

УДК 532.546.013.4:536.25

© 2001 г. М.М. РАМАЗАНОВ

## ВЛИЯНИЕ СКИН-ЭФФЕКТА НА КОНВЕКТИВНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ БИНАРНОЙ СМЕСИ В ПОРИСТОМ СЛОЕ ПРИ МОДУЛЯЦИИ ГРАНИЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

Изучается влияние скин-эффекта на конвективную устойчивость бинарной смеси в горизонтальном пористом слое при модуляции температуры на одной из границ. Как частный рассмотрен и случай отсутствия примеси.

В [1] приводится подробное решение задачи о конвективной устойчивости однородной вязкой жидкости в горизонтальной полости при модуляции разности температур на границах. В [2] рассмотрена устойчивость бинарной смеси в пористом слое с учетом перекрестных кинетических и гравитационного эффектов при стационарных граничных условиях. В [3] в приближении отсутствия скин-эффекта была рассмотрена задача о конвективной устойчивости бинарной смеси в горизонтальном пористом слое в случаях модуляции температуры или концентрации на границах слоя. В настоящей работе путем сравнения решения задачи в приближении отсутствия скин-эффекта и решения в более точной постановке изучается влияние скин-эффекта на устойчивость смеси.

**1. Постановка задачи. Амплитудные уравнения.** Имеется горизонтальный пористый слой толщиной  $L$ , насыщенный бинарной смесью газов или жидкостей. На одной из границ (для определенности – верхней) температура меняется по синусоидальному закону с амплитудой  $T_0$  и частотой  $\omega$ . Уравнения конвекции бинарной смеси в пористом слое в приближении Дарси – Буссинеска без учета перекрестных эффектов и граничные условия можно записать в виде [2].

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, & -\nabla p - \frac{\eta}{k} \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}(1 - \beta_T T - \beta_c C) &= 0 \\ C_m \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 C_p \mathbf{u} \nabla T &= \lambda \Delta T, & m \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla C &= D \Delta C \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} T &= T_1, & C &= C_1, & z &= 0 \\ T &= T_2 - T_0 \sin \omega t, & C &= C_2, & z &= L \end{aligned}$$

Здесь  $T$ ,  $C$  – температура смеси и концентрация легкого компонента, отсчитываемые от характерных значений,  $\rho_0$  – характерная плотность,  $p$  – давление в смеси,  $m$  – пористость,  $\eta$  – вязкость,  $k$  – проницаемость,  $C_m$  – эффективная теплоемкость единицы объема пористой среды,  $C_p$  – теплоемкость смеси при постоянном давлении,  $\lambda$  – эффективная теплопроводность пористой среды,  $D$  – коэффициент диффузии,  $\beta_T$ ,  $\beta_c$  – коэффициенты температурного и концентрационного расширения.

Установившееся решение системы (1.1) при механическом равновесии ( $\mathbf{u} = 0$ ) имеет вид

$$T_s = T_1 - Az + \theta_s(z, t), \quad C = C_1 - Bz$$

$$\theta_s = \theta_1(z) \sin \omega t + \theta_2(z) \cos \omega t \quad (1.2)$$

$$A = \frac{T_1 - T_2}{L}, \quad B = \frac{C_1 - C_2}{L}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{C_m \omega}{2\lambda}}$$

$$\theta_1(z) = -T_0 [Q_1 \operatorname{sh} \alpha z \cos \alpha z + Q_2 \operatorname{ch} \alpha z \sin \alpha z], \quad Q_1 = \frac{\operatorname{sh} \alpha L \cos \alpha L}{S}$$

$$\theta_2(z) = -T_0 [Q_1 \operatorname{ch} \alpha z \sin \alpha z - Q_2 \operatorname{sh} \alpha z \cos \alpha z], \quad Q_2 = \frac{\operatorname{ch} \alpha L \sin \alpha L}{S}$$

$$S = \operatorname{sh}^2 \alpha L \cos^2 \alpha L + \operatorname{ch}^2 \alpha L \sin^2 \alpha L$$

Линеаризуя систему (1.1) в окрестности механического равновесия  $T_s(z, t)$ ,  $p_s(z, t)$ ,  $C_s(z, t)$

$$p = p_s + p', \quad T = T_s + T', \quad C = C_s + C', \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}'$$

запишем ее в безразмерном виде. При этом введем следующие характерные масштабы:  $L$  – длины,  $C_m L^2 / \lambda$  – времена,  $AL$  – температуры,  $BL \lambda / \rho_0 C_p D$  – концентрации,  $\eta \lambda / \rho_0 C_p k$  – давления,  $\lambda / \rho_0 C_p L$  – скорости.

Опуская штрихи и исключив  $u_x$ ,  $u_y$  и  $p$ , получим следующую безразмерную систему:

$$\Delta u_z - \Delta_{xy} (RT + R_D C) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} - u_z \left( 1 - \frac{d\theta_s}{dz} \right) = \Delta T$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \gamma u_z = \gamma \Delta C, \quad R = \frac{\rho_0 g \beta_T A L^2 k}{\eta \lambda}, \quad R_D = \frac{\rho_0 g \beta_C B L^2 k}{\eta D} \quad (1.3)$$

$$P = \frac{C_m L^2 \eta}{k \lambda \rho_0}, \quad P_D = \frac{m L^2 \eta}{k \rho_0 D}, \quad \gamma = \frac{P}{P_D} = \frac{C_m D}{m \lambda}$$

Здесь  $R, R_D$  – фильтрационное и диффузионное числа Рэлея,  $P, P_D$  – числа Прандтля. Используем для решения системы (1.3) метод Галеркина – Бубнова [1]. Для этого представим решение в виде

$$u_z = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sum_{m=1}^{\infty} W_m(t) \sin \pi m z, \quad T = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) \sin \pi m z,$$

$$C = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sum_{m=1}^{\infty} g_m(t) \sin \pi m z, \quad \mathbf{k}\mathbf{t} = k_x x + k_y y \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.3) для амплитуд, получим бесконечную систему уравнений

$$-W_n + \frac{k^2}{\pi^2 n^2 + k^2} (R f_n + R_D g_n) = 0 \quad (1.5)$$

$$\dot{f}_n - W_n + \sum_{m=1}^{\infty} W_m G_{mn} = -(\pi^2 n^2 + k^2) f_n, \quad \dot{g}_n - \gamma W_n = -\gamma (\pi^2 n^2 + k^2) g_n$$

$$G_{mn} = 2 \int_0^1 \frac{d\theta_s}{dz} \sin \pi m z \sin \pi n z dz, \quad n = 1, 2, \dots$$

Сделаем следующие преобразования:

$$\tau = 2\pi^2 t, \quad R' = \frac{R}{4\pi^2}, \quad R'_D = \frac{R_D}{4\pi^2}, \quad r = R'\delta = R' \frac{T_0 L}{A}$$

$$f_n = R'_D x_n, \quad g_n = R' y_n \quad (1.6)$$

Учитывая (1.6), после исключения  $W_n$  и вычисления  $G_{mn}$  из (1.5) получим систему

$$\dot{x}_n + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{c_f}{\alpha_m} - \alpha_m R' \right) \delta_{mn} + \alpha_m G_{mn} \right] x_m - \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_m \delta_{mn} R' - \alpha_m G_{mn}] y_m = 0$$

$$\dot{y}_n - \alpha_n \gamma R'_D x_n + \gamma \left( \frac{c_f}{\alpha_n} - \alpha_n R'_D \right) y_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

$$c_f = \frac{k^2}{\pi^2}, \quad \alpha_m = \frac{2k^2}{\pi^2 m^2 + k^2}, \quad G_{mn} = -2\alpha r [(Q_1 + Q_2) I_{mn} - (Q_1 - Q_2) J_{mn}] \sin \Omega \tau - 2\alpha r [(Q_1 - Q_2) I_{mn} + (Q_1 + Q_2) J_{mn}] \cos \Omega \tau$$

$$I_{mn} = I_{mn}^1 + I_{mn}^2 - I_{mn}^3 - I_{mn}^4, \quad J_{mn} = J_{mn}^1 + J_{mn}^2 - J_{mn}^3 - J_{mn}^4$$

$$I_{mn}^i = \frac{\alpha}{4(\alpha^2 + \gamma_i^2)} \left[ \operatorname{sh} \alpha \cos \gamma_i + \frac{\gamma_i}{\alpha} \operatorname{ch} \alpha \sin \gamma_i \right]$$

$$J_{mn}^i = \frac{\alpha}{4(\alpha^2 + \gamma_i^2)} \left[ \operatorname{ch} \alpha \sin \gamma_i - \frac{\gamma_i}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha \cos \gamma_i \right], \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\gamma_1 = \alpha - \pi(m-n), \quad \gamma_2 = \alpha + \pi(m-n), \quad \gamma_3 = \alpha - \pi(m+n)$$

$$\gamma_4 = \alpha + \pi(m+n), \quad \alpha = \sqrt{\frac{C_m L^2 \omega}{2\lambda}}, \quad \Omega = \frac{C_m L^2 \omega}{2\pi^2 \lambda}$$

Здесь точка означает производную по  $\tau$ ,  $\delta_{mn}$  – элементы единичной матрицы.

В приближении отсутствия скин-эффекта система (1.7) сводится к виду [3]

$$\dot{x} + (c_f - R' - r \sin \Omega \tau) x - (R' + r \sin \Omega \tau) y = 0$$

$$\dot{y} - \gamma R'_D x + \gamma (c_f - R'_D) y = 0 \quad (1.8)$$

Система (1.8) справедлива при малом  $\epsilon$ , пропорциональном произведению частоты модуляции на амплитуде ( $\epsilon = C_m L^2 \omega \delta / \lambda \ll 1$ ,  $\delta = T_0 / AL$  – безразмерная амплитуда модуляции) [3].

**2. Решение задачи.** Для нахождения критерия устойчивости необходимо найти периодические решения системы (1.7), которые разделяют растущие и затухающие возмущения равновесия. В системе (1.7) ограничиваемся первыми  $2N$  уравнениями с  $2N$  неизвестными. При этом в рядах (1.7) сохраняем  $N$  слагаемых. Число уравнений  $2N$  определяем из условия малости поправки к решению при переходе к  $2(N+1)$  уравнениям. Для нахождения периодического решения представим его в виде линейной комбинации  $2N$  независимых решений

$$\bar{\varphi}_i = (\varphi_{i1}(t), \varphi_{i2}(t), \dots, \varphi_{iN}(t)), \quad \bar{\psi}_i = (\psi_{i1}(t), \psi_{i2}(t), \dots, \psi_{iN}(t)), \quad i = 1, 2, \dots, 2N$$

$$x_k = \sum_{i=1}^{2N} c_i \varphi_{ik}(t), \quad y_k = \sum_{i=1}^{2N} c_i \psi_{ik}(t), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

$$\varphi_{ik}(0) = \delta_{ik}, \quad \psi_{ik}(0) = \delta_{ik+N}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, 2N$$

Здесь  $\delta_{ij}$  – единичная матрица размера  $2N \times 2N$ .

Из условия периодичности решения (2.1)  $x_k(0) = \rho x_k(2\pi/\Omega)$ ,  $y_k(0) = \rho y_k(2\pi/\Omega)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  ( $\rho = \pm 1$ ) получим систему  $2N$  линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $2N$  коэффициентов  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2N$ ). Из условия разрешимости этой системы находим нейтральную кривую  $r = r(\Omega, k, R', R'_D, \gamma)$ , на которой реше-

ния (1.7) периодичны. При этом при  $\rho = 1$  получаем целые решения, у которых период колебаний совпадает с периодом модуляции граничной температуры, а при  $\rho = -1$  – полуцелые решения, период которых вдвое больше периода модуляции.

Задача решалась следующим образом. При фиксированных параметрах  $r, \Omega, k, R', R'_D, \gamma$  методом Рунге – Кутты находим фундаментальную систему решений (2.1) системы (1.7). После чего находим элементы матрицы  $b_{ij}$

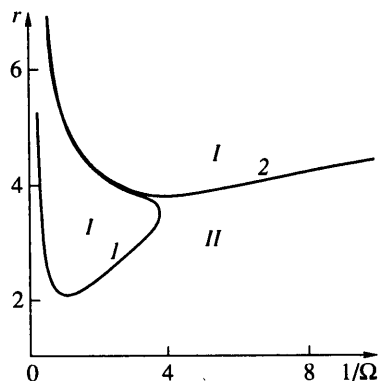
$$b_{ik} = \rho \delta_{ik} - \varphi_{ik}(T), \quad b_{ik+N} = \rho \delta_{ik+N} - \psi_{ik}(T), \quad T = \frac{2\pi}{\Omega}, \quad \rho = \pm 1, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, 2N \quad (2.2)$$

Далее меняем  $r$ , пока определитель матрицы (2.2) не станет равным нулю с необходимой точностью. Таким образом, для каждого  $\Omega$  находим соответствующее  $r$ , отвечающее нейтральной кривой, выше которой возмущения нарастают, ниже – затухают, на самой кривой возмущения периодичны.

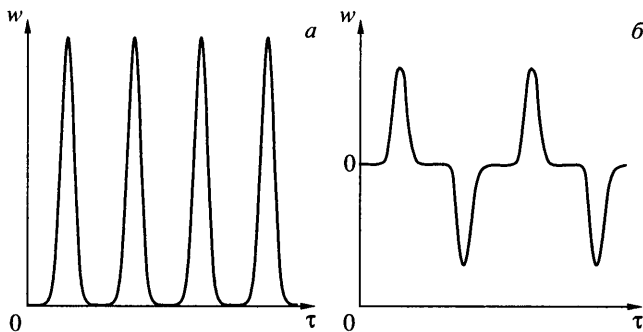
**3. Обсуждение результатов.** Рассмотрим случай отсутствия примеси. Указанный случай получим, полагая в (1.7)  $R'_D = 0, y_n = 0, n = 1, 2, \dots$ . Аналогично в приближении отсутствия скин-эффекта чистой жидкости соответствует первое уравнение (1.8), где необходимо положить  $R'_D = 0, y = 0$ . В последнем случае уравнение легко интегрируется и, согласно [3], модуляция граничной температуры не приводит к изменению критерия устойчивости, т.е. при  $R' > 1$  равновесие неустойчиво, а при  $R' < 1$  устойчиво при любых частотах и амплитудах модуляции. Этот результат связан как с отсутствием инерционного члена в рассматриваемом уравнении движения, так и с пренебрежением скин-эффектом.

Влияние инерционного члена показано в [1]. При учете скин-эффекта, как следует из расчетов системы (1.7), в случае  $R' > 1$  механическое равновесие остается неустойчивым при любых частотах и амплитудах модуляции. При любых  $R' < 1$  на плоскости  $(r, \Omega)$  существует нейтральная кривая, на которой возмущения периодичны. Выше этой кривой возмущения нарастают, а ниже затухают. Таким образом, при  $R' < 1$  скин-эффект дестабилизирует равновесие. На фиг. 1 приведена нейтральная кривая для  $R' = 0.8$ . Нейтральная кривая состоит из двух частей (1 и 2 фиг. 1), которые асимптотически сближаются с увеличением частоты модуляции. Здесь кривой 1 соответствуют "целые" знакопостоянные решения (фиг. 2, а), а кривой 2 "полуцелые" знакопеременные решения (фиг. 2, б).

При фиксированной частоте модуляции  $\Omega > \Omega_*(R')$  с ростом амплитуды нейтральная кривая пересекается трижды (рис. 1), а при  $\Omega < \Omega_*(R')$  – один раз. При этом каждому пересечению соответствует смена устойчивости механического равновесия. Таким образом, при пересечении нижней ветви кривой 1 система теряет устойчивость, при пересечении верхней ветви система снова приходит в устойчивое равновесие и при пересечении кривой 2 вновь теряет устойчивость. Хотя область устойчивого равновесия между кривыми 1 и 2 на фиг. 1 заметна лишь в небольшом интервале изменения  $\Omega$ , она существует по крайней мере во всем интервале частот  $\Omega > \Omega_*(R')$ , указанном на фиг. 1. В частности, на фиг. 2 рассмотрены амплитуда скорости в зависимости от времени, соответствующие достаточно близким точкам на кривых 1 и 2 фиг. 1 ( $1/\Omega = 1,09$ ). Между этими точками возмущения затухают.

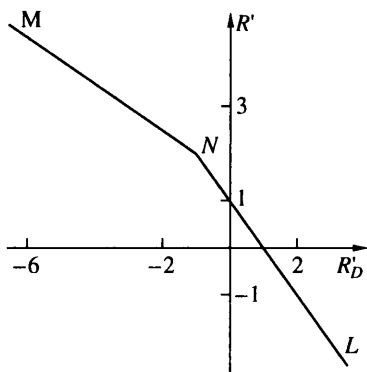


Фиг. 1. Нейтральная кривая на плоскости  $(r, 1/\Omega)$  при отсутствии примеси и  $R' = 0,8$ , I – области неустойчивости, II – область устойчивости



Фиг. 2

Фиг. 2. Амплитуда скорости нейтральных возмущений в зависимости от времени при  $1/\Omega = 1,09$ ;  $a - r = 4,9931$ ;  $b - r = 5,01$



Фиг. 3

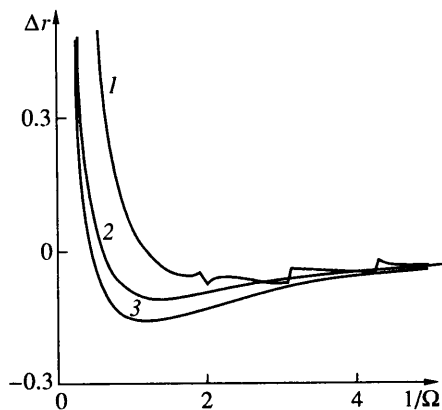
Фиг. 3. Карта устойчивости бинарной смеси на плоскости чисел Рэля при отсутствии модуляции;  $MNL$  – граница устойчивости

Из фиг. 1 видно, что с уменьшением частоты модуляции амплитуда нейтральной кривой растет так, что  $\epsilon$  остается конечным. Отсюда следует, что для чистой жидкости приближение отсутствия скин-эффекта (1.8) неприемлемо даже при малых частотах модуляции. В случае наличия примеси, как следует из [3], амплитуда нейтральной кривой с уменьшением частоты стремится к постоянному значению, что делает возможным пренебрежение скин-эффектом при малых частотах.

Рассмотрим случай наличия примеси. Расчеты проводились для значения  $\gamma = 0,5$ . Карта устойчивости на плоскости  $R', R'_D$  показана на фиг. 3. Ломаная  $MNL$  является границей устойчивости бинарной смеси при стационарных граничных условиях, т.е. при отсутствии модуляции [2]. Причем при пересечении луча  $MN$  (снизу вверх) имеет место колебательная неустойчивость, а при пересечении луча  $NL$  – монотонная неустойчивость. В случае отсутствия скин-эффекта решалась система (1.8). Подробный анализ результатов в этом случае приведен в [3]. Влияние скин-эффекта выявлено с помощью более точной системы (1.7). Расчеты, проведенные с помощью шести и восьми уравнений в системе (1.7), в приведенном на фиг. 4 масштабе практически не различаются.

Выше ломаной  $MNL$  равновесие неустойчиво для любых частот и амплитуд модуляции. Каждой точке в области ниже ломаной  $MNL$  на плоскости  $(r, \Omega)$  соответствует нейтральная кривая, на которой возмущения периодичны. Выше этой кривой возмущения нарастают, ниже – затухают. При фиксированных прочих параметрах (на нейтральной кривой)  $r$  имеет минимум по волновому числу при  $k = k_c$ . При этом  $k_c \rightarrow \pi$  при  $\Omega \rightarrow 0$ . С увеличением  $\Omega$  критическое волновое число растет. Критическая нейтральная кривая в рассматриваемом на фиг. 1 и 4 масштабе и интервале изменения частот практически не отличается от нейтральной кривой при  $k = \pi$ .

Фиг. 4. Поправка критической амплитуды на скин-эффект в зависимости от частоты модуляции ( $\Delta r(\Omega) = (r - r_0)/r_0$ ) при  $\gamma = 0,5$  и  $(R', R'_D) = (2, 1; -2), (-2; 2), (-3,5; 2)$  (кривая 1-3)



Учет скин-эффекта количественно изменяет нейтральную кривую. Влияние скин-эффекта объясняет фиг. 4. Здесь приведена зависимость относительной разности критических амплитуд модуляции при наличии и отсутствии скин-эффекта ( $\Delta r = (r - r_0)/r_0$ ) от частоты  $\Omega$  для разных значений чисел Рэлея. Кривая 1 соответствует области затухающих колебательных возмущений при отсутствии модуляции ( $R' = 2, 1, R'_D = -2$ ) [2], а кривые 2, 3 — области затухающих монотонных возмущений ( $R' = -2, R'_D = 2; R' = -3,5; R'_D = 2$ ). Из фиг. 4 следует, что при больших частотах модуляции скин-эффект играет стабилизирующую роль ( $\Delta r > 0$ ), которая сменяется на дестабилизирующую с уменьшением частоты. При малых частотах влияние скин-эффекта мало. Сравнивая кривые 2 и 3 на фиг. 4, можно определить характер изменения поправки на скин-эффект при движении вниз от ломаной  $MNL$  на фиг. 3.

**Заключение.** Исследовано влияние скин-эффекта на конвективную неустойчивость бинарной смеси в пористом слое при модуляции граничной температуры. В случае отсутствия примеси пренебрежение скин-эффектом приводит к независимости критерия устойчивости от наличия модуляции температуры. При учете скин-эффекта модуляция дестабилизирует положение равновесия. При этом, когда приведенное число  $R'' > 1$ , равновесие неустойчиво при любых частотах и амплитудах модуляции. При  $R'' < 1$  в плоскости амплитуда — частота модуляции ( $r, \Omega$ ) существует нейтральная кривая, выше которой возмущения нарастают, ниже затухают, на самой кривой возмущения периодичны.

В случае наличия примеси скин-эффект приводит к некоторой стабилизации равновесия при больших частотах модуляции и дестабилизации с уменьшением частоты. При достаточно малых частотах влияние скин-эффекта не сказывается.

Автор выражает благодарность А.А. Бармину за существенные замечания к этой и нескольким ранее опубликованным в данном журнале работам.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Бедриковецкий П.Г., Полонский Д.Г., Шапиро А.А. Анализ конвективной неустойчивости бинарной смеси в пористой среде // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 1. С. 110–119.
3. Рамазанов М.М. Устойчивость бинарной смеси в пористом слое при модуляции параметров // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 5. С. 118–125.