

УДК 533.6.011.8+535.211

© 2001 г. А.Н. КУЧЕРОВ

СИЛЬНОЕ САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА В ПРОДОЛЬНОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Метод приближенного описания распространения интенсивного оптического пучка с помощью средних поперечных размеров и смещений центра тяжести расширен на ситуации продольного обтекания газом лазерного пучка. Задача сводится к интегрированным дифференциальным уравнениям для средних радиусов. Получены решения уравнений аэрооптики в случае сильного теплового самовоздействия вертикального пучка в условиях развитой гравитационной конвекции и в случае сильного теплового самовоздействия пучка в продольном однородном потоке газа, включая большие сверхзвуковые скорости. Показано удовлетворительное соответствие численным решениям. Для плоского пучка в продольном потоке получено аналитическое решение в квадратурах.

В общем случае распространение лазерного пучка в потоке поглощающего газа описывается системой уравнений газодинамики [1] и параксиальным (параболическим, малоугловым) уравнением оптики [2]. В задачах нелинейной аэрооптики, в частности в проблеме теплового самовоздействия лазерного пучка в слабо поглощающих газах и жидкостях, важную роль играют приближенные методы ввиду большого количества возможных ситуаций и вариантов численных решений. На расстояниях вдоль пучка, меньших длин теплового самовоздействия, поглощения и дифракционной длины, получено приближенное решение уравнений параксиальной оптики [3–5] при распространении пучка в невязком нетеплопроводном газе без учета акустических возмущений. С помощью преобразования координат, учитывающего изменения поперечного размера пучка в вакууме [6], и преобразования подобия в уравнениях гидродинамики получены приближенные решения для широкого круга задач аэрооптики при слабом самовоздействии [7].

В случае сильного самовоздействия, рассматриваемого в настоящей работе, численное решение задачи затруднено из-за больших поперечных градиентов и сложности применения достаточно мелкой сетки для построения точного решения. Во многих ситуациях экспериментальные данные [8, 9] и численные решения [3, 10–12] свидетельствуют о квазиустановлении характеристик возмущения пучка (пика, его смещения, формы распределения интенсивности) в области сильного самовоздействия.

В предположении постоянства формы поперечного распределения интенсивности, при аппроксимации волнового фронта полиномом второго порядка, получены аналитические решения, описывающие эффект сильного самовоздействия в случае поперечного обдува с дозвуковой, околосзвуковой, сверхзвуковой скоростями, а также в случае гравитационной конвекции в горизонтальном лазерном пучке [13]. Все рассмотренные ситуации, включая теплопроводный режим и покоящийся газ, сводятся к одному классу обыкновенных дифференциальных уравнений (или системы уравнений) второго порядка для средних поперечных размеров (радиусов) и смещений центра тяжести распределения интенсивности.

В настоящей работе изучается эффект теплового самовоздействия в случае продольного обтекания лазерного пучка и в случае гравитационной конвекции в верти-

кальном лазерном пучке. Эти варианты описываются интегродифференциальными уравнениями для средних радиусов. Последние сводятся к стандартным системам обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых не составляет особого труда.

1. Постановка задачи. Уравнения нелинейной аэрооптики включают в себя обезразмеренные уравнения гидродинамики [1] и уравнения оптики [2]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + Eu \nabla p = -\frac{\mathbf{e}_z}{Fr} (1 + Q\rho_1) + \frac{1}{Re} \Delta' \mathbf{V} \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{dT}{dt} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{d\rho}{dt} + QI(x, y, z, t) + \frac{1}{Pe} \Delta' T \quad (1.3)$$

$$p = \rho T \quad (1.4)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + (\mathfrak{D}, \nabla_{\perp}) \right] \mathfrak{D} = N \nabla_{\perp} \rho_1 + \frac{1}{4F^2} \nabla_{\perp} \left\{ \frac{\nabla_{\perp}^2 I}{I} - \frac{(\nabla_{\perp} I, \nabla_{\perp} I)}{2I^2} \right\} \quad (1.5)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + (\mathfrak{D}, \nabla_{\perp}) \right] \ln I + (\nabla_{\perp}, \mathfrak{D}) = -N_{\alpha} \quad (1.6)$$

$$Eu = \frac{p_0}{\rho_0 V_L^2} = \frac{1}{\kappa M^2}, \quad Fr = \frac{V_L^2}{Lg}, \quad Re = \frac{r_0^2}{\nu \tau}, \quad Pe = \frac{r_0^2}{\chi \tau} = Pr Re, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}$$

$$F = \frac{2\pi r_0^2}{\lambda L}, \quad N = \left(\frac{L}{z_T} \right)^2, \quad z_T = \frac{r_0}{\sqrt{Q(n_0 - 1)/n_0}}, \quad Q = \frac{\alpha P_0 \tau}{\pi r_0^2 \rho_0 C_p T_0}, \quad N_{\alpha} = \alpha L$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{L}{r_0} \left[iu \frac{\partial}{\partial x} + jv \frac{\partial}{\partial y} \right] + kw \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{r_0}{L} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\mathfrak{D} = \nabla_{\perp} \Phi, \quad \nabla_{\perp} = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y}$$

Координата z отнесена к длине трассы L , поперечные координаты x, y – к характерному (начальному) радиусу пучка r_0 , плотность ρ , температура T , давление p отнесены к постоянным начальным значениям ρ_0, T_0, p_0 , скорость V – к некоторому характерному значению V_L , угол ϑ отклонения излучения от оси z – к r_0/L , интенсивность I – к $I_0 = P_0/\pi r_0^2$ (где P_0 – полная начальная мощность пучка). Угол отклонения \mathfrak{D} есть градиент возмущенной фазы излучения Φ .

В уравнения (1.5), (1.6) входят оптические параметры подобия: $F \gg 1$ – число Френеля, λ – длина волны излучения; $N_{\alpha} \ll 1$ – параметр поглощения излучения, α – коэффициент поглощения излучения средой; $N \gg 1$ – параметр самовоздействия (z_T – длина теплового самовоздействия, Q – масштаб возмущения температуры и плотности среды, C_p, n_0 – теплоемкость при постоянном давлении и показатель преломления в невозмущенной среде, τ – время установления процесса нагрева среды). Показатель преломления n связан с изменениями плотности (температуры) среды: $n = n_0 + (n_0 - 1)\Delta\rho/\rho_0$; $n_0 = 1 + 3 \cdot 10^{-4} \rho/\rho_s$; $\rho_s = 1,225 \text{ кг/м}^3$; $\Delta\rho/\rho_0 = Q\rho_1$. Функция возмущения плотности ρ_1 находится из уравнений гидродинамики (1.1)–(1.4), которые включают

гидродинамические параметры подобия: Re – число Рейнольдса, Pe – число Пекле (или $Pg = Pe/Re$ – число Прандтля), Fr – число Фруда, Eu – число Эйлера (связанное с числом Маха $M = V_L/c$, где $c = \sqrt{(\kappa p_0 / \rho_0)}$ – скорость звука в невозмущенном газе). В уравнениях гидродинамики (1.2), (1.3) ν , χ , κ – коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и постоянная адиабаты.

Рассмотрим следующие случаи: 1) продольный обдув с постоянной скоростью $V_L = w_0$ вдоль оси z (время установления $\tau = L/w_0$) и 2) установившаяся гравитационная конвекция в вертикальном пучке вдоль оси z с характерной скоростью $V_L = w_g$ ($\tau = L/w_g$). Для продольного обдува ниже определим газодинамические режимы самовоздействия. В случае гравитационной конвекции в вертикальном пучке режимы определены в [12, 14].

В режиме развитой (сильной) конвекции приравнивание величины Q числу Фруда Fr дает масштабы скорости w_g и возмущения плотности $Q = Q_v$ (см. разд. 5). Число Маха $M = w_g/c \ll 1$ мало в случае гравитационной конвекции. Примем, что числа Рейнольдса и Пекле велики: $Re \gg 1$, $Pe \gg 1$. Вязкостью и теплопроводностью пренебрегаем. Пренебрегаем также дифракционной поправкой порядка $F^{-2} \ll 1$ и поправкой на ослабление излучения за счет поглощения порядка $N_\alpha \ll 1$. В вариантах, рассматриваемых в настоящей работе, уравнения аэрооптики содержат только один параметр подобия – параметр теплового самовоздействия N . Остальные эффекты – вязкость, теплопроводность, дифракционное расширение, ослабление излучения за счет поглощения – можно учесть как малые поправки порядка Re^{-1} , Pe^{-1} , F^{-2} , N_α и т.д. Рассмотрим симметричный плоский (двумерный) и осесимметричный трехмерный пучок, но отметим, что метод применим в общем случае несимметричного пучка.

Как и в [13], введем преобразования координат, аналогичные преобразованиям растяжения (сжатия) [6] для сфокусированного (дефокусированного) пучка

$$\xi = \frac{x - x_c(z)}{a_x(z)}, \quad a_x(z) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \int (x - x_c)^2 q dx dy}, \quad x_c(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int x q dx dy$$

$$\eta = \frac{y - y_c(z)}{a_y(z)}, \quad a_y(z) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \int (y - y_c)^2 q dx dy}, \quad y_c(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int y q dx dy$$

$$q(x, y, z) = \frac{I(x, y, z)}{W}, \quad W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int I dx dy$$

Здесь $x_c(z)$, $y_c(z)$ – смещения центра тяжести распределения интенсивности пучка. В общем случае несимметричного пучка поперечные размеры описываются двумя средними радиусами $a_x(z)$, $a_y(z)$. В симметричном пучке смещение равно нулю. Средний радиус равен

$$a(z) = \sqrt{\int_{\xi_0}^{\infty} r^2 q(r, z) (2\pi r)^k dr}, \quad W(z) = \int_{\xi_0}^{\infty} I (2\pi r)^k dr \quad (1.7)$$

где $k = 0, 1$; $\xi_0 = -\infty; 0$; $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$; $r = x$ для плоского и осесимметричного случаев. Интенсивность пучка представим соответственно в виде

$$I(x, y, z) = \frac{f(\xi, \eta)}{a_x(z)a_y(z)}$$

или (симметричный пучок)

$$I(r, z) = \frac{f(\xi)}{a^{1+k}(z)}, \quad \xi = \frac{r - x_c^{1-k}(z)}{a(z)} \quad (1.8)$$

Предполагаем, что вид (форма) функции распределения интенсивности пучка $f(\xi, \eta)$ остается неизменным вдоль трассы. Функцию фазы излучения Φ аппроксимируем полиномом второго порядка [15]

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = & c_0 + (x - x_c(z))c_{1x} + (y - y_c(z))c_{1y} + (x - x_c)^2 \frac{c_{2x}}{2} + \\ & + (y - y_c)^2 \frac{c_{2y}}{2} + (x - x_c)(y - y_c)c_{xy} \\ c_{1x}(z) = & \frac{dx_c}{dz}, \quad c_{1y} = \frac{dy_c}{dz}, \quad c_{2x}(z) = \frac{1}{a_x(z)} \frac{da_x}{dz}, \quad c_{2y}(z) = \frac{1}{a_y(z)} \frac{da_y}{dz}, \quad c_{xy} = 0 \end{aligned}$$

Для осесимметричного и плоского пучка имеем соответственно

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) = & c_0 + r^2 \frac{c_2}{2}, \quad c_2(z) = \frac{1}{a(z)} \frac{da}{dz} \quad (1.9) \\ \Phi(x, z) = & c_0 + (x - x_c(z))c_1 + (x - x_c)^2 \frac{c_2}{2}, \quad c_1(z) = \frac{dx_c}{dz}, \quad c_2(z) = \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \end{aligned}$$

Напомним связь комплексной функции поля u с интенсивностью $uu^* = I$ и фазой $u = \sqrt{I} \exp(iF\Phi)$.

2. Режимы теплового самовоздействия в продольном потоке газа. Пусть однородный равномерный поток, имеющий скорость w_0 , направлен по оси распространения пучка z . Действием гравитации пренебрегаем, $g \equiv 0$ или $Fr \gg 1$. Длину трассы L примем равной длине теплового самовоздействия $L = z_T$ или $N \equiv 1$, так как при этом возмущения интенсивности и фазы пучка, согласно (1.5), (1.6), будут порядка невозмущенных первоначальных величин. Из выражения для

$$Q = \frac{\alpha P_0 \tau}{\pi r_0^2 \rho_0 C_p T_0}$$

и определения длины теплового самовоздействия

$$z_T = \frac{r_0}{\sqrt{Q(n_0 - 1)/n_0}}$$

с учетом $\tau = L/w_0 = z_T/w_0$ находим

$$z_T = \frac{r_0}{[Q_{\perp}(n_0 - 1)/n_0]^{1/3}}, \quad Q_{\perp} = \frac{\alpha P_0}{\pi r_0 \rho_0 C_p T_0 w_0} \quad (2.1)$$

где Q_{\perp} есть масштаб возмущения плотности при поперечном обдуве пучка потоком газа со скоростью $u_0 = w_0$ и характерным временем установления $\tau = r_0/w_0$ [13]. На трассе длиной $L = z_T$ масштаб возмущения газодинамических величин Q равен

$$Q = \frac{\alpha P_0 L}{\pi r_0^2 \rho_0 C_p T_0 w_0} = \frac{Q_{\perp}^2}{[(n_0 - 1)/n_0]^{1/3}} \quad (2.2)$$

Стационарные решения для газодинамических величин, учитывая уравнение сохранения массы (1.1), ищем в виде

$$\begin{aligned} \rho = & 1 + Q\rho_1 + \dots, \quad u = Q(r_0/L)u_1 + \dots, \quad T = 1 + QT_1 + \dots, \\ w = & 1 + Qw_1 + \dots, \quad p = 1 + Qp_1 + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Параметр малости Q и величину скорости w_0 для различных режимов определим, приравнявая конвективные члены к вязким и теплопроводным или к градиенту дав-

ления, а также к величине источника тепловыделения. Последняя в безразмерном виде есть параметр Q , как это видно из уравнения сохранения энергии (1.3).

Конвекция в (1.3) соизмерима с теплопроводностью при скорости w_0 такой, что $Re = r_0^2 / \chi \tau = w_0 r_0^2 / L \chi \sim 1$. Определим верхнюю по скорости границу теплопроводного режима при $Re = 1$ или $\tau = r_0^2 / \chi$, $w_0 = L \chi / r_0^2$. При $L = z_T$ имеем

$$w_0 = V_T \equiv \left(\frac{\chi}{r_0} \right)^{3/2} \left[\frac{\pi \rho_0 C_p T_0 n_0 r_0}{\alpha P_0 (n_0 - 1)} \right]^{1/2}, \quad Q = \frac{\alpha P_0}{\pi \chi \rho_0 C_p T_0} \quad (2.4)$$

$$z_T = \left[\frac{\pi r_0^2 \rho_0 C_p \chi T_0 n_0}{\alpha P_0 (n_0 - 1)} \right]^{1/2}$$

Обычно V_T значительно меньше скорости звука. При малых числах Маха $M = w_0/c \ll 1$ возмущения давления, как это следует из уравнения сохранения импульса (1.2), меньше по порядку величины возмущений температуры и плотности, т.е. $p_1 \equiv 0$.

Из уравнения состояния (1.4) следует, что $\Delta \rho / \rho_0 \approx -\Delta T / T_0$ или $\rho_1 = -T_1$. Уравнение для главного члена возмущения плотности (температуры) есть уравнение теплопроводности с распределенным источником тепла

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \rho_1}{\partial r} - I(r, z) \quad (2.5)$$

Аналогом времени является продольная координата z .

Определим при $w_0 \gg V_T$ конвективный режим самовоздействия, в котором главный член возмущения плотности (температуры) $\rho_1 = -T_1$ описывается уравнением переноса

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial z} = -I(r, z) \quad (2.6)$$

Заметим, что конвективный режим имеет место и при больших значениях скорости таких, что $M \sim 1$, так как возмущения давления по порядку величины меньше, чем возмущения температуры и плотности. Действительно, подставляя разложения (2.3) в уравнение сохранения поперечной компоненты импульса (1.2), находим

$$\frac{1}{\chi M^2} \frac{\partial p_1}{\partial r} = 0, \quad p_1|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0; \quad p_1 = p_1(z) \equiv 0 \quad (2.7)$$

Рассмотрим случай больших значений скорости потока таких, что $M^2 = z_T / r_0 \gg 1$. В этом неизобарном (гиперзвуковом) режиме длина теплового самовоздействия z_T , масштаб возмущения газодинамических величин Q , скорость потока w_0 и время установления τ равны

$$z_T = r_0 [Q_c (n_0 - 1) / n_0]^{-2/5}, \quad Q_c \equiv \alpha P_0 (\pi r_0 c \rho_0 C_p T_0)^{-1}, \quad Q = Q_c [Q_c (n_0 - 1) / n_0]^{-1/5} \quad (2.8)$$

$$w_0 = c [Q_c (n_0 - 1) / n_0]^{-1/5}, \quad \tau = L / w_0 \equiv (r_0 / c) [Q_c (n_0 - 1) / n_0]^{-1/5}$$

Подставляем разложения (2.3) в уравнения гидродинамики (1.1)–(1.4). Из уравнения сохранения продольной компоненты импульса (1.2) получаем

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad w_1|_{z=z_0} = 0, \quad w_1 = w_1(z) \equiv 0 \quad (2.9)$$

Возмущения скорости в рассматриваемом гиперзвуковом потоке малы по сравнению с возмущениями температуры, плотности и давления. Для последних

находим

$$T_1 = -\rho_1 + p_1, \quad \rho_1 = \frac{p_1}{\kappa} - \int_{z_0}^z I(r, z') dz' \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) = \kappa \frac{\partial}{\partial z} I(r, z), \quad p_1|_{z=z_0} = 0, \quad p_1|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (2.11)$$

Решение задачи (2.11) есть

$$p_1(r, z) = \kappa \int_{z_0}^z dz' \int_{|r-r'| \leq |z-z'|} \frac{\partial I(r', z')}{\partial z'} \frac{r' dr'}{\sqrt{(z-z')^2 - (r-r')^2}} \quad (2.12)$$

В продольном потоке возмущения давления соизмеримы с возмущениями температуры и плотности только в гиперзвуковом режиме, а в дозвуковом и сверхзвуковом потоках – меньше по порядку величины. Конвективный режим охватывает практически весь диапазон скоростей, представляющих интерес для распространения лазерного пучка.

Интересно сопоставить зависимости длины самовоздействия z_T и масштаба возмущений плотности Q в различных режимах от поглощенной мощности αP_0 и от поперечного размера пучка r_0 . Длина теплового самовоздействия пропорциональна $z_T \propto (\alpha P_0)^{-1/2}$, $(\alpha P_0)^{-1/3}$, $(\alpha P_0)^{-1/5}$ и $z_T \propto r_0$, $r_0^{4/3}$, $r_0^{7/5}$ в теплопроводном, конвективном и гиперзвуковом режимах соответственно. Масштаб возмущений плотности пропорционален $Q \propto \alpha P_0$, $(\alpha P_0)^{2/3}$, $(\alpha P_0)^{4/5}$ и $Q \propto r_0^0$, $r_0^{-2/3}$, $r_0^{4/5}$ соответственно.

3. Самовоздействие в конвективном режиме продольного обтекания пучка. Как показано выше, в конвективном режиме возмущение плотности на длине самовоздействия z_T (при $N \equiv 1$) составляет

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \approx \frac{\rho_1(x, y, z) Q_{\perp}^{2/3}}{[(n_0 - 1)/n_0]^{1/3}} > Q_{\perp} = \frac{\alpha P_0}{\pi r_0 \rho_0 C_p T_0 w_0}$$

т.е. больше возмущений плотности Q_{\perp} [13] при поперечном обдуве с одинаковой по величине скоростью $u_0 = w_0$ и при прочих равных условиях. Теплопроводностью среды можно пренебречь, если скорость w_0 потока превышает величину

$$w_0 \gg V_T \equiv \left(\frac{\chi}{r_0} \right)^{3/2} \left[\frac{\pi \rho_0 C_p T_0 n_0 r_0}{\alpha P_0 (n_0 - 1)} \right]^{1/2}$$

а акустическими возмущениями можно пренебречь при

$$M = \frac{w_0}{c} \ll \left(\frac{z_T}{r_0} \right)^{1/2} = \frac{1}{[Q_{\perp} (n_0 - 1)/n_0]^{1/5}}$$

Таким образом, чисто конвективный теплоотвод реализуется даже при больших сверхзвуковых скоростях. При $V_T \ll w_0 \ll c \sqrt{z_T / r_0}$ функция возмущения плотности описывается уравнением переноса (2.6)

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial z} = -\frac{f(\xi)}{a^{1+k}(z)}, \quad \rho_1(x, z) = f(\xi) \int_{z_0}^z \frac{dz_1}{a^{1+k}(z_1)} \quad (3.1)$$

где z_0 – начальное сечение. Вычислим дивергенцию от всех членов уравнения эйконала (1.5) в координатах ξ , z . Функцию возмущения плотности ρ_1 подставим в правую

часть уравнений (1.5), (1.6), а функцию угла отклонения ϑ , аппроксимированную полиномом (1.9), в левую часть. Проинтегрируем эти уравнения поперек пучка с весом $q = l/W$. Получим уравнение для среднего радиуса

$$\frac{d^2 a}{dz^2} = \frac{b}{a(z)} \int_{z_0}^z \frac{dz_1}{a^{1+k}(z_1)} \quad (3.2)$$

$$a|_{z_0} = a_1, \quad a'|_{z_0} = \theta_1$$

$$b = \frac{N}{W} \int_{\xi_0}^{\infty} [f'(\xi)]^2 (\pi \xi)^k d\xi > 0$$

Здесь a_1 – обезразмеренный на r_0 начальный средний радиус пучка, θ_1 – отнесенный к r_0/L начальный угол (де-)фокусировки пучка. Штрих означает дифференцирование по независимой переменной. Пучок дефокусируется, расширяется, так как $b > 0$.

В общем случае аналогичная процедура, примененная к (1.5) (без вычисления дивергенции), дает уравнение для смещения $x_c(z)$. В рассматриваемом случае получим $d^2 x_c / dz^2 = 0$ при $k = 0$. Смещение растет по линейному закону $x_c(z) = x_{c1} + (z - z_0)\theta_{c1}$, где x_{c1} , θ_{c1} – начальное смещение и начальная скорость его изменения. Смещение отсутствует, если его не было в начальном сечении. Очевидно, что смещение всегда отсутствует в осесимметричном пучке.

Путем однократного дифференцирования сведем интегродифференциальное уравнение (3.2) к обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка с начальными условиями (примем $z_0 = 0$, т.е. сместим начало координат в эту точку)

$$a^{1+k} \frac{d}{dz} \left(a \frac{d^2 a}{dz^2} \right) = \pm b \quad (3.3)$$

$$a(0) = a_1, \quad a'(0) = \theta_1, \quad a''(0) = 0$$

Знак минус перед константой b введен для описания случая самофокусировки. В качестве третьего краевого условия приняли условие малости скорости изменения начального угла отклонения $\theta'_1(z=0) = 0$.

Для плоского пучка $k = 0$ решение задачи (3.3) получим в квадратурах. Замена независимой переменной z на $t = \ln[a(z)]$ и переход к функции $a'_z = \theta(t)$ с учетом $a\theta'_z = \theta'_t \theta$ позволяет понизить порядок уравнения

$$\theta(\theta\theta'_t)'_t = \pm b$$

Так как это уравнение не содержит независимой переменной t , с помощью замены $p(\theta) = \theta'_t$ (следовательно, $d/dt = pd/d\theta$) понизим порядок уравнения еще раз

$$\theta p(\theta p'_\theta)'_\theta = \pm b$$

В итоге первый интеграл исходного уравнения (3.3) есть

$$\theta \frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\pm 2b(\theta - \theta_1)} \quad (3.4)$$

Интегрирование и обратная замена $t = \ln a$ дают связь среднего радиуса с углом θ

$$\frac{a}{a_1} = \exp \sqrt{\frac{2(\theta - \theta_1)}{\pm b} \left(\frac{\theta + 2\theta_1}{3} \right)} = \exp \left[\sqrt{\pm 2\varphi} \left(A + \frac{\varphi}{3} \right) \right], \quad \varphi = \frac{\theta - \theta_1}{b^{1/3}}, \quad A = \frac{\theta_1}{b^{1/3}} \quad (3.5)$$

Подставляя в (3.4) левую часть в виде $\theta\theta'_z = a\theta'_z$, используя (3.5) и интегрируя по z , получим недостающую связь $\theta(z)$ в неявном виде

$$z = \pm \frac{a_1}{b} \int_{\theta_1}^{\theta} \exp \left\{ \sqrt{\frac{2(\theta - \theta_1)}{\pm b} \left(\frac{\theta + 2\theta_1}{3} \right)} \right\} \sqrt{\frac{\pm b}{2(\theta - \theta_1)}} d\theta$$

$$x = \frac{zb^{1/3}}{a_1} = \pm \int_0^{\varphi} \frac{\exp \left[\sqrt{\pm 2\varphi} (A + \varphi/3) \right]}{\sqrt{\pm 2\varphi}} d\varphi \quad (3.6)$$

В общем случае (включая осесимметричный пучок) решение получим численными методами, представив уравнение 3-го порядка в виде системы трех уравнений 1-го порядка

$$\frac{dy}{dx} = \varphi + A_l$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = y_3$$

$$\frac{dy_3}{dx} = \frac{1}{y} \left[\pm \frac{1}{y^{k+1}} - (A_l + \varphi)y_3 \right] \quad (3.7)$$

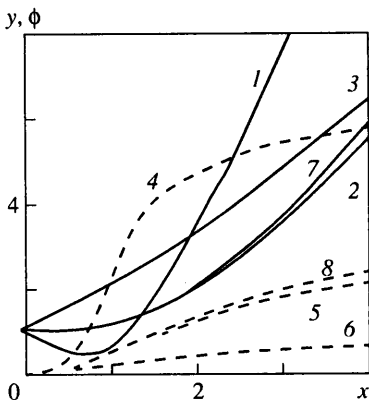
при условиях

$$y(0) = 1, \quad \varphi(0) = 0, \quad y_3(0) = 0$$

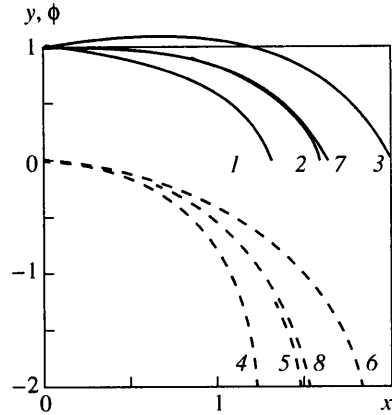
где

$$y = \frac{a}{a_1}, \quad \varphi = \frac{dy}{dx} - A_l, \quad y_3 = \frac{d\varphi}{dx}, \quad A_l = \frac{\theta_1 a_1^{k/3}}{b^{1/3}}, \quad x = \frac{zb^{1/3}}{a_1^{1+k/3}}, \quad \theta = \left(\frac{b}{a_1^k} \right)^{1/3} \frac{dy}{dx}$$

Решения $y(x)$, $\varphi(x)$ представлены на фиг. 1 и 2 для осесимметричного случая ($k = 1$). На фиг. 1 приведены результаты расчета для случая дефокусировки ($+b > 0$). На фиг. 2 приведены результаты для случая фокусировки в среде ($-b < 0$).



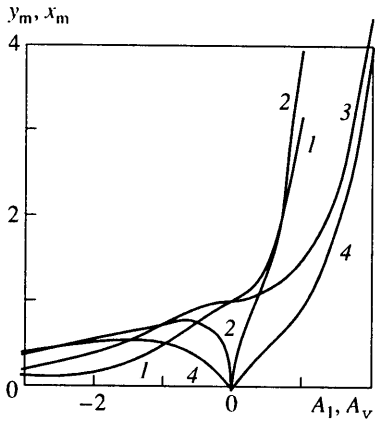
Фиг. 1



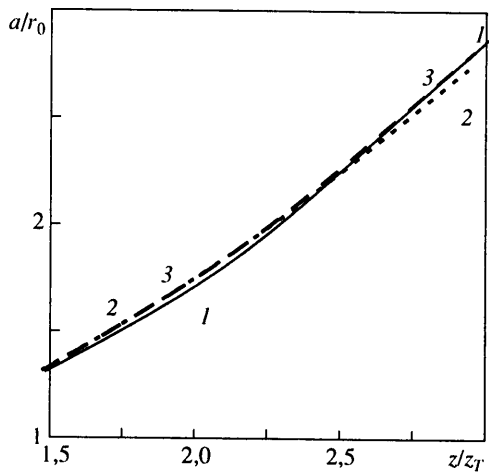
Фиг. 2

Фиг. 1. Безразмерные средние радиусы $y(x)$ (кривые 1–3) и углы отклонения $\varphi(x)$ (кривые 4–6) в зависимости от длины траектории x в дефокусирующей среде ($+b > 0$) при значениях параметра подобия $A_l = -1; 0; 1$. Кривые 7, 8 – плоский пучок ($k = 0$) при $A_l = 0$

Фиг. 2. То же, что и на фиг. 1, но в фокусирующей среде ($-b < 0$) при $A_l = -0,2; 0; 0,2$



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Максимумы (в фокусирующей среде) и минимумы (в дефокусирующей среде) среднего радиуса y_m (кривая 1) и координаты экстремумов x_m (кривая 2) в зависимости от параметра подобия A_I в случае самовоздействия лазерного пучка в продольном потоке и в зависимости от параметра подобия A_V в случае гравитационной конвекции в вертикальном осесимметричном лазерном пучке (кривые 3 – y_m и 4 – x_m соответственно), $k = 1$

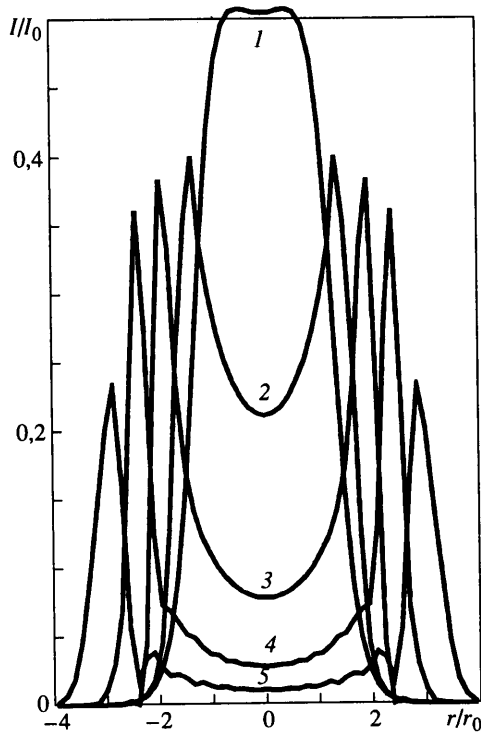
Фиг. 4. Сравнение с точным численным решением (сплошная кривая 1) приближенных решений 2 ($z_0/z_T = 1,475$, $a_1 = 1,313$, $\theta_1 = 0,6$, нормировка среднего радиуса a при $z/z_T = 2,5$; постоянные $b = 0,754$, $A_I = 0,659$) и 3 (нормировка при $z/z_T = 3$, $b = 0,941$, $A_I = 0,612$) для осесимметричного пучка с плоским волновым фронтом и гауссовым распределением интенсивности в начальном сечении $z = 0$

При начальной фокусировке $\theta_1 < 0$ в дефокусирующей среде и при начальной расфокусировке $\theta_1 > 0$ в фокусирующей среде поперечный размер y имеет экстремумы y_m (минимум или максимум) на некотором расстоянии x_m от начального сечения.

На фиг. 3 показаны значения экстремумов среднего радиуса y_m и его координаты x_m в зависимости от параметра подобия A_I для осесимметричного пучка.

4. Сравнение с точным численным решением. Покажем, что приближенное решение удовлетворительно аппроксимирует точное решение на расстояниях, соизмеримых с длиной самовоздействия z_T . На фиг. 4 приведены точное численное решение (сплошная кривая 1) и приближенные решения 2 и 3 для осесимметричного пучка с плоским волновым фронтом и гауссовым распределением интенсивности в начальном сечении $z = 0$. В сечении $z/z_T = 1,475$, которое принято за начальное z_0 для приближенного решения, безразмерный средний радиус равен $a_1 = 1,313$, угол расширения пучка $\theta_1 = 0,6$. Кривая 2 соответствует нормировке среднего радиуса при $z/z_T = 2,5$ (постоянные $b = 0,754$, $A_I = 0,659$), кривая 3 – нормировке при $z/z_T = 3$ ($b = 0,941$, $A_I = 0,612$). Параметр самовоздействия $N = 1$, параметр поглощения $N_\alpha = 0$, число Френеля $F \gg 1$. Расчеты выполнены на сетке $N_x = 128$, $N_y = 128$, $N_z = 122$ с помощью алгоритма, использующего быстрое преобразование Фурье.

На фиг. 5 представлены профили интенсивности $I(r)/I_0$, полученные численно в сечениях $z/z_T = 1; 1,5; 2; 2,5; 3$. Форма профиля интенсивности устанавливается при $z/z_T > 1,5$. По ходу пучка провал в центре углубляется. Максимум интенсивности расположен по кольцу, радиус которого увеличивается. Дальнейшим расчетам в области $z/z_T > 3$ препятствуют большие погрешности в окрестности пиков. Во многих ситуациях нормировка приближенного решения и выбор постоянных возможны только на



Фиг. 5. Профили интенсивности $I(r)/I_0$ точного численного решения в сечениях $z/z_T = 1$ (кривая 1), 1,5 (2), 2 (3), 2,5 (4), 3 (5)

основе экспериментальных данных. Точность приближенного решения определяется в первую очередь тем, насколько сохраняется форма профиля интенсивности на рассматриваемом участке трассы.

5. Гравитационная конвекция в вертикальном пучке. В этом варианте число $M \ll 1$, так как скорость свободно-конвективного движения значительно меньше скорости звука. Примем, как отмечено в разд. 1, $Re, Pe \gg 1$ в исходных уравнениях для среды (1.1) – (1.4). Приравняем по порядку величины конвективные члены в левой части уравнения (1.2) силе Архимеда в правой части: $Q = Fr$. Определим характерную скорость развитой (сильной) конвекции [12, 14] в вертикальном лазерном пучке w_g и время установления τ

$$w_g = \left(\frac{\alpha P_0 g L^2}{\pi r_0^2 \rho_0 C_p T_0} \right), \quad \tau = \frac{L}{w_g} = \left(\frac{\pi r_0^2 \rho_0 C_p T_0 L}{\alpha P_0 g} \right)^{1/3}$$

Из уравнения сохранения энергии (1.3) находим масштаб возмущения температуры (плотности) среды

$$\frac{\Delta T}{T_0} \approx \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \approx Q \rho_1, \quad Q = Q_0 \equiv \left(\frac{\alpha P_0}{\pi r_0^2 \rho_0 C_p T_0} \right)^{2/3} \left(\frac{L}{g} \right)^{1/3}$$

Плотность и скорость газа в главном приближении описываются следующей систе-

мой уравнений [12]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^k} \frac{\partial r^k u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w &= -\rho_1 \\ \left(u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho_1 &= -\frac{f(\xi)}{a^{1+k}(z)} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Перейдем от декартовых координат z, r к переменным Мизеса s, n [16] (вдоль линии тока и по нормали к ней), в которых поперечная компонента скорости тождественно равна нулю. В рассматриваемой задаче можно пренебречь различием координат Мизеса и декартовых. В результате обратного перехода к декартовым координатам получим

$$\begin{aligned} -\rho_1 &= V \frac{\partial V}{\partial s} \approx w \frac{\partial w}{\partial z}, \quad w, \rho_1|_{z=0} \approx 0 \\ -\frac{f(\xi)}{a^{1+k}(z)} &\approx -\frac{f(\xi)}{a^{1+k}(s)} = V \frac{\partial \rho_1}{\partial s} \approx w \frac{\partial \rho_1}{\partial z}, \quad w, \rho_1|_{|r| \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\xi = \frac{r}{a(s)} \approx \frac{r}{a(z)}$$

Не ограничивая общности, принимаем $z_0 = 0$. Функцию ρ_1 ищем в виде

$$\rho_1 = -R(\xi)Y(z) \quad (5.3)$$

Здесь R, Y – вспомогательные функции. Из системы уравнений (5.2) находим с учетом краевых условий

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{2R(\xi)F(z)}, \quad R(\xi) = [f(\xi)]^{2/3} \\ \sqrt{2F(z)F''} &= \frac{1}{a^{1+k}(z)}, \quad F(z) = \int_0^z Y dz, \quad F(0) = 0, \quad Y(0) = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Дифференцируя и интегрируя по поперечной координате уравнение эйконала (1.5), получаем следующую задачу для среднего радиуса пучка:

$$a \frac{d^2 a}{dz^2} = bY(z) \quad (5.5)$$

$$a(0) = a_1, \quad \theta(0) = \frac{da}{dz} = \theta_1$$

$$b = -\frac{N}{W} \int_{\xi_0}^{\infty} f(\xi) \frac{d}{d\xi} \left[(\pi\xi)^k \frac{dR}{d\xi} \right] d\xi$$

Удобно уравнения (5.4), (5.5) записать в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\pm y_4}{y} \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_4, \quad \frac{dy_4}{dx} = \frac{1}{y^{k+1} \sqrt{y_3}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$y(0) = 1, \quad \varphi(0) = A_v \equiv \frac{\theta_1 \beta}{a_1}, \quad y_3(0) = 0, \quad y_4(0) = 0$$

$$y = \frac{a(z)}{a_1}, \quad \varphi = \frac{\theta(z)}{a_1} \beta, \quad x = \frac{z}{\beta}, \quad y_3 = \frac{F(z)}{a_1^2} \beta b, \quad y_4 = \frac{Y(z)}{a_1^2} \beta^2 b, \quad \beta = \left(\frac{\sqrt{2} a_1^{k+4}}{b^{3/2}} \right)^{2/7}$$

Для полноты исследования в рассмотрение включен случай самофокусировки подстановкой $-b < 0$ вместо b (в результате появился знак минус во втором уравнении). Последнее уравнение системы (5.6) имеет особенность при $x \rightarrow 0$

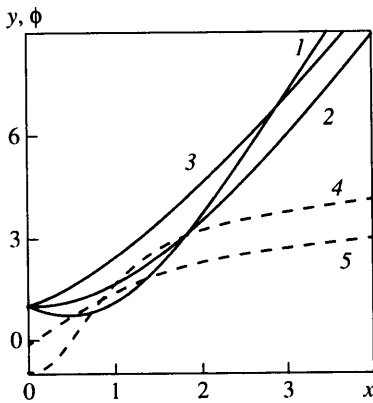
$$y_3(x) \approx \left(\frac{9}{4} \right)^{2/3} x^{4/3} + \dots, \quad y_4(x) = \left(\frac{9}{4} \right)^{2/3} \frac{4}{3} x^{1/3} + \dots \quad (5.7)$$

Нормировки систем (5.6) и (3.7) эквивалентны. Несущественное различие состоит в том, что из функции угла отклонения пучка в системе (3.7) вычтен нормированный начальный угол A_1 .

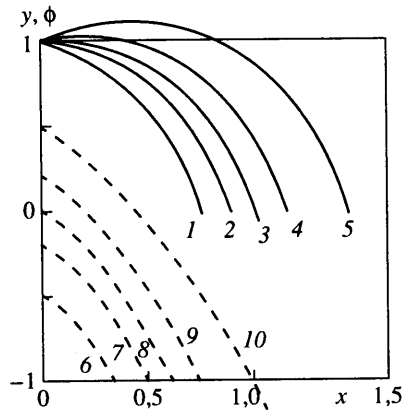
Решение $y(x), \varphi(x)$ представлено на фиг. 6 для случая дефокусировки (гравитационная конвекция в газе в вертикальном лазерном пучке). Сплошными кривыми показаны нормированные средние радиусы y при значениях параметра подобия $A_v = -1; 0; 1$. Штриховые кривые соответствуют углам отклонения $\varphi(x)$ при значениях $A_v = -1; 0$.

На фиг. 7 приведены решения $y(x), \varphi(x)$ для случая фокусировки при $A_v = -0,5; -0,2; 0; 0,2; 0,5$.

Решения задач теплового самовоздействия вертикального лазерного пучка в условиях гравитационной конвекции и пучка в продольном потоке зависят от одного параметра подобия (A_1 или A_v), пропорционального начальному углу расходимости θ_1 . Как уже отмечено в разд. 3, при начальной фокусировке $\theta_1 < 0$ в дефокусирующей среде и при начальной расфокусировке $\theta_1 > 0$ в фокусирующей среде поперечный размер y имеет экстремумы y_m на некотором расстоянии x_m . Для случая гравитационной конвекции также вычислены значения экстремальных радиусов и их координаты как функции параметра подобия A_v . Результаты для осесимметричного пучка приведены



Фиг. 6



Фиг. 7

Фиг. 6. Средние радиусы $y(x)$ (сплошные кривые 1–3) и углы отклонения $\varphi(x)$ (штриховые кривые 4, 5) в зависимости от длины трассы x в дефокусирующей среде ($+b > 0$) при $A_v = -1; 0; 1$ и $A_v = -1; 0$, осесимметричный пучок, $k = 1$

Фиг. 7. Зависимости среднего радиуса $y(x)$ (сплошные кривые 1–5) и углы $\varphi(x)$ (штриховые кривые 6–10) для случая фокусировки ($-b < 0$) при $A_v = -0,5; -0,2; 0; 0,2; 0,5$

на фиг. 3 и сравниваются с аналогичными зависимостями y_m, x_m от параметра подобия A_l в продольном потоке. Координаты x_m минимального размера пучка (радиуса y_m в области перетяжки) принимают максимальные значения $x_m = 0,782$ ($y_m = 0,634$) при $A_{lm} = -0,65$ в продольном потоке и $x_m = 0,53$ ($y_m = 0,506$) при $A_{vm} = -1,5$ в вертикальном пучке. Физический смысл максимумов x_m в следующем. Для заданной дефокусирующей среды (задан параметр b) существуют сфокусированные пучки с начальными радиусом и углом расширения, связанными соотношениями

$$\theta_1 = A_{lm} \frac{b^{1/3}}{a_1^{k/3}}, \quad \theta_1 = A_{vm} \frac{b^{3/7}}{2^{3/7} a_1^{(2k+1)/7}}$$

для случаев продольного потока и гравитационной конвекции в вертикальном пучке соответственно, такие, что перетяжка или фокус у них находятся на максимальном расстоянии $(x_m)_{\max}$ от начального сечения.

Заключение. В продольном по пучку потоке газа в зависимости от величины скорости (или числа M) существуют три режима самовоздействия – теплопроводный, конвективный и гиперзвуковой, в которых возмущения плотности газа обусловлены соответственно механизмами теплопроводности, вынужденной конвекции и, одновременно, акустики и конвекции.

Продемонстрировано применение метода описания возмущений пучка в нелинейной среде с помощью средних характеристик в случае продольного обтекания лазерного пучка. Решена задача сильного самовоздействия для вертикального лазерного пучка при наличии развитой гравитационной конвекции. Метод позволяет, не решая совместно системы сложных уравнений аэрооптики (оптики и аэрогидродинамики), качественно оценивать возмущения лазерного пучка. Если численные коэффициенты, связывающие параметры приближенного метода с параметром теплового самовоздействия N , известны (из эксперимента или из точных численных расчетов), возможно удовлетворительное количественное описание эффекта самовоздействия, что показано на примере продольного обтекания пучка в конвективном режиме.

В продольном по пучку потоке и при гравитационной конвекции в вертикальном пучке средние радиусы описываются интегродифференциальными уравнениями, которые сводятся к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения зависят от одного параметра подобия в каждом случае: от $A_l = \theta_1 a_1^{k/3} b^{-1/3}$ в продольном потоке и от $A_v = 2^{3/7} \theta_1 a_1^{(2k+1)/7} b^{-3/7}$ при гравитационной конвекции в вертикальном пучке соответственно для плоского $k = 0$ и осесимметричного $k = 1$ пучков.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 99-01-00446) и ЦАГИ, а также частично CRDF (1998 г., № RE2-139).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.
2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухаруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.
3. Gebhardt F.G., Smith D.C. Self-induced thermal distortion in the near field for a laser beam in a moving medium // IEEE. J. Quantum Electronics. 1971. V. QE-7. № 2. P. 63–73.
4. Livingston P.M. Thermal induced modifications of a high power CW laser beam // Appl. Optics. 1971. V. 10. № 2. P. 426–436.
5. Avisonis P.V., Hogge C.B., Butts R.R., Kenemuth J.R. Geometrical optics of thermal blooming in gases // Appl. Optics. 1972. V. 11. № 3. P. 554–564.
6. Таланов В.И. О фокусировке света в кубических средах // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11. Вып. 6. С. 303–305.

7. Кучеров А.Н., Макашев Н.К., Устинов Е.В. Тепловое самовоздействие пучков переменного радиуса в приближении теории малых возмущений // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36. № 2. С. 135–142.
8. Smith D.C., Gebhardt F.G. Saturation of the self-induced thermal distortion of laser radiation in a wind // Appl. Phys. Lett. 1970. V. 16. № 7. P. 275–278.
9. Chodzko R.A., Lin S.C. A study of strong thermal interactions between a laser beam and an absorbing gas // AIAA Journal. 1971. V. 9. № 6. P. 1105–1112.
10. Кучеров А.Н. Самофокусировка и квазиволноводное распространение гауссова пучка в сверхзвуковом потоке газа // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 2. С. 309–311.
11. Кучеров А.Н. Распространение вертикального лазерного пучка в гравитационно-конвективном потоке поглощающей среды // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. № 8. С. 1110–1119.
12. Кучеров А.Н. Нестационарное самовоздействие вертикального лазерного пучка // Квантовая электроника. 1997. Т. 24. № 2. С. 181–186.
13. Кучеров А.Н. Сильное тепловое самовоздействие лазерного пучка в газах и жидкостях // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. № 1. С. 105–129.
14. Кучеров А.Н. Режимы нестационарной свободной конвекции в вертикальном лазерном пучке // Докл. РАН. 1997. Т. 353. № 5. С. 616–618.
15. Кучеров А.Н., Макашев Н.К., Устинов Е.В. Аппроксимация возмущений оптического пучка в условиях теплового самовоздействия // Квантовая электроника. 1995. Т. 22. № 2. С. 187–192.
16. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 588 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.1.2000