МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2001

УДК 532.59:532.527

© 2001 г. А.С. САВИН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ В ПЛОСКОМ ПОТОКЕ ПО ДАННЫМ О ЕГО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Предложен способ нахождения координат и интенсивностей точечных гидродинамических особенностей по вызываемым ими возмущениям свободной поверхности весомой бесконечно глубокой идеальной жидкости. Рассмотрены стационарное обтекание особенностей и движение по произвольному закону особенностей переменной интенсивности. Для случая одной и двух особенностей сформулировано расчетное правило, основанное на классическом методе наименьших квадратов, пригодное для непосредственной обработки данных опыта.

Точечные гидродинамические особенности достаточно широко используются при моделировании возмущений жидкой среды различными неоднородностями. Например, при изучении обтекания подводного препятствия часто принимается, что поток потенциален, а само препятствие заменяется некоторой эквивалентной ему системой гидродинамических особенностей (вихрей, источников, диполей и т.д.). Таким образом, расчет возмущений свободной поверхности жидкости сводится к решению задачи о ее взаимодействии с точечными гидродинамическими особенностями. Наиболее общая формула для профиля свободной границы плоского потока бесконечно глубокой весомой идеальной и несжимаемой жидкости, стационарно обтекающего точечную гидродинамическую особенность произвольного порядка, была найдена М.В. Келдышем [1] при решении задачи о движении подводного крыла [2]. Случай возмущения свободной поверхности точечной особенностью переменной интенсивности, движущейся произвольным образом, рассмотрен в [3].

Поставим обратную задачу: найти координаты и интенсивности точечных особенностей по вызываемым ими возмущениям свободной поверхности. Впервые обратная задача стационарного обтекания конечной системы точечных особенностей плоским потоком со свободной границей рассматривалась в [4, 5] с помощью техники аппроксимаций Паде. Предлагаемый в настоящей работе способ определения параметров особенностей имеет иную основу и позволяет в ряде важных случаев свести решение обратной задачи обтекания к простому расчетному правилу, основанному на классическом методе наименьших квадратов. Это обусловливает малую чувствительность предлагаемой процедуры к случайным ошибкам в исходных данных и поэтому открывает возможность непосредственного ее использования при обработке результатов эксперимента.

1. Стационарное обтекание особенностей. Рассмотрим плоский потенциальный поток бесконечно глубокой весомой идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей, стационарно обтекающий неподвижную точечную гидродинамическую особенность в его толще. Известно [1, 2], что возмущения скорости и свободной поверхности жидкости, связанные с действием силы тяжести, развиваются в основном за обтекаемой особенностью, а при удалении от нее вверх по потоку быстро исчезают. Направим ось x прямоугольной декартовой системы координат по невозмущенной свободной границе жидкости в сторону течения, а ось y – вверх против силы тяжести, тогда при $x = -\infty$ каждая жидкая частица обладает скоростью $(V, 0)$, $V = \text{const} > 0$.

Выделив в рассматриваемом течении основной поток и возмущение, представим комплексный потенциал в виде $W = Vz + w$, где $z = x + iy$, $w = \varphi + i\psi$.

Если поток обтекает гидродинамическую особенность порядка n, локализованную в точке z_0, то

$$w = Cq(z - z_0) + p(z) \tag{1.1}$$

$$q(z - z_0) = \begin{cases} \ln(z - z_0), & n = 0 \\ (z - z_0)^{-n}, & n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{1.2}$$

где функция $p(z)$ аналитична всюду в области течения, C – комплексная постоянная.

При не слишком больших отклонениях $y = S(x)$ свободной границы жидкости от ее невозмущенного положения $y = 0$ граничные условия имеют вид [6]

$$S(x) = -Vg^{-1}\varphi_x(x, 0), \quad VS(x) + \psi(x, 0) = 0 \tag{1.3}$$

Исключив из равенств (1.3) величину S, можно получить одно граничное условие для комплексного потенциала в форме [1, 2]

$$\operatorname{Im}\left(i\frac{dw}{dz} - \nu w \right)\Big|_{y=0} = 0, \quad \nu = gV^{-2} \tag{1.4}$$

Из соотношений (1.1), (1.2), (1.4) видно, что функция

$$f(z) = i\frac{dw}{dz} - \nu w \tag{1.5}$$

имеет в точке z_0 нижней полуплоскости известную особенность и принимает только вещественные значения на действительной оси. Это позволяет аналитически продолжить ее на верхнюю полуплоскость по принципу симметрии и получить на всей комплексной плоскости представление [1, 2]

$$f(z) = i\frac{dw_-}{dz} - \nu w_+ \tag{1.6}$$

$$w_\pm = Cq(z - z_0) \pm \overline{C}q(z - \bar{z}_0) \tag{1.7}$$

Из формул (1.5)–(1.7) следует равенство

$$\left(i\frac{d}{dz} - \nu \right)(w - w_+) = -2i\overline{C}\frac{d}{dz}q(z - \bar{z}_0) \tag{1.8}$$

которое, в силу определения (1.2) величины q, можно представить на вещественной оси в виде

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\nu \right)\overline{(w - w_+)}\Big|_{y=0} = \frac{(\delta_{0n} - n)C}{(x - z_0)^{n+1}} \tag{1.9}$$

где δ_{0n} – символ Кронекера.

Поскольку $\operatorname{Im} w_+ = 0$ при $y = 0$, из второго граничного условия (1.3) следует

$$\operatorname{Im}(w - w_+)\Big|_{y=0} = -VS(x) \tag{1.10}$$

Восстановим на вещественной оси действительную часть аналитической в области течения $y < 0$ функции $w - w_+$ по ее известной при $y = 0$ из равенства (1.10) мнимой части. Решение такой задачи дается формулой Гильберта [7], называемой в физической литературе дисперсионным соотношением [8], и в данном случае имеет вид

$$\operatorname{Re}(w - w_+)\,|_{y=0} = VH[S] \tag{1.11}$$

$$H[S] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(x')dx'}{x' - x} \tag{1.12}$$

где $H[S]$ – преобразование Гильберта функции S. Здесь и далее все интегралы понимаются в смысле главного значения.

Обоснование корректности процедуры получения равенства (1.11) в рассматриваемом случае может быть проведено с использованием уравнения (1.8), которому удовлетворяет функция $w - w_+$, и физически обусловленного требования ограниченности модуля комплексной скорости $(w - w_+)_z$ в области течения.

Положив $D = (\delta_{0n} - n)C$, с учетом известного свойства производной преобразования Гильберта [7] $(H[S])' = H[S']$ и равенств (1.10), (1.11), получим из формулы (1.9) соотношение

$$D(x - z_0)^{-n-1} = F(x) \tag{1.13}$$

$$F(x) = -\frac{V}{2}\{\nu S + H[S'] + i(S' - \nu H[S])\} \tag{1.14}$$

Левая часть равенства (1.13) совпадает с выражением для комплексной скорости, которую бы индуцировала рассматриваемая особенность в безграничной покоящейся среде на прямой $y = 0$.

Если поток обтекает N гидродинамических особенностей порядков n_k, локализованных в точках z_k, $k = 1, ..., N$, то, в силу линейности принятого приближения малых волн, получим вместо соотношения (1.13) равенство

$$\sum_{k=1}^{N} D_k(x - z_k)^{-n_k-1} = F(x) \tag{1.15}$$

где правая часть по-прежнему определяется выражением (1.14) и может быть вычислена в любой точке x по данным измерений свободной поверхности потока.

Современные бесконтактные оптические методы визуализации свободной поверхности позволяют в лабораторных условиях находить ее деформации с высокой точностью. Например, с помощью модифицированного варианта метода отраженной сетки [9] можно непосредственно измерить в любой точке наклон свободной поверхности, т.е. получить значения величины $S'(x)$. Отклонение $S(x)$ свободной поверхности от ее невозмущенного положения находится последующим интегрированием производной $S'(x)$. Это позволяет после сравнительно простой обработки экспериментальных данных, осуществляемой на основе формулы (1.14), найти значения правых частей равенств (1.13), (1.15) в любой точке x.

Таким образом, по формулам (1.13)–(1.15) осуществляется редукция задачи определения параметров системы точечных гидродинамических особенностей, обтекаемых стационарным потоком, по вызываемым возмущениям свободной поверхности к значительно более простой задаче нахождения параметров идентичной системы особенностей в безграничной и неподвижной в целом среде по индуцируемой скорости на вещественной прямой.

Поскольку в расчетах используются приближенные значения величин, получаемые из эксперимента, с вычислительной точки зрения задача сводится к нахождению тех значений параметров D_k, z_k, n_k в левой части равенства (1.15), при которых выполняется условие

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} D_k(x - z_k)^{-n_k-1} - F \right\| = \min \tag{1.16}$$

где для сглаживания ошибок эксперимента естественно взять среднеквадратичную норму. Если значения функции $F(x)$ в правой части равенства (1.15) определяются по данным опыта в некоторых точках x_1, ..., x_M, то в случае равноточных измерений условию (1.16) можно придать вид

$$\sum_{i=1}^{M} \left| \sum_{k=1}^{N} D_k(x_i - z_k)^{-n_k-1} - F(x_i) \right|^2 = \min \tag{1.17}$$

Поскольку параметры z_k, n_k входят в условие (1.17) нелинейно, их оптимальный выбор представляет собой сложную вычислительную задачу, единственность решения которой не очевидна. Однако для некоторых систем гидродинамических особенностей, имеющих практическое значение, можно предложить процедуру однозначного восстановления их параметров по данным наблюдений свободной поверхности в рамках полиномиального приближения функции $1/F$ классическим методом наименьших квадратов [10]. При этом априорная информация о возмущающей свободную поверхность системе гидродинамических особенностей может существенно упростить решение поставленной задачи. Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пусть известно, что в потоке присутствует единственный вихреисточник – гидродинамическая особенность, образованная вихрем интенсивности Γ и источником мощности Q, локализованными в одной точке $z_0 = x_0 + iy_0$ [11]. Переходя от равенства (1.13), в котором положим $n = 0$, $C = (2\pi)^{-1}(Q - i\Gamma)$, к равенству обратных величин, после выделения действительной и мнимой части получим соотношение

$$a_1 x + a_0 + i(b_1 x + b_0) = [2\pi F(x)]^{-1} \tag{1.18}$$

$$a_1 = \frac{Q}{Q^2+\Gamma^2}, \quad a_0 = \frac{\Gamma y_0 - Q x_0}{Q^2+\Gamma^2}, \quad b_1 = \frac{\Gamma}{Q^2+\Gamma^2}, \quad b_0 = -\frac{\Gamma x_0 + Q y_0}{Q^2+\Gamma^2} \tag{1.19}$$

Поскольку значения правой части равенства (1.18) находятся приближенно по данным опыта, задача состоит в оптимальном выборе коэффициентов a_0, a_1, b_0, b_1 многочленов первой степени, аппроксимирующих действительную и мнимую части функции $[2\pi F(x)]^{-1}$. Осуществив этот выбор классическим методом наименьших квадратов, найдем из системы алгебраических уравнений (1.19) значение параметров вихреисточника, наилучшим в данном смысле образом отвечающее экспериментально наблюдаемой картине

$$\Gamma = \frac{b_1}{a_1^2+b_1^2}, \quad Q = \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2}, \quad x_0 = -\frac{a_0 a_1 + b_0 b_1}{a_1^2+b_1^2}, \quad y_0 = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_1^2+b_1^2}$$

В случае обтекания потоком точечного источника соотношение (1.18) имеет вид

$$a_1 x + a_0 + i b_0 = [2\pi F(x)]^{-1} \tag{1.20}$$

$$a_1 = Q^{-1}, \quad a_0 = -Q^{-1} x_0, \quad b_0 = -Q^{-1} y_0 \tag{1.21}$$

Определив коэффициенты a_0, a_1, b_0 в левой части равенства (1.20) методом наименьших квадратов по вычисленным на основе экспериментальных данных значениям функции $[2\pi F(x)]^{-1}$, из системы уравнений (1.21) получим значения параметров источника $Q = a_1^{-1}$, $x_0 = -a_0/a_1$, $y_0 = -b_0/a_1$, наиболее согласующиеся с данными опыта.

Аналогично решается задача восстановления интенсивности и координат точечного вихря по вызываемым им возмущениям свободной поверхности. В этом случае в силу соотношений (1.18), (1.19), и условия $Q = 0$ функция $[2\pi F(x)]^{-1}$ аппроксимируется выражением $a_0 + i(b_1 x + b_0)$, где $a_0 = \Gamma^{-1} y_0$, $b_0 = -\Gamma^{-1} x_0$, $b_1 = \Gamma^{-1}$. Определив методом наименьших квадратов коэффициенты a_0, b_0, b_1, получим $\Gamma = b_1^{-1}$, $x_0 = -b_2/b_1$, $y_0 = a_0/b_1$.

В общем случае обтекания точечной гидродинамической особенности известного порядка $n \geqslant 1$ для исключения неоднозначности, связанной с извлечением корней из комплексных значений, поступим следующим образом. Перейдя от равенства (1.13) к равенству модулей его правой и левой части, возведенных в степень $-2/(n + 1)$, получим соотношение

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \left(\frac{n}{|F(x)|} \right)^{2/(n+1)} \tag{1.22}$$

$$a_2 = |C|^{-2/(n+1)}, \quad a_1 = -2x_0 |C|^{-2/(n+1)}, \quad a_0 = (x_0^2 + y_0^2) |C|^{-2/(n+1)} \tag{1.23}$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2 полинома в левой части равенства (1.22) определяются из условия наилучшего приближения правой части, значения которой вычисляются по данным эксперимента в некоторых точках x_1, ..., x_M. Решив эту задачу методом наименьших квадратов, из системы равенств (1.23) с учетом того, что $y_0 < 0$, получим

$$|C| = a_2^{-(n+1)/2}, \quad x_0 = -\frac{a_1}{2a_2}, \quad y_0 = \frac{-\sqrt{4a_0 a_2 - a_1^2}}{2a_2}$$

Из соотношения (1.13) видно, что при $n \geqslant 1$

$$C = -(x - z_0)^{n+1} F(x) / n \tag{1.24}$$

Поэтому после определения $z_0 = x_0 + iy_0$ значение величины C находится методом наименьших квадратов как комплексная постоянная, наилучшим образом приближающая заданную в некоторых точках x_1, ..., x_M правую часть равенства (1.24). В случае равноточных измерений значение величины C следует принять равным среднему арифметическому значений правой части соотношения (1.24) в точках x_1, ..., x_M.

Еще один пример восстановления параметров гидродинамических особенностей по вызываемым ими возмущениям свободной поверхности в рамках классического метода наименьших квадратов представляет задача о двух вихреисточниках с интенсивностями $C_1 = (Q - i\Gamma)/(2\pi)$, $C_2 = -C_1$. Такая система интересна, в частности, тем, что при ее обтекании может возникать замкнутая линия тока, охватывающая обе особенности. В этом случае воздействие рассматриваемых вихреисточников на течение эквивалентно воздействию на него погруженного тела, граница которого совпадает с данной замкнутой линией тока. Обратно: если поток обтекает некоторый замкнутый контур, то по наблюдаемым при этом возмущениям свободной поверхности можно построить систему двух вихреисточников с наиболее близкими поверхностными проявлениями. Замкнутая линия тока такой системы особенностей даст приближенную информацию о положении и форме обтекаемого контура.

Приравняв величины, обратные стоящим в левой и правой частях соотношения (1.15) при $n_1 = n_2 = 0$, $C_1 = C = (Q - i\Gamma)/(2\pi)$, $C_2 = -C$, получим равенство

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = [F(x)]^{-1} \tag{1.25}$$

$$a_2 = [C(z_1 - z_2)]^{-1}, \quad a_1 = -a_2(z_1 + z_2), \quad a_0 = a_2 z_1 z_2 \tag{1.26}$$

Определив методом наименьших квадратов комплексные коэффициенты a_0, a_1, a_2 многочлена в левой части равенства (1.25) из условия наилучшего приближения задаваемой по данным опыта функции $[F(x)]^{-1}$ в правой части, из системы трех уравнений (1.26) относительно трех комплексных неизвестных получим

$$z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}$$

причем следует взять те значения корней, при которых будет выполнено условие $\mathrm{Im} z_1 < 0$, $\mathrm{Im} z_2 < 0$.

2. Произвольное движение особенностей с переменными интенсивностями. Пусть точечная гидродинамическая особенность порядка n переменной интенсивности $C =$

$= C(t)$ возникает в некоторый момент времени в изначально покоящейся весомой бесконечно глубокой жидкости и далее движется по закону $z_0 = z_0(t) = x_0(t) + iy_0(t)$ под ее свободной поверхностью. Если всюду вне особенности течение потенциально, то его комплексный потенциал $W = \Phi + i\Psi$ имеет вид $W(z, t) = Cq(z - z_0) + W_1(z, t)$, где $z = x + iy$, функция q определяется выражением (1.2), функция W_1 аналитична всюду в области течения. Ограничившись случаем небольших отклонений $S = S(x, t)$ свободной поверхности жидкости от ее невозмущенного положения $y = 0$, запишем граничные условия в приближении малых волн [6, 11]

$$y = 0:\ \Phi_t + gS = 0,\quad \Phi_y = S_t \tag{2.1}$$

Исключив из равенств (2.1) величину S, получим одно граничное условие для комплексного потенциала, которое представим в виде

$$\mathrm{Im}\left(i\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - g\frac{dW}{dz}\right)\bigg|_{y=0} = 0 \tag{2.2}$$

Условие (2.2) позволяет аналитически продолжить функцию

$$f(z,t) = i\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - g\frac{dW}{dz} \tag{2.3}$$

на верхнюю полуплоскость по принципу симметрии и получить для нее на всей комплексной плоскости представление [3]

$$f(z,t) = i\frac{\partial^2 W_-}{\partial t^2} - g\frac{dW_+}{dz} \tag{2.4}$$

$$W_\pm = Cq(z - z_0) \pm \overline{C}q(z - \overline{z}_0) \tag{2.5}$$

Положим $\chi = W - W_-$, тогда из соотношений (2.3)–(2.5) следует равенство

$$\left(\frac{i}{g}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{d}{dz}\right)\chi = -2\overline{C}\frac{d}{dz}q(z - \overline{z}_0) \tag{2.6}$$

которому с учетом формулы (1.2) можно придать на вещественной оси вид

$$\frac{1}{2}\left(\frac{i}{g}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\overline{\chi}\Big|_{y=0} = \frac{(\delta_{0n} - n)C}{(x - z_0)^{n+1}} \tag{2.7}$$

С учетом равенства $\mathrm{Re}W_- = 0$ при $y = 0$ и того, что до момента возникновения особенности жидкость была неподвижна, представим первое граничное условие (2.1) в форме

$$\mathrm{Re}\,\chi\big|_{y=0} = -g\int\limits_{-\infty}^{t} S(x,\tau)d\tau \tag{2.8}$$

По формуле Гильберта получим выражение мнимой части аналитической в области течения $y < 0$ функции χ на вещественной оси

$$\mathrm{Im}\,\chi\big|_{y=0} = -gH\left[\int\limits_{-\infty}^{t} S(x,\tau)d\tau\right] \tag{2.9}$$

где H – преобразование Гильберта (1.12).

Корректность применения этой формулы обусловлена тем, что $|\chi| \to 0$ при $|z| \to \infty$ всюду в области течения.

Положив $D(t) = (\delta_{0n} - n)C(t)$, из формул (2.7)–(2.9) находим соотношение

$$D(t)(x - z_0(t))^{-n-1} = F(x,t) \qquad (2.10)$$

$$F(x,t) = -\frac{1}{2}\left\{H[S_t] + g\int_{-\infty}^{t} S_x(x,\tau)d\tau + i\left(S_t - gH\left[\int_{-\infty}^{t} S_x(x,\tau)d\tau\right]\right)\right\} \qquad (2.11)$$

Если под свободной поверхностью жидкости движется N гидродинамических особенностей, имеющих порядки n_k, интенсивности $C_k = C_k(t)$ и законы движения $z_k = z_k(t)$, $k = 1, ..., N$, то, в силу линейности рассматриваемого приближения малых волн, вместо соотношения (2.10) будем иметь равенство

$$\sum_{k=1}^{N} D_k(t)(x - z_k(t))^{-n_k-1} = F(x,t) \qquad (2.12)$$

В любой фиксированный момент времени t левые части равенств (2.10), (2.12) имеют вид левых частей соотношений (1.13), (1.15) соответственно, а значения их правых частей $F(x, t)$ определяются по данным опыта в некоторых точках x_1, ..., x_M. Это означает, что координаты $z_k(t)$ и интенсивности $C_k(t)$ гидродинамических особенностей могут быть определены для любого фиксированного значения t методом, изложенным в предыдущем разделе. В частности, задача нахождения координат и интенсивностей уединенных вихрей, источников и вихреисточников, а также двух вихреисточников с интенсивностями противоположных знаков, равными по модулю, может быть сведена к определению коэффициентов многочлена наилучшего среднеквадратичного приближения классическим методом наименьших квадратов.

Заключение. Предложенный способ определения координат и интенсивностей локализованных в толще потока гидродинамических особенностей заданного порядка может быть использован для приближенного воссоздания внутреннего течения по данным наблюдений свободной поверхности. Имея априорную информацию о характере присутствующей в потоке неоднородности, можно задаться ее моделью в виде небольшого числа гидродинамических особенностей определенного порядка и найти те значения их параметров, при которых достигается наилучшее согласование с экспериментально наблюдаемой картиной на свободной поверхности. Если выбранная система особенностей соответствует характеру возмущающей поток неоднородности, то индуцируемое ею течение будет приближенно соответствовать имеющему место в действительности. Например, в случае стационарного течения полученные таким образом линии тока дадут представление о возможной форме обтекаемого препятствия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-01133).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Келдыш М.В.* Замечания о некоторых движениях тяжелой жидкости // М.В. Келдыш. Избранные труды. Механика. М.: Наука, 1985. С. 100–102.
2. *Келдыш М.В., Лаврентьев М.А.* О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости // М.В. Келдыш. Избранные труды. Механика. М.: Наука, 1985. С. 120–151.
3. *Савин А.С.* Нестационарный вариант метода М.В. Келдыша в задаче о точечной особенности под свободной поверхностью // Докл. РАН. 1999. Т. 365. № 5. С. 628–629.
4. *Коновалов А.В., Левченко Е.С., Савин А.С.* Восстановление плоского течения тяжелой идеальной жидкости по форме ее свободной поверхности // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 2. С. 294–296.

5. *Исиченко И.В., Коновалов А.В., Левченко Е.С., Савин А.С.* Обратная задача обтекания особенностей плоским потоком идеальной жидкости со свободной границей // ПМТФ. 1989. № 6. С. 86–91.
6. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
7. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
8. *Мэтьюз Д., Уокер Р.* Математические методы физики. М.: Атомиздат, 1972. 398 с.
9. *Bojarintsev V.I., Burago N.G., Lednev A.K., Frost V.A.* Application of reflected grid method for examination of small surface deformation of moving fluid // Flow Visualizat. and Image Processing. 1993. V. 1. № 3. P. 235–238.
10. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
11. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 535 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.XI.1999