МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2001

УДК 532.5.013.4:536.25

© 2001 г. А.В. ГОРЕЛИКОВ, П.Т. ЗУБКОВ, Д.А. МОРГУН

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ ВОДЫ ВБЛИЗИ ЭКСТРЕМУМА ПЛОТНОСТИ В КВАДРАТНОЙ ПОЛОСТИ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ВЕРХНЕЙ СТЕНКОЙ

В широком диапазоне значений числа Грасгофа проведено численное исследование смешанной конвекции холодной воды в квадратной полости с движущейся верхней границей. Исследовалась эволюция стационарных решений при изменении скорости движения верхней стенки.

В настоящее время существует большое количество работ, посвященных изучению смешанной конвекции. Например, в работах [1, 2] проводились исследования жидкостей, у которых зависимость плотности от температуры линейна. Однако существует ряд жидкостей с нелинейной зависимостью плотности от температуры. Примером такой жидкости является вода, которая имеет максимум плотности вблизи 4°C. Многочисленные исследования (например, [3–6]) показывают, что эффект инверсии плотности значительно усложняет структуру конвективных течений и в некоторых случаях приводит к тому, что становится возможным существование нескольких стационарных решений при одних и тех же граничных условиях.

Таким образом, представляет интерес исследование смешанной конвекции в жидкости с экстремумом плотности.

В данной работе представлены результаты численного исследования смешанной конвекции холодной воды в квадратной полости с движущейся верхней стенкой. Разностный аналог уравнений гидродинамики получен с помощью метода контрольных объемов. Для решения системы уравнений используется алгоритм SIMPLER [7]. Стационарные решения получены методом установления.

Проведенная предварительно проверка на численную сходимость (сравнивались сетки 39 × 39 и 91 × 91) показала, что сетки 39 × 39 вполне достаточно для качественного анализа данной задачи. Сравнение результатов тестовых расчетов с данными работы [1] показывает хорошее качественное и количественное совпадение (в частности, средние безразмерные тепловые потоки различались не более чем на 0,5%).

1. Постановка задачи. Рассматривается стационарная смешанная конвекция холодной воды в квадратной ячейке при движущейся верхней стенке. Вертикальные стенки ячейки теплоизолированы, верхняя и нижняя стенки поддерживаются при постоянных температурах $T_1 = T_m - T_0$ и $T_2 = T_m + T_0$ соответственно (T_m = 4,0293°C, $|T_0| \leq T_m$).

Предполагалось, что: жидкость несжимаема и ее течение двумерно и ламинарно; теплофизические свойства постоянны; справедливо приближение, подобное приближению Буссинеска, но зависимость плотности от температуры нелинейная; пренебрежимо малы изменения температуры, обусловленные выделением тепла, связанным с диссипацией энергии путем внутреннего трения. В качестве уравнения состояния использовалось соотношение

$$\rho = \rho_m(1 - \beta|T - T_m|^b), \quad \beta = 9{,}297173 \cdot 10^{-6}(°C)^{-b}, \quad b = 1{,}894816,$$
$$\rho_m = 999{,}972 \cdot \text{kg/m}^3$$

где ρ_m есть максимум плотности при температуре T_m [5].

С учетом сделанных допущений система уравнений, моделирующая смешанную конвекцию в холодной воде, в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{D\mathbf{U}}{D\tau} = -\nabla P + \Delta\mathbf{U} + \mathrm{Gr}\,|\Theta|^b\,\mathbf{e}_g; \quad \nabla\mathbf{U} = 0; \quad \frac{D\Theta}{D\tau} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta\Theta$$

$$\mathrm{Gr} = g\beta L^3\frac{(T_2 - T_1)}{\nu^2}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \mathbf{e}_g = (0,1)$$

$$X = \frac{x}{L}, \quad U = \frac{uL}{\nu}, \quad \tau = \frac{t\nu}{L^2}, \quad \Theta = \frac{T - T_m}{T_2 - T_1}, \quad P = \frac{(p + \rho_m gLY)L^2}{\rho_m\nu^2}$$

Здесь X, Y – безразмерные прямоугольные координаты, U, V – горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости, P – конвективная составляющая давления, τ – безразмерное время, Θ – температура, L – сторона полости, ν – кинематическая вязкость, Gr – число Грасгофа, Pr – число Прандтля, α – коэффициент температуропроводности.

Безразмерные граничные условия имеют вид

$$X = 0;\ X = 1:\ U = V = 0, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial X} = 0$$

$$Y = 0:\ U = V = 0, \quad \Theta = 0{,}5$$

$$Y = 1:\ U = \mathrm{Re}, \quad V = 0, \quad \Theta = -0{,}5$$

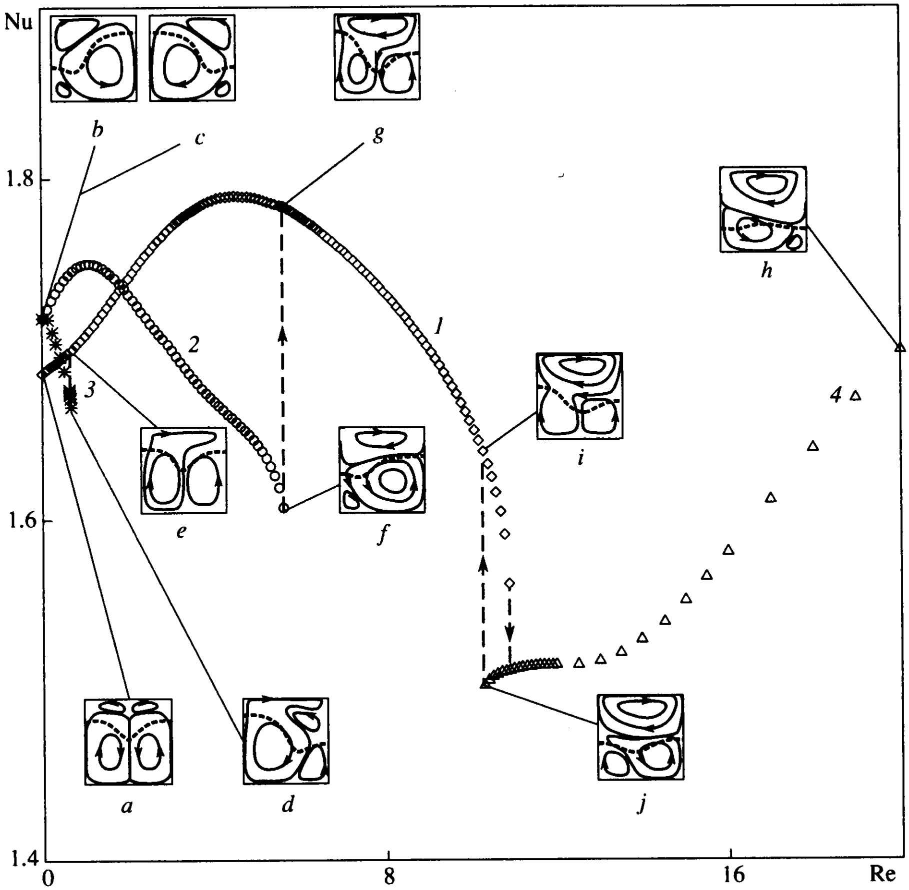
Здесь Re – число Рейнольдса. Среднее число Нуссельта в стационарном состоянии определяется соотношением

$$\mathrm{Nu} = -\int_0^1\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right)_{Y=i} dX \quad (i = 0 \text{ или } 1)$$

2. Анализ результатов. В представленной работе была проведена серия численных экспериментов для Gr = $3{,}5\cdot10^3$, $4\cdot10^3$, $4{,}5\cdot10^3$, $5\cdot10^3$, $5{,}5\cdot10^3$, 10^4, $1{,}5\cdot10^4$, $2\cdot10^4$, $3\cdot10^4$, в которых исследовалось влияние скорости движения верхней границы ($0 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 300$) на структуру стационарных смешанно-конвективных течений и теплообмен в холодной воде при фиксированном значении числа Прандтля (Pr = = 11,59).

Для чисел Грасгофа $3{,}5\cdot10^3 \leqslant \mathrm{Gr} \leqslant 5{,}5\cdot10^3$ в случае только естественной конвекции (Re = 0) возможно существование четырех различных типов стационарных решений [6]. Тип стационарного решения зависит от начальных условий, в частности от начального распределения температуры. Пронумеруем типы решений следующим образом: 0 – $\Theta_0 = 0$; 1 – $\Theta_0 = -0{,}5$; 2 – $\Theta_0 = X - 0{,}5$; 3 – $\Theta_0 = 0{,}5 - X$). В настоящей работе эти четыре типа стационарных решений используются в качестве начальных условий для первых численных экспериментов. Далее при увеличении числа Рейнольдса в качестве начальных условий берутся стационарные решения, полученные для предыдущего (меньшего) значения числа Рейнольдса. Решение 0-го типа неустойчиво и при движущейся стенке сразу же переходит на решение, соответствующее 3-му типу начального условия.

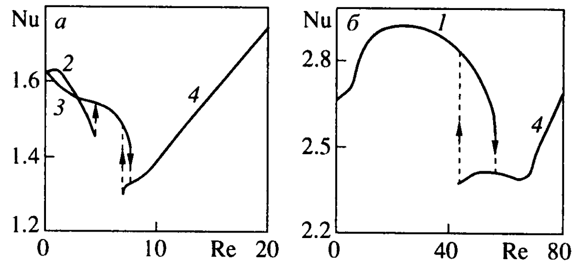
На фиг. 1 показана зависимость среднего числа Нуссельта Nu в стационарном состоянии от Re для Gr = $5\cdot10^3$ (при Gr = $4{,}5\cdot10^3$, $5{,}5\cdot10^3$ зависимость имеет тот же характер). В случае Gr = $4{,}5\cdot10^3$, $5\cdot10^3$, $5{,}5\cdot10^3$ при естественной конвекции устойчивыми являются три типа стационарных решений [6] (см. схематичные картины течений *a*, *b*, *c* на фиг. 1 в точке Re = 0). В соответствии с результатами расчетов для данных чисел Грасгофа при небольших значениях Re каждому типу начальных условий соответствует свое стационарное решение (ветви *1–3* на фиг. 1), т.е. начальные условия при Re = 0 непрерывным образом трансформируются в ста-



Фиг. 1. Зависимость Nu(Re) для Gr = $5 \cdot 10^3$. Кривые *1–3* соответствуют стационарным решениям первого, второго и третьего типов (схемы *a, b, c*) при Re = 0. Приведены схематичные изображения функции тока (схемы *a–j*), на которые штриховой линией нанесена изотерма, соответствующая экстремуму плотности

ционарные решения при Re > 0. Тепловой поток, соответствующий стационарным решениям ветви *3*, падает по мере увеличения числа Рейнольдса (фиг. 1); это связано с тем, что движение в верхней грани ячейки происходит в сторону, противоположную первоначальному (при Re = 0) направлению движения жидкости у верхней границы. Далее, по мере увеличения значения Re стационарные решения ветви *3* становятся неустойчивыми и скачком переходят на ветвь *1* (схемы *d, e* на фиг. 1).

Тепловые потоки, соответствующие стационарным решениям ветвей *1*, *2*, до определенных значений числа Рейнольдса растут. Это обусловлено интенсификацией течений в верхней части полости, где распределение температуры относительно "устойчиво" ($\Theta < 0$). Дальнейшее увеличение значения Re приводит к тому, что течение в верхнем вихре становится более интенсивным и размеры вихря увеличиваются. Как следствие уменьшаются вертикальные размеры области с "неустойчивым" распределением температуры ($\Theta > 0$), т.е. изотерма $\Theta = 0$, соответствующая экстремуму плотности, опускается. Это влечет за собой уменьшение интенсивности течений в нижней части полости, основным механизмом которых является естественная конвекция. Рассмотренный выше процесс приводит к тому, что в определенном диапазоне Re поток тепла, протекающего через ячейку, уменьшается (фиг. 1).



Фиг. 2. Зависимость Nu(Re) для $Gr = 4 \cdot 10^3$ (*а*) и $Gr = 1{,}5 \cdot 10^4$ (*б*)

При дальнейшем увеличении значения числа Рейнольдса стационарные решения ветви *2* становятся неустойчивыми и скачком переходят на ветвь *1* (схемы *f, g* на фиг. 1). При еще большем увеличении Re решения ветви *1* также становятся неустойчивыми и "падают" на ветвь *4*. Структура решений, соответствующих ветви *4* (схема *h* на фиг. 1), подобна структуре решений ветви *2*, т.е. один основной вихрь в нижней "неустойчивой" области и один вихрь в верхней "устойчивой" области ячейки. На ветви *4* основными механизмами переноса тепла становятся вынужденная конвекция в верхней части полости и теплопроводность в нижней части; естественная конвекция делается все менее интенсивной по мере увеличения числа Рейнольдса. Как следствие этого тепловой поток возрастает при увеличении значения числа Рейнольдса.

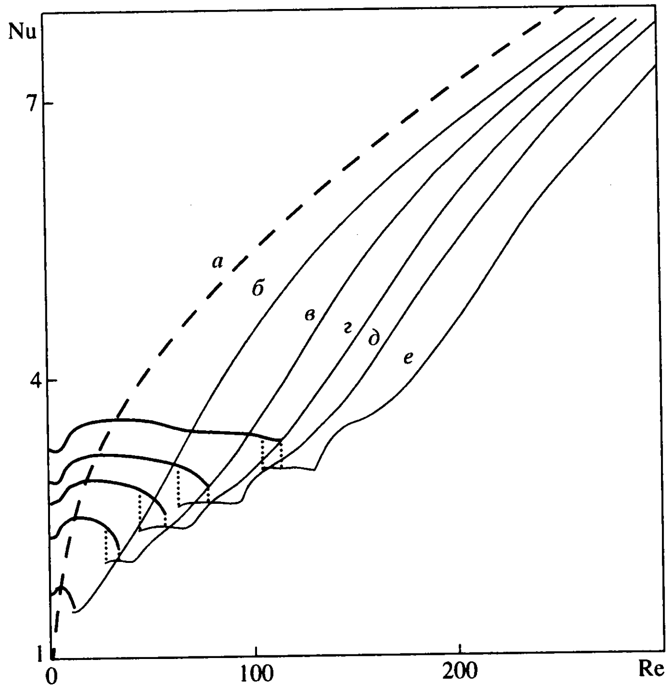
Во всех рассмотренных выше численных экспериментах в качестве начального приближения бралось стационарное решение, полученное для предыдущего (меньшего) значения числа Рейнольдса ("прямой ход"). В определенном интервале значений числа Рейнольдса (например: $10{,}3 < Re < 10{,}9$ для $Gr = 5 \cdot 10^3$) альтернативный тип стационарного решения удалось получить, поступая наоборот, т.е. в качестве начального приближения бралось стационарное решение, полученное для большего значения числа Рейнольдса ("обратный ход"). Таким образом, имеет место своеобразный гистерезис (фиг. 1, область разрывов ветвей *1* и *4*, схемы *i, j*).

При $Gr = 3{,}5 \cdot 10^3$, $4 \cdot 10^3$ в случае естественной конвекции, устойчивыми являются только второй и третий типы стационарных решений, которые и были взяты в качестве начальных условий для первых численных экспериментов. На фиг. 2, *а* представлены зависимости Nu(Re) для $Gr = 4 \cdot 10^3$ (для $Gr = 3{,}5 \cdot 10^3$ зависимость имеет тот же характер). В данном случае взаимодействие естественной и смешанной конвекции также приводит к тому, что зависимость Nu(Re) для каждой ветви имеет сложный, немонотонный характер и также существует область гистерезиса.

Более простая ситуация возникает при $Gr = 10^4$, $1{,}5 \cdot 10^4$, $2 \cdot 10^4$, $3 \cdot 10^4$. В данном случае изначально, т.е. при $Re = 0$, существует лишь один устойчивый тип стационарного решения – 1-й. Зависимость Nu(Re) при $Gr = 1{,}5 \cdot 10^4$ представлена на фиг. 2, *б*. Следует отметить, что гистерезис и в данном случае имеет место.

Сопоставив результаты вычислений для различных значений чисел Gr и Re, можно сделать несколько общих замечаний.

В случае чисто вынужденной конвекции ($Gr = 0$) (фиг. 3) зависимость Nu(Re) монотонно возрастает. Для последовательности чисел Gr, рассматриваемой в данной работе, зависимость Nu(Gr) в случае естественной конвекции ($Re = 0$) также монотонно возрастает. Однако в случае смешанной конвекции зависимость Nu(Re) существенно немонотонна, т.е. существуют ярко выраженные максимумы и минимумы (фиг. 3). Таким образом, в некоторых случаях увеличение Re приводит к снижению среднего теплового потока через ячейку. В частности, при $Gr = 2 \cdot 10^4$ и $Re = 63{,}0$ средний тепловой поток через ячейку уменьшается на 8,95% по сравнению с естественной конвекцией при том же Gr.



Фиг. 3. Эволюция зависимости Nu(Re) с увеличением числа Грасгофа. Приведены кривые типа 1 (жирные линии) и 4 (тонкие линии) для Gr: 0 (*а*), $5 \cdot 10^3$ (*б*), 10^4 (*в*), $1{,}5 \cdot 10^4$ (*г*), $2 \cdot 10^4$ (*д*), $3 \cdot 10^4$ (*е*). Область гистерезиса обозначена пунктирными линиями

Зависимость Nu(Re) для различных значений Gr в некотором смысле подобна. Объяснить это можно следующим образом. С увеличением Gr увеличивается влияние естественной конвекции и, как следствие этого, режим преобладающего действия вынужденной конвекции наступает при более высоких значениях Re, что приводит к растяжению кривой *1* (фиг. 3, жирные линии). Смещение кривых Nu(Re) вверх по оси Nu объясняется тем, что для рассмотренной последовательности Gr зависимость Nu(Gr) при Re = 0 возрастающая.

Заключение. В диапазоне чисел Грасгофа ($3{,}5 \cdot 10^3 \leqslant \mathrm{Gr} \leqslant 4 \cdot 10^4$) и Рейнольдса ($0 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 300$) получены стационарные решения задачи о смешанной конвекции воды вблизи точки экстремума плотности в квадратной ячейке с движущейся верхней границей. Задачи смешанной конвекции холодной воды обладают более богатым и сложным набором стационарных решений по сравнению с аналогичными задачами естественной и вынужденной конвекций. Взаимное влияние естественной и вынужденной конвекций может приводить как к уменьшению, так и к увеличению среднего теплового потока через ячейку. Для каждого числа Gr существуют скорости Re, при которых наблюдаются локальные экстремумы теплового потока. Установлено, что в рассмотренной задаче в определенных интервалах значений числа Re существуют области гистерезиса стационарных решений.

В полости, заполненной водой вблизи точки инверсии плотности, существуют две области – с устойчивым и неустойчивым распределением температуры. В рассмотренной задаче это приводит к тому, что при одних и тех же граничных условиях существуют различные по своей структуре стационарные решения и имеет место явление гистерезиса. В жидкостях с монотонной зависимостью $\rho(T)$ ситуация в рамках данной задачи несколько проще и более предсказуема. Расчеты показывают, что ветвление стационарных решений если и наблюдается, то при небольших Re (например, Re < 2 для Gr = 2,5 $\cdot$ 10^3). С увеличением Re остается лишь один тип стационарного решения (один основной вихрь с центром в середине ячейки), при этом зависимость Nu(Re) монотонно возрастающая.

В трехмерной постановке структура решений многих задач конвекции радикально изменяется по сравнению с двумерной постановкой [8]. Возможно, это отчасти справедливо и для представленной задачи (в случае, когда влияние вынужденной конвекции незначительно). В том случае, когда влияние вынужденной конвекции достаточно велико, структура течения, по всей видимости, будет квазидвумерной и, следовательно, эффекты, обнаруженные в данной работе, возможно, будут присутствовать и в трехмерном случае. Естественно, сказанное выше – лишь предположение, и вопрос о стационарных решениях задачи о конвекции в трехмерной полости с движущейся верхней границей требует дополнительного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Moallemi M.K., Jang K.S.* Prandtl number effects on laminar mixed convection heat transfer in a lid-driven cavity // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1992. V. 35. № 8. P. 1881–1892.
2. *Iwatsu R., Hyun J.M.* Three-dimensional driven-cavity flows with a vertical temperature gradient // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1995. V. 38. № 18. P. 3319–3328.
3. *Wei Tong, Koster J.N.* Density inversion effect on transient natural convection in a rectangular enclosure // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1994. V. 37. № 6. P. 927–938.
4. *Ho C.J., Chiou S.P., Hu C.S.* Heat transfer characteristics of a rectangular natural circulation loop containing water near its density extreme // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1997. V. 40. № 15. P. 3553–3558.
5. *Gebhart B., Mollendorf J.* A new density relation for pure and saline water // Deep-Sea Res. 1977. V. 24. № 9. P. 831–848.
6. *Зубков П.Т., Климин В.Г.* Численное исследование естественной конвекции чистой воды вблизи точки инверсии плотности // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 4. С. 171–176.
7. *Патанкар С.* Численные методы задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.
8. *Родионов С.П.* Естественная конвекция воды в нагреваемой снизу замкнутой трехмерной прямоугольной полости вблизи точки инверсии плотности // Тр. 2-й Рос. нац. конф. по теплообмену. М.: МЭИ, 1998. Т. 3. С. 136–140.

Сургут

Поступила в редакцию
10.IV.2000