $b_{11} > 0$ и $b_{11}^1 < 0$.

Пусть основное течение имеет вид

$$\mathbf{V} = (0, 0, A \cos(kx_1) \cos(Lx_2) + 1), \quad k > l \quad (4.2)$$

Для ведущих членов асимптотики критической вязкости и амплитуды автоколебания имеем

$$v_*^2 = \frac{A^2}{4} \frac{k^2 - l^2}{(k^2 + l^2)^2}, \quad v_1 = 0, \quad \alpha_{1*}^2 = \frac{A}{2k^2} (k^2 + l^2) \sqrt{k^2 - l^2}$$

Возмущения скорости \mathbf{u} с ошибкой порядка $O(\alpha^3 + \varepsilon^3)$, $\alpha \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} u_1(x, t) = \varepsilon \alpha_{1*} \left(2 \cos(\alpha m(x_3 - t)) - \alpha m \frac{4\sqrt{k^2 - l^2}}{k^2 + l^2} \cos(kx_1) \cos(lx_2) \sin(\alpha m(x_3 - t)) + \right. \\ \left. + (\alpha m)^2 \cos(\alpha m(x_3 - t)) \left(\frac{l^2}{k^2(k^2 - l^2)} \cos(2kx_1) - \frac{l^2}{2(k^4 - l^4)} \cos(2kx_1) \cos(2lx_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2l^2} \cos(2lx_2) \right) \right) - \varepsilon^2 \alpha m \frac{8\sqrt{k^2 - l^2}}{k} \sin(kx_1) \cos(lx_2) \sin(2\alpha m(x_3 - t)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) = \varepsilon \alpha_{1*} \left(\alpha m \frac{8kl}{\sqrt{k^2 - l^2} (k^2 + l^2)} \sin(kx_1) \sin(lx_2) \sin(\alpha m(x_3 - t)) - \right. \\ \left. - (\alpha m)^2 \frac{kl}{2(k^4 - l^4)} \sin(2kx_1) \sin(2lx_2) \cos(\alpha m(x_3 - t)) \right) - \\ - \varepsilon^2 \alpha m \frac{16l}{\sqrt{k^2 - l^2}} \cos(kx_1) \sin(lx_2) \sin(2\alpha m(x_3 - t)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

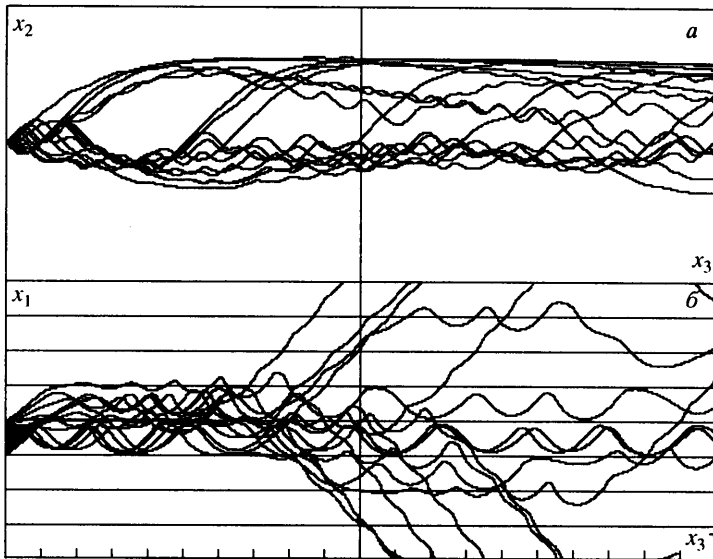
$$\begin{aligned} u_3(x, t) = \varepsilon \alpha_{1*} \left(\frac{4k}{\sqrt{k^2 - l^2}} \sin(kx_1) \cos(lx_2) \cos(\alpha m(x_3 - t)) + \right. \\ \left. + \alpha m \frac{2l^2}{k(k^2 - l^2)} \sin(2kx_1) \sin(2\alpha m(x_3 - t)) \right) - \\ - \varepsilon^2 \frac{4(k^2 + l^2)}{\sqrt{k^2 - l^2}} \cos(kx_1) \cos(lx_2) (\cos(2\alpha m(x_3 - t)) + 1) \end{aligned} \quad (4.5)$$

5. Движение частиц жидкости. В случае сдвигового течения $\mathbf{V} = (0, 0, W(x_1, x_2))$ в основном потоке частицы движутся по прямому, параллельному оси x_3 : $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $x_3 = W(a_1, a_2)t + a_3$, где a_1 , a_2 , a_3 – лагранжевы переменные – координаты начального положения частицы. Для исследования движения частиц жидкости (или пассивной примеси) в возмущенном потоке рассмотрим систему уравнений

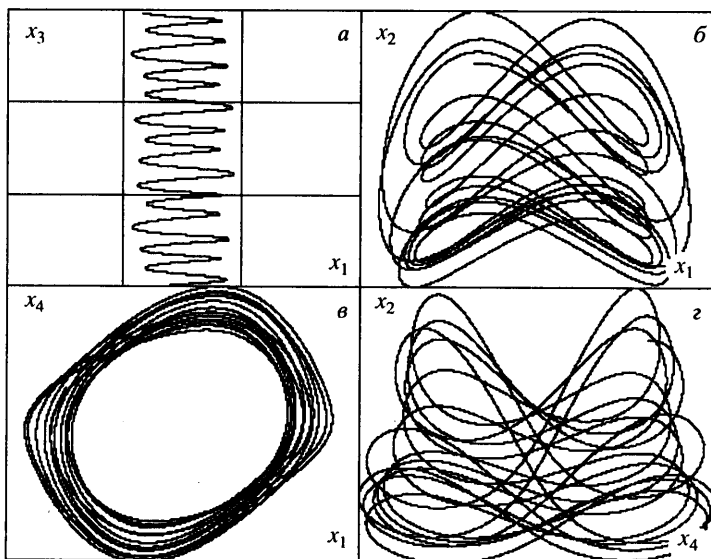
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}(x) + \mathbf{u}(x, t) \quad (5.1)$$

где в качестве основного профиля \mathbf{V} берется сдвиговое течение (4.2), а возмущения скорости \mathbf{u} , соответствующие автоколебательному режиму, находятся по формулам (4.3)–(4.5).

На фиг. 1–3 приведены траектории движения частиц жидкости при значении параметров $A = 0,5$, $k = 2$, $l = 1$, $\varepsilon = 0,1$, $\alpha = 0,2$, $m = 1$. Движение происходит в положительном направлении оси x_3 , периоды по x_1 , x_2 , x_3 равны $L_1 = \pi$, $L_2 = 2\pi$, $L_3 = 10\pi$ соответственно. Для удобства фазовое пространство (x_1, x_2, x_3) разделено на параллелепипеды периодов: каждая координатная плоскость разбита вертикальными и горизонтальными отрезками прямых на прямоугольники периодов, причем вдоль



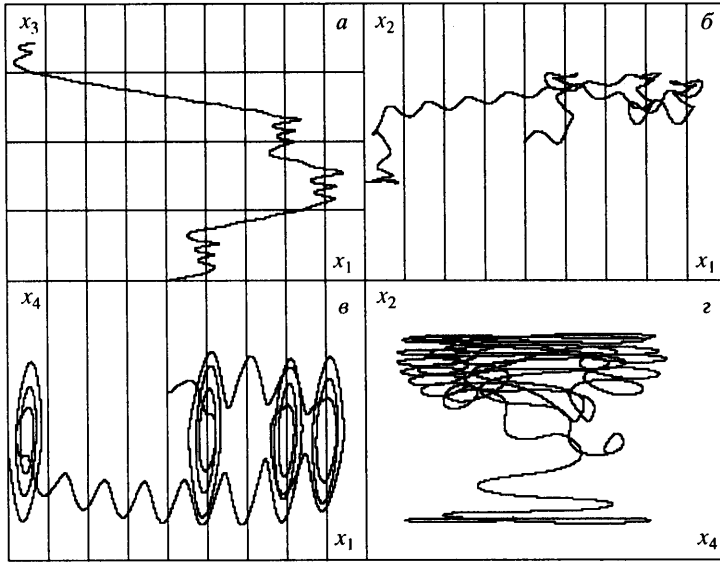
Фиг. 1. Траектории движения 16 частиц жидкости. Начальные координаты $a_2 = 1,2$ и $a_3 = -5$ у них одинаковы, а a_1 изменяется на отрезке $[-0,75; 2,25]$ с шагом $0,2$. Масштаб по осям x_1, x_2, x_3 равен $8L_1, L_2, 20L_3$



Фиг. 2. Регулярная траектория частицы. Начальные координаты $a_1 = 0,25, a_2 = 1,2, a_3 = -5$. На фиг. а масштаб по x_1, x_3 равен $3L_1$ и $30L_3$, на фиг. б, в, г масштаб по x_1, x_2 равен L_1 и $1/3L_2, x_4 \in [-12,5; 3,2]$

оси x_3 разметка произведена с шагом $10L_3$. В движущейся системе координат (x_1, x_2, x_4) , где $x_4 = x_3 - t$, уравнения (5.1) автономны.

Жидкие частицы, у которых начальные координаты a_2 и a_3 одинаковы: $a_2 = 1,2, a_3 = -5$, а координата a_1 изменяется на отрезке длиной в период L_1 (фиг. 1), обнаруживают как регулярное, так и хаотическое поведение, причем последнее является типичным. Численный эксперимент показал, что регулярным образом двигаются лишь



Фиг. 3. Хаотическая траектория частицы. Начальные координаты $a_1 = -0,75$, $a_2 = 1,2$, $a_3 = -5$. На фиг. а, б, в масштаб по x_1 , x_2 , x_3 равен $9L_1$, L_2 , $40L_3$ соответственно, $x_4 \in [-2; 16]$; на фиг. г $x_2 \in [-0,2; 3,5]$, $x_4 \in [-15; 0]$

частицы, координата a_1 которых лежит на отрезке длиной примерно в $1/10$ периода L_1 с середины в точке $0,4$, остальные ведут себя хаотически.

В регулярном случае частица совершает квазипериодическое движение, не выходя за пределы бесконечной по оси x_3 призмы, сечением которой является прямоугольник периодов со сторонами L_1 , L_2 (фиг. 2, а). Соответствующая фазовая кривая представляет собой обмотку тора (фиг. 2, б-г).

В хаотическом случае, совершив несколько колебаний в пределах одной из призм, частица покидает эту призму и перемещается в следующую, выбранную случайным образом, опять совершает колебательные движения, которые в поперечном направлении не выходят за рамки прямоугольника периодов, затем перебирается в следующую призму и т.д. (фиг. 3, а). В координатах (x_1, x_4) колебаниям соответствует движение по спиральям, характерный размер которых по оси x_1 равен L_1 , и частица хаотически движется от одной спирали к другой (фиг. 3, в). Сами же спирали располагаются либо внутри обозначенных на рисунке прямоугольников периодов, либо сдвинуты на полпериода L_1 . Тем спиральям, которые расположены внутри прямоугольников периодов, отвечает движение в отрицательном направлении оси x_2 ("гриб шляпкой вниз" в крайнем левом прямоугольнике периодов на фиг. 3, б), тем же, которые сдвинуты на полпериода, отвечает движение в положительном направлении оси x_2 (три "гриба шляпкой вверх" на фиг. 3, б). Типичная хаотическая траектория в проекции на плоскость (x_2, x_4) представлена на фиг. 3, г (сравните со случаем квазипериодического движения на фиг. 2, г). Таким образом, уже при малых надкритичностях наблюдается лагранжева турбулентность.

Заключение. Имеющаяся длинноволновая асимптотика для линейной задачи устойчивости трехмерных стационарных режимов может быть эффективно использована для расчета автоколебательных режимов, ответвляющихся при переходе через критическое значение (безразмерной) вязкости. Такие асимптотики построены, и эффективность метода продемонстрирована на серии примеров. В случае сдвиговых течений все выглядит особенно просто, в частности в асимптотике отсутствуют члены с отрицательными степенями волнового числа α .

Согласно результатам [2], в случае плоских сдвиговых течений автоколебания от- ветвляются мягко и являются устойчивыми относительно длинноволновых возму- щений. Однако в трехмерном случае даже для параллельных стационарных течений $(0, 0, W(x_1, x_2))$, а тем более для общих течений, рассмотренных выше, возможны как мягкая, так и жесткая неустойчивости.

Асимптотика вторичного автоколебательного режима применима для исследова- ния движения частиц (распространения пассивной примеси) на конечных, но больших временах – порядка $1/\varepsilon$, $\varepsilon = \sqrt{v_c - v}$, $v = 1/Re$, если учитываются лишь главные члены асимптотики. В случае сдвиговых течений компьютерный эксперимент обнаруживает области регулярного, квазипериодического движения с двумя частотами, а также об- ласти хаотического перемешивания жидких частиц.

Представляется интересным продолжить на основе предлагаемой методики исследо- вание длинноволновой лагранжевой турбулентности, порождаемой различными вторичными режимами.

Авторы благодарят М.Ю. Жукова и О.А. Цывенкову за предоставление их про- граммы расчета фазовых траекторий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаменталь- ных исследований (код проекта 99-01-01023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдович В.И. О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений // Численные методы решения задач математической физики. М.: Наука, 1966. С. 242–249.
2. Юдович В.И. Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 32–35.
3. Буссе Ф. Магнитная гидродинамика земного динамо // Вихри и волны. М.: Мир, 1984. С. 199–233.
4. Ghil M., Childress S. Atmospheric dynamics, dynamo theory, and climate dynamics: Topics in Geophysical Fluid Dynamics. N.Y. etc.: Springer, 1987. 485 p.
5. Юдович В.И. Длинноволновая асимптотика в кинематической проблеме динамо. Ростов н/Д.: Ростов. ун-т, 1986. 18 с. – Деп. в ВИНТИ 16.12.86. № 8608-B86. 18 с.
6. Юдович В.И. Неустойчивость длинноволновых течений вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 4. С. 31–35.
7. Ревина С.В., Юдович В.И. Длинноволновая асимптотика трехмерных вторичных авто- колебаний на сдвиговых течениях // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. 4-й Междунар. конф. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 1999. Т. 2. С. 140–144.
8. Мелехов А.П., Ревина С.В. // Длинноволновая асимптотика двумерных вторичных автоколе- баний на стационарных пространственно-периодических течениях. М., 1999. 30 с. – Деп. в ВИНТИ 27.07.99. № 2438-B99.
9. Ревина С.В., Юдович В.И. Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости пространственно-периодических трехмерных течений вязкой жидкости относительно длин- новолновых возмущений. Ч. 1. М., 1999. 31 с. – Деп. в ВИНТИ 19.08.99. № 2678-B99.
10. Юдович В.И. Возникновение автоколебаний в жидкости // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 4. С. 638–655.
11. Юдович В.И. Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 3. С. 450–459.
12. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991. 235 с.
13. Zaslavsky G.M. Physics of Chaos in Hamiltonian Systems. London: ICP, 1998. 269 p.
14. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 368 с.