

УДК 532.526.4:537.86.187

© 2001 г. В.П. РЕУТОВ, Г.В. РЫБУШКИНА

КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ГЕНЕРАЦИИ ГИДРОУПРУГИХ ВОЛН В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА УПРУГОМ ПОКРЫТИИ

Исследована генерация волн в турбулентном пограничном слое на упругом покрытии, обтекаемом потоком несжимаемой жидкости. Отклонение поверхности покрытия представлено в виде суперпозиции гармоник со случайными фазами. Реакция потока на волнистый прогиб поверхности определена в квазилинейном приближении. Расчеты проведены на основе локальной модели турбулентного пограничного слоя и численного решения уравнений Прандтля. Получены уравнения конкуренции быстрых волн, возбуждаемых на покрытии с малыми потерями. Результаты их решения сопоставлены с известными экспериментальными данными.

Исследование генерации волн на упругих покрытиях, взаимодействующих с потоками несжимаемой жидкости, вызывает значительный интерес в связи с потенциальной возможностью снижения гидродинамического сопротивления [1, 2]. Кроме того, явление генерации гидроупругих волн играет существенную роль в биомеханических течениях жидкости [3]. В этой связи важное значение имеет анализ механизмов нелинейного развития и стабилизации гидроупругих неустойчивостей [4].

К настоящему времени в наибольшей степени развита линейная теория гидроупругих неустойчивостей, возникающих при ламинарном обтекании покрытий (см. [5, 6]). Детальное экспериментальное исследование генерации гидроупругих волн в режиме турбулентного пограничного слоя проведено в [7, 8], где показано, что на покрытиях с малыми потерями развивается неустойчивость быстрых волн – флаттер бегущей волны, тогда как на покрытиях с большими потерями (вязкоупругие покрытия) возникает квазистатическая неустойчивость (дивергенция).

Теоретическое исследование линейного взаимодействия турбулентного пограничного слоя с гибкими стенками проведено в [9–11]. Для построения линейной теории гидроупругой неустойчивости, возникающей при взаимодействии турбулентного пограничного слоя с однослойным покрытием, в [12] использована гипотеза вихревой вязкости, что дало хорошее совпадение критической скорости с экспериментальными данными [7, 8].

В [13] получено уравнение Ландау, описывающее нелинейную стадию развития гидроупругой неустойчивости при малых наклонах поверхности покрытия. При этом было обнаружено, что уже при малых надкритичностях (медленном нарастании возмущений) полоса генерации по волновому числу становится широкой, в связи с чем в рамках однододовой модели возникает неопределенность в выборе волнового числа установившейся волны.

Для устранения этой неопределенности в данной работе изучаются нелинейные процессы конкуренции гармоник в широком волновом пакете гидроупругих волн, возбуждаемом в режиме слабой неустойчивости и малой нелинейности. Взаимодействие покрытия с течением описывается в квазилинейном приближении [14], когда основным нелинейным эффектом является деформация среднего (по периоду волнисто-

сти) течения в пограничном слое [15, 16]. Квазилинейная теория взаимодействия пограничного слоя Прандтля с синусоидальной волнистостью [14] обобщена на случай многоволнового прогиба поверхности.

1. Уравнения для среднего и осциллирующего течения в криволинейных координатах. Рассмотрим турбулентный пограничный слой на плоской поверхности с гидродинамически гладким упругим покрытием, начинающимся в сечении $x = x_0$. Оси x и y декартовой системы координат направлены вдоль потока и по нормали к невозмущенной поверхности покрытия. Вводится система криволинейных координат (ξ, η) , отслеживающая прогибы поверхности покрытия в виде произвольного набора фурье-гармоник

$$\begin{aligned} x &= \xi + \frac{1}{2} \sum_k [ia_k e^{ik(\xi - c_k t) - k\eta} + \text{к.с.}] \\ y &= \eta + \frac{1}{2} \sum_k [a_k e^{ik(\xi - c_k t) - k\eta} + \text{к.с.}] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь a_k, c_k – комплексная амплитуда и фазовая скорость гармоники с волновым числом k , суммирование производится по $k > 0$; к.с. – комплексно сопряженное выражение. Предполагается, что координатная линия $\eta = 0$ совпадает с поверхностью покрытия.

Преобразование координат (1.1) является ортогональным и конформным, т.е. удовлетворяет условиям $x_\xi = y_\eta, x_\eta = -y_\xi$. Переход от декартовых к криволинейным координатам проводится с учетом выражений $\xi_x = y_\eta/J, \xi_y = -x_\eta/J, \eta_x = -y_\xi/J, \eta_y = x_\xi/J$, где $J = \partial(x, y)/\partial(\xi, \eta) = x_\xi^2 + y_\xi^2$ – якобиан преобразования (1.1). В дальнейшем предполагается, что выполнено условие малых прогибов поверхности, которое при некогерентном сложении волн имеет вид

$$\sqrt{\sum_k |ka_k|^2} \ll 1 \quad (1.2)$$

В этом случае амплитуды a_k близки к соответствующим коэффициентам фурье-разложения отклонения поверхности как функции x . Когда в суммах (1.1) остается только одна гармоника, после перехода к $\xi_1 = x - c_k t$ получаются выражения для криволинейных координат, использованные в [16, 14].

Замыкание уравнений турбулентного течения в пограничном слое проводится с помощью алгебраической модели турбулентной вязкости, в которой задается коэффициент суммарной (эффективной) вязкости, отнесенный к плотности потока ρ_0 : $\nu = \nu_0 + \nu_t$, где ν_0 и ν_t – молекулярная и турбулентная вязкости. Основное предположение относительно коэффициента ν состоит в том, что при дифференцировании по ξ и η достаточно учесть в явном виде его зависимость только от поперечной криволинейной координаты η .

Разделение характеристик течения на средние и осциллирующие составляющие производится в системе координат (ξ, η) вдоль координатных линий $\eta = \text{const}$. Среднее течение предполагается квазипараллельным, т.е. масштаб расширения пограничного слоя $L = \delta/(d\delta/dx)$ удовлетворяет условиям $L/\delta \gg 1, kL \gg 1$ (δ – толщина пограничного слоя). Соответственно для построения фурье-разложений квазипериодических по ξ функций $F(\xi)$ вводится операция локального усреднения

$$\langle F \rangle = \frac{1}{\Lambda} \int_{\xi - \frac{1}{2}\Lambda}^{\xi + \frac{1}{2}\Lambda} F(\xi') d\xi' \quad (1.3)$$

где длина интервала усреднения Λ удовлетворяет условию $k^{-1} \ll \Lambda \ll L$.

Уравнения для функции тока Ψ и завихренности χ в течении с переменной вязкостью получены в [16, 14] без учета зависимости преобразования координат от t .

Их обобщение для преобразования координат (1.1), зависящего от t , имеет вид

$$\begin{aligned} & J\chi_t + \chi_\xi(y_t x_\eta - x_t y_\eta) + \chi_\eta(x_t y_\xi - y_t x_\xi) + \Psi_\eta \chi_\xi - \Psi_\xi \chi_\eta - \\ & - (v\chi)_{\xi\xi} - (v\chi)_{\eta\eta} = -\frac{2}{J} v_{\eta\eta} \Psi_{\xi\xi} - \frac{J_\eta}{J^2} [(\Psi_\eta v_\eta)_\eta - v_\eta \Psi_{\xi\xi}] - \\ & - \frac{J_\xi}{J^2} (2v_\eta \Psi_{\xi\eta} - \Psi_\xi v_{\eta\eta}) + v_\eta \Psi_\eta \frac{J_\xi^2 + J_\eta^2}{J^3} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\Psi_{\xi\xi} + \Psi_{\eta\eta} = J\chi$$

Граничные условия непротекания и равенства нулю тангенциальной скорости на твердой границе принимают вид

$$y_t x_\xi - x_t y_\xi + \Psi_\xi = 0, \quad \Psi_\eta = 0 \quad (\eta = 0) \quad (1.5)$$

Кроме того, налагается условие перехода к потенциальному течению при $y = \delta_1 = 2\delta$.

Процедура решения краевой задачи для многоволнового прогиба в основном повторяет данную в [14] для моногармонического прогиба. Решение (1.4) ищется в квазилинейном приближении, в котором нелинейный отклик потока определяется деформацией среднего течения под действием волнистости [14]

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_0(\eta, \xi) + \frac{1}{2} \sum_k [a_k \psi_k(\eta, \xi) e^{ik(\xi - c_k t)} + \text{к.с.}] \\ \chi &= \chi_0(\eta, \xi) + \frac{1}{2} \sum_k [a_k \chi_k(\eta, \xi) e^{ik(\xi - c_k t)} + \text{к.с.}] \end{aligned} \quad (1.6)$$

где Ψ_0 и χ_0 – функция тока и завихренность среднего течения, ψ_k и χ_k – комплексные профили k -й гармоники; плавная (с масштабом порядка L) зависимость этих коэффициентов от ξ учитывает слабую непараллельность течения в пограничном слое. Далее ограничимся определением реакции течения в пограничном слое в квазистационарном приближении, считая в (1.1), (1.6) $a_k = \text{const}$.

Подставим выражения (1.6) в уравнения (1.4), (1.5) и проведем разложение в ряд по степеням малого $|ka_k|$. В первом порядке по $|ka_k|$ получается краевая задача Орра – Зоммерфельда для профилей гармоник ψ_k и χ_k , которая совпадает с аналогичной задачей моногармонической теории. Обозначим через ϕ функцию тока в системе отсчета, сопутствующей гармонике с фазовой скоростью c_k . Тогда $\Psi = \phi + c_k y$ и в соответствии с (1.1) и (1.6) получим $\psi_k = \phi_k + c_k \exp(-k\eta)$, где ϕ_k – комплексные профили гармоник ϕ , которые определяются подобно (1.6). В дальнейшем, чтобы сохранить запись уравнений [14], перейдем в (1.6) от ψ_k к амплитудным профилям ϕ_k .

Введем безразмерные переменные, используя динамическую скорость u_* и толщину вытеснения по дефекту скорости $\Delta = \delta_* / \gamma$, где δ_* – толщина вытеснения турбулентного пограничного слоя, $\gamma = u_* / U$ (U – скорость свободного течения). Они принимают вид

$$\begin{aligned} k' &= k\Delta, \quad Y = \frac{\eta}{\Delta}, \quad N = \frac{v}{U\delta_*}, \quad C(k') = \frac{c_k}{u_*} \\ \Omega_0 &= \frac{\chi_0 \Delta}{u_*}, \quad \varphi(k', Y) = \frac{\phi_k}{ku_* \Delta}, \quad \Omega(k', Y) = \frac{\chi_k \Delta}{ku_*} \end{aligned}$$

Предполагается, что профиль безразмерного коэффициента вязкости $N = N(Y)$ зависит от одного варьируемого параметра – локального числа Рейнольдса $R = \delta_* U / \nu_0$ [14]. В результате уравнения и граничные условия краевой задачи для осциллирую-

щего течения принимают вид

$$ik'[(u_0 - C)\Omega - \Omega_{0Y}\varphi] = \left(\frac{d^2}{dY^2} - k'^2\right)(N\Omega) +$$

$$+ 2N_{YY}k'^2\varphi - 2k'^2e^{-k'Y} \frac{d}{dY}[N_Y(u_0 - C)]$$

$$\left(\frac{d^2}{dY^2} - k'^2\right)\varphi = \Omega - 2e^{-k'Y} \Omega_0 \quad (1.7)$$

$$\Omega = 0, \quad \varphi_Y + k'\varphi = 0 \quad (Y = \delta_1 / \Delta); \quad \varphi = 0, \quad \varphi_Y = C \quad (Y = 0) \quad (1.8)$$

где $u_0 = \Psi_{0\eta}/u_*$. Заметим, что производную $\Psi_{0\eta}$ можно рассматривать как "эффективный" (определяемый по массовому расходу) профиль скорости среднего течения.

В уравнениях среднего течения удерживаются члены второго порядка по $|ka_k|$, описывающие влияние волновых напряжений, а также члены первого порядка по δ/L , ответственные за расширение пограничного слоя. Основное отличие системы уравнений Прандтля для Ψ_0, χ_0 от аналогичной системы в моногармонической теории [14] состоит в том, что в нее входит сумма волновых напряжений, создаваемых всеми гармониками волнового поля. Перейдем от Ψ_0 к безразмерной функции тока по дефекту скорости f

$$\Psi_0 = U\eta - u_*\Delta f(Y, \xi)$$

При этом в (1.7) делается замена $u_0 = 1/\gamma - f_Y$ и пара уравнений для f и Ω_0 принимает вид

$$(N\Omega_0)_Y = g_X(\gamma^{-1}Y f_{YY} - ff_{YY}) + b(2f_Y - \gamma f_Y^2 -$$

$$- Yf_{YY} + Yff_{YY}) - \gamma^{-1}\gamma_X g(\gamma^{-1}f_Y - f_Y^2 + ff_{YY}) -$$

$$- g(\gamma^{-1}f_{XY} - f_Y f_{XY} + f_X f_{YY}) + F_1 \quad (1.9)$$

$$f_{YY} = -(\Omega_0 + F_2)$$

где $g = \Delta/\Delta(x_0)$, $X = (\xi - x_0)/\Delta(x_0)$; $F_{1,2}$ - волновые напряжения, определенные выражениями

$$F_1 = \sum_k [k'N_Y \operatorname{Re}(\varphi_Y - k'\varphi)e^{-k'Y} + 2k'N_Y(u_0 - C)e^{-2k'Y} -$$

$$- \frac{1}{2}k' \operatorname{Im}(\varphi^* \Omega)] |ka_k|^2, \quad F_2 = \sum_k (\Omega_0 e^{-2k'Y} - e^{-k'Y} \operatorname{Re} \Omega) |ka_k|^2 \quad (1.10)$$

и введен безразмерный градиент давления [17] $b = \delta_*(\rho_0 u_*^2)^{-1} dP/dx$ ($P(x)$ - давление во внешнем потоке). Граничные условия для (1.9) остаются такими же, как в [14]

$$f = 0; \quad f_Y = \gamma^{-1} (Y = 0); \quad f_Y = 0 \quad (Y = \delta_1 \Delta^{-1}) \quad (1.11)$$

При $a_k = 0$ система (1.9) переходит в уравнения турбулентного пограничного слоя на плоской поверхности [17, 18]. Следует подчеркнуть, что представление $F_{1,2}$ в виде (1.10) предполагает усреднение по случайным фазам гармоник пакета при отсутствии корреляции между ними, так как для регулярных пакетов волновые напряжения, создаваемые гармониками с близкими значениями k , не исчезают после операции усреднения (1.3). Данное представление $F_{1,2}$ применимо также для регулярных пакетов с достаточно разреженным спектром по k (например, для кратных гармоник).

Для того чтобы замкнуть систему уравнений (1.7)–(1.11), необходимо дополнить ее выражениями для величин u_* и δ_* . В [14] динамическая скорость u_* определялась через турбулентный поток импульса на границе буферной области турбулентного пограничного слоя. При этом было показано, что для мелкомасштабной волнистости ($k\delta \geq 5$) величина $\rho_0 u_*^2$ совпадает с удельной силой сопротивления. Поскольку для гидроупругих волн указанное условие обычно выполнено, будем использовать определение u_* через силу сопротивления, полагая коэффициент сопротивления равным $2\gamma^2$. После обобщения на случай многоволнового прогиба поверхности формул [14] получим

$$N\Omega_0 - \sum_k \operatorname{Re}(k'^{-1}\Omega_Y + \Omega) |ka_k|^2 = 1 \quad (Y = 0)$$

$$f = 1 \quad (Y = \delta_1 \Delta^{-1}) \quad (1.12)$$

В рамках квазилинейной теории отклик пограничного слоя на волнистый прогиб поверхности можно характеризовать безразмерной комплексной упругостью потока для каждой гармоники [14]

$$Z_{NL} = \frac{1}{\rho_0 k U^2} \frac{p_k}{a_k} = -iN\Omega_Y \quad (Y = 0) \quad (1.13)$$

где p_k – амплитуда k -й гармоники поверхностного давления. При малых ka_k с точностью до членов второго порядка по ka_k получим

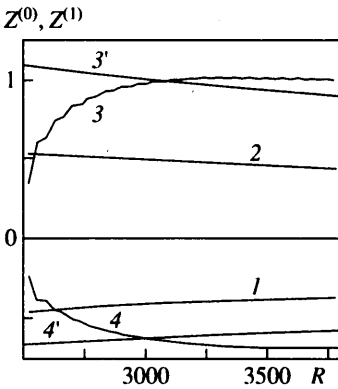
$$Z_{NL} = Z^{(0)}(k', C) + \sum_{k_1} Z^{(1)}(k', k'_1) |k_1 a_{k_1}|^2 \quad (1.14)$$

Здесь коэффициенты $Z^{(1)}$ неявно зависят от фазовых скоростей гармоник k и k_1 .

Главный член в (1.14) совпадает с комплексной упругостью линейной задачи, найденной в [12, 14]. С помощью матрицы коэффициентов $Z^{(1)}$ можно построить динамические уравнения для амплитуд гармоник. Деформация среднего течения играет доминирующую роль в нелинейном отклике, когда квадраты наклонов поверхности входят в (1.14) с большими коэффициентами [16, 14]. Формально это требование можно записать в виде $|Z^{(1)}/Z^{(0)}| \geq 1$ [13, 14].

2. Вычисление нелинейной комплексной упругости потока. Для определения коэффициентов разложения нелинейной комплексной упругости потока (1.14) в случае одноволнового прогиба поверхности возможен локальный подход, основанный на приближении локального подобия [14]. При этом для среднего течения используются уравнения, которые следуют из системы (1.9) после обращения в нуль производных f и γ по X . В этом случае возникает краевая задача в обыкновенных производных по Y для f и Ω_0 . Схема ее численного решения позволяет по совокупности безразмерных входных параметров – числу Рейнольдса R , градиенту давления $b_1 = \delta_*(\rho_0 U^2)^{-1} dP/dx$, волновому числу $k\delta_*$ и фазовой скорости c/U – определить выходные параметры γ и $d\delta_*/dx$ и одновременно рассчитать нелинейную упругость Z_{NL} [14]. При этом в (1.7)–(1.14) следует положить $b = b_1/\gamma^2$, $k' = k\delta_*/\gamma$, $C = c/(U\gamma)$. Таким образом, в данной схеме Z_{NL} определяется при постоянном значении δ_* , т.е. фактически предполагается, что в сечении $x = \text{const}$ можно пренебречь зависимостью δ_* от амплитуды волнистости, связанной с предысторией развития течения. Это является наиболее существенной гипотезой локального подхода.

Чтобы последовательно учесть влияние предыстории развития пограничного слоя на величину коэффициентов $Z^{(1)}$, было проведено численное интегрирование краевой задачи с уравнениями в частных производных (1.9) для одноволнового прогиба. Переход к конечным разностям по X проводился по схеме [19]. Величины f , δ и γ на конце шага дискретизации (с индексом 2) выражались через их значения в начале шага (с индексом 1) и решение краевой



Фиг. 1. Сравнение коэффициентов амплитудного разложения нелинейной упругости, полученных из численного решения уравнений Прандтля (1–4) и на основе локальной теории (1, 2, 3', 4') при $c/U = 0,35$, $k\delta_* = 1,25$: 1, 2 – $10 Z_r^{(0)}$ и $10 Z_i^{(0)}$; 3, 3' – $Z_r^{(1)}$; 4, 4' – $Z_i^{(1)}$

задачи по Y в некоторой средней точке (величины со штрихом): $f_2 = 2f' - f_1$, $g_2 = 2g' - g_1$ и т.д. Соответственно для производных по X вводились аппроксимации $f_X = 2(f' - f_1)/h_1$, $g_X = 2(g' - g_1)/h_1$ и т.д. (h_1 – шаг дискретизации по X).

Решение краевой задачи по Y в средней точке для f' строилось на основе схемы, разработанной для решения уравнений локальной теории [14]. В уравнениях предварительно производилось преобразование растяжения по Y , после чего вводилась равномерная сетка по новой координате z . Число Рейнольдса в средней точке выражалось через g' и γ' : $R' = g'(\gamma'/\gamma(x_0))R(x_0)$, а уравнения (1.9) решались методом итераций. Однако в отличие от [19, 14], где использован метод Рунге – Кутты, проводился переход к конечным разностям по z и применялась дифференциальная прогонка. Сетка по z содержала 500 узлов. Условия $f = 1$ ($Y = \delta_1/\Delta$) и $\gamma' = 1$ ($Y = 0$) из (1.11), (1.12) рассматривались как уравнения относительно γ' и g' ; тогда как остальные закладывались в схему прогонки. Кроме того, при $Y = \delta_1/\Delta$ налагалось условие $N\Omega_0 = 0$. Применение дифференциальной прогонки позволило существенно уменьшить шаг h_1 (основные расчеты проводились при $h_1 = 0,25$).

Результаты вычисления коэффициентов разложения упругости потока (1.14) для моногармонического прогиба $Z^{(0)}(k', C) = Z_r^{(0)} + iZ_i^{(0)}$ и $Z^{(1)}(k', k'_1) = Z_r^{(1)} + iZ_i^{(1)}$, найденных в рамках численного решения краевой задачи (1.7)–(1.12) и на основе локального подхода, сравниваются на фиг. 1. В приведенном примере расчета выбрано значение фазовой скорости, характерное для флаттера бегущей волны (согласно [7], $c = (0,3 - 0,5)U$). В сечении $X = 0$ задавались граничные условия, соответствующие турбулентному пограничному слою на плоской поверхности ($a_k \rightarrow 0$) с параметрами $R = 2500$, $u_*'/U = 0,0418$, $\delta/\delta_* = 6,35$, $d\delta_*/dx = 0,0025$. Локальное число Рейнольдса в интервале, представленном на фиг. 1, нарастает вниз по потоку приблизительно по линейному закону: $R(x) - R(x_0) \approx 130 X$. Максимальное значение X составляет приблизительно 40 и соответствует длине упругой вставки в экспериментах [7, 8]. Толщина пограничного слоя увеличивается на этом интервале в 1,5 раза. Постановка задачи для расчета линейной упругости $Z^{(0)}$ одинакова в рамках обоих подходов, поэтому результаты их вычисления представлены на фиг. 1 одной кривой.

На фиг. 1 мнимая и действительная части коэффициента $Z^{(1)}(k', k'_1)$, полученные при численном решении, заметно отличаются от их значений в локальной теории только в небольшой переходной области. При $x - x_0 \geq 15\delta(x_0)$ различие с локальной теорией становится малым. Фактически численное решение подтверждает гипотезу о слабом влиянии приращений δ_* на квадратичную по ka_k составляющую Z_{NL} . Добавим, что аналогичные результаты были получены также для волн с малыми фазовыми скоростями $c \rightarrow 0$, характерными для квазистатической неустойчивости (согласно [8], для дивергенции $c \leq 0,05U$).

Поскольку значения $Z^{(1)}$, полученные в рамках локального подхода, незначительно отличаются от численно найденных значений, основные расчеты $Z^{(0)}$, $Z^{(1)}$ проводились

в рамках локального подхода. Разработанная в [14] численная схема для нахождения коэффициентов разложения (1.14) в одноволновой задаче обобщалась на случай нелинейных коэффициентов $Z^{(1)}$, зависящих от $k\delta_*$, $k_1\delta_*$, c_k/U и c_{k_1}/U . Каждый из них вычислялся отдельно – с сохранением в суммах (1.10) вклада одной гармоники. Было установлено, что эти величины слабо зависят от введения отрицательного градиента давления ($b_1 < 0$), характерного для экспериментов в гидроканалах. Как и в одноволновой задаче, такая зависимость становится существенной только для b , близких к предельному значению [14, 17]. Приводимые далее результаты получены при нулевом градиенте давления. Добавим, что для линейной упругости $Z^{(0)}$ в [12] предложена квазипотенциальная аппроксимация, в которой ее главная часть соответствует "редуцированной" упругости потенциального потока (см. также [20]).

3. Уравнения конкуренции гидроупругих волн. Рассмотрим на основе проведенного выше анализа самосогласованное развитие пакета гидроупругих волн, возбуждаемого при взаимодействии пограничного слоя с однослойным упругим покрытием из несжимаемого резиноподобного материала. Покрытие имеет толщину d и характеризуется плотностью ρ_s , модулем сдвига G и скоростью распространения сдвиговых волн $c_t = \sqrt{G/\rho_s}$. Реакцию такого покрытия на возмущение поверхностного давления в виде суперпозиции бегущих волн можно описывать с помощью комплексной упругости $K = -p_k/a_k$. В линейном приближении для безразмерной упругости $S_0 = Kd/\rho_s c_t^2$ в [12] получено выражение вида

$$S_0 \approx m\alpha^2(c_0'^2 - c'^2) - i\gamma_t b_0 \alpha c' \quad (3.1)$$

Здесь $\alpha = kd$, $c' = c/c_s$; γ_t – параметр потерь в покрытии; m , c_0' и b_0 – параметры эффективной мембраны, зависящие от α .

Вычисление нелинейной упругости для реального твердотельного покрытия является достаточно сложной задачей, решение которой связано с учетом нелинейности тензора деформаций. В [13] дана оценка нелинейной упругости, основанная на использовании уравнения тонкой пластины. Обобщая этот результат на случай многоволнового прогиба, получим

$$S_{NL} = S^{(0)} + \sum_{\beta} S^{(1)}(\alpha, \beta) |b_{\beta}|^2 \quad (3.2)$$

где $b_{\beta} = a_{\beta}/d$ – безразмерные комплексные амплитуды гармоник; $S^{(1)} = \alpha^2 \beta^2 / [2(1 - \mu)]$ ($\mu \approx 0,5$ – коэффициент Пуассона). В моногармонической теории основной вклад в ограничение гидроупругой неустойчивости дает гидродинамическая нелинейность [13]. Использование аппроксимации (3.2) позволяет подтвердить этот результат для многоволновой задачи.

Для того чтобы вывести уравнения многоволновой генерации, воспользуемся определениями упругостей (1.14), (3.2). Записывая условие непрерывности давления на границе раздела поток – покрытие, получим

$$\{D(\Omega, \alpha; V) + \sum_{\beta} [S^{(1)}(\alpha, \beta) + q\alpha\beta^2 V^2 Z^{(1)}(\alpha, \beta)] |b_{\beta}|^2\} b_{\alpha} = 0 \quad (3.3)$$

где $\Omega = \alpha c'$ – безразмерная частота, $q = \rho_0/\rho_s$ – отношение плотностей жидкости и упругого покрытия, $V = U/c_t$ – безразмерная скорость внешнего течения; функция D выражается через линейные упругости и имеет вид

$$D \equiv D_r + iD_i = -[S^{(0)}(\Omega, \alpha) + \alpha q V^2 Z^{(0)}(\Omega, \alpha; V)] \quad (3.4)$$

Общие множители b_{α} следует сохранить в (3.3), чтобы исключить потерю решений, в которых $b_{\alpha} = 0$, для части гармоник пакета. Поскольку решение гидродинамической

задачи зависит от $k\delta_*$ и R , в уравнениях (3.3) неявно содержатся два безразмерных параметра $R_l = c_l \delta_*/V_0$ и d/δ_* (см. [12]).

Система (3.3) определяет амплитуды и частоты гармоник в режиме стационарной генерации. В то же время, поскольку D является аналитической функцией Ω , эта система позволяет изучить также динамику волнового пакета. Дисперсионное уравнение линейной задачи $D(\Omega, \alpha; V) = 0$ исследовано в [12], где показано, в частности, что оно хорошо описывает переход от флаттера бегущей волны к дивергенции при увеличении γ_l .

Уравнения для амплитуд гармоник b_α можно построить, обобщая вывод уравнения Ландау [13]. Здесь рассматривается только случай покрытия с малыми потерями, на котором возникает неустойчивость типа флаттера бегущей волны. Дисперсия фазовых скоростей в этом случае препятствует резонансному взаимодействию и синхронизации фаз гармоник. При выполнении условия (1.2) нелинейные члены в (3.3) малы. Кроме того, в данном случае малы также линейные диссипативные члены, связанные с потерями в покрытии и необратимым отбором энергии у течения в пограничном слое. Тогда главная часть решения для безразмерного отклонения поверхности покрытия $w' = w/d$ представляется в виде

$$w'(x_1, t_1) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (b_{\alpha} e^{i\alpha x_1 - i\Omega_{\alpha} t_1} + \text{к.с.}) \quad (3.5)$$

где $x_1 = x/d$, $t_1 = c_l t/d$ – безразмерные координата и время, Ω_{α} – решение дисперсионного уравнения линейной консервативной задачи ($D_r = 0$). Используя (3.3), (3.5), получим систему уравнений для комплексных амплитуд гармоник

$$\frac{db_{\alpha}}{dt_1} = \gamma_{\alpha} b_{\alpha} + \sum_{\beta} i\sigma_{\alpha\beta} |b_{\beta}|^2 b_{\alpha} \quad (3.6)$$

$$\gamma_{\alpha} = -D_{i\Omega} D'_{r\Omega}{}^{-1}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = -[S^{(1)}(\alpha, \beta) + q\alpha\beta^2 V^2 Z^{(1)}(\alpha, \beta; \Omega_{\alpha}, \Omega_{\beta})] D'_{r\Omega}{}^{-1}$$

где $D_{i\Omega}$ и $D'_{r\Omega}$ – значения D_i и $\partial D_r / \partial \Omega$ при $\Omega = \Omega_{\alpha}$. Полагая в (3.6) $b_{\alpha} = A_{\alpha} \exp(i\varphi_{\alpha})$, получим систему уравнений для амплитуд волн $A_{\alpha} = |b_{\alpha}|$

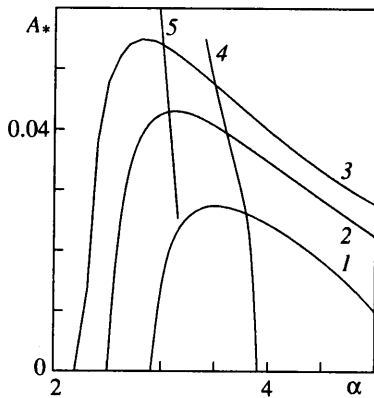
$$\frac{dA_{\alpha}}{dt_1} = \gamma_{\alpha} A_{\alpha} - \sum_{\beta} (\text{Im } \sigma_{\alpha\beta}) A_{\beta}^2 A_{\alpha} \quad (3.7)$$

Кроме того, из (3.6) находится нелинейная добавка к фазовой скорости каждой гармоники

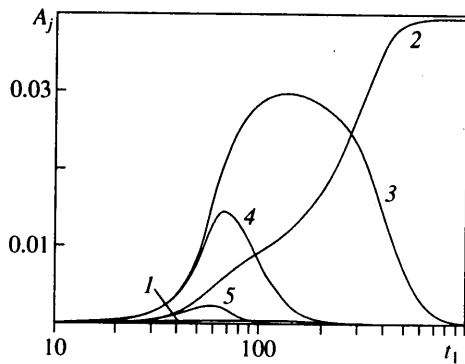
$$\delta c'_{NL}(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} \frac{d\varphi_{\alpha}}{dt_1} = -\sum_{\beta} (\text{Re } \sigma_{\alpha\beta}) A_{\beta}^2 \quad (3.8)$$

Из выражений для коэффициентов в (3.7) следует, что действительная часть нелинейной упругости покрытия в данном приближении не влияет на динамику амплитуд волн.

Уравнения (3.7) известны как уравнения несинхронного (энергетического) взаимодействия волн. При положительных значениях коэффициентов $\text{Im } \sigma_{\alpha\beta}$ они описывают конкуренцию волн [21]. Для одноволнового прогиба система (3.7) переходит в уравнение Ландау, результаты решения которого показаны на фиг. 2 кривыми 1–3 [13]. Заметим, что в данном случае критическая скорость $V_c = 2,77$. При расчетах фазовая скорость волн на свободном покрытии c'_0 , входящая в (3.1), аппроксимировалась выражением $c'_0 = [(5,5/\alpha^2) + 0,8]^{1/2}$. Для выбранных значений V выполняется условие малой нелинейности, однако генерация волн возникает в широкой полосе, вследствие чего в рамках одноволновой теории существует неопределенность в выборе волно-



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимости от α амплитуд установившихся быстрых волн в турбулентном пограничном слое на покрытии с параметрами $d = 0,32$ см, $\delta_* = 0,41$ см, $R_t = 1113$, $q = 1$, $\gamma_t = 0,022$: 1–3 – моногармоническая теория при $V = 2,8$; 2,9; 3,0; 4 – одноволновые режимы, возникающие при возбуждении волновых пакетов; 5 – усредненная кривая экспериментальных данных для покрытия с модулем сдвига $G = 740$ дин/см² [8]

Фиг. 3. Изменение амплитуд гармоник пакета при $V = 2,9$ и тех же параметрах волн и покрытия, что в таблице и в подписи к фиг. 2 (1–5 – A_j , пронумерованные в порядке возрастания волнового числа)

вого числа возмущения. Кроме того, одноволновая теория оставляет открытым вопрос о том, будет возмущение поверхности моногармоническим или близким к моногармоническому при широкой полосе неустойчивости.

Численное решение уравнений (3.7) проводилось для набора равноотстоящих по волновому числу гармоник, которые полностью или частично заполняли полосу неустойчивости. Значения коэффициентов γ_α и $\sigma_{\text{эф}}$, входящих в (3.7), вычислялись на основе теории разд. 1, 2. Малые начальные значения A_α моделировали шумовые возмущения. В проведенных расчетах было обнаружено установление режима генерации одной монохроматической волны при равных нулю значениях амплитуд остальных гармоник. Пример такого расчета показан на фиг. 3 для пакета из пяти гармоник. Значения коэффициентов системы (3.7) и волновые числа гармоник для этого примера приведены в таблице. Вывод об установлении моногармонической генерации в результате конкуренции гармоник пакета качественно согласуется с данными экспериментов. Вычисления показали, что увеличение плотности заполнения спектра волнового пакета приводит только к уточнению волнового числа "выживающей" гармоники. Отметим, что решение (3.3) как системы нелинейных алгебраических уравнений относительно Ω_α и h_α позволяет найти все возможные стационарные состояния, однако оставляет открытым вопрос, какое из них реализуется при малых начальных возмущениях.

Результаты расчетов установившихся режимов генерации представлены кривой 5 на фиг. 2. Видно, что при увеличении V волновое число генерируемой волны уменьшается, тогда как значение α в максимуме инкремента линейной неустойчивости возрастает ($\alpha_{\text{max}} = 3,6$; 3,8; 4,0 для значений V , соответствующих кривым 1–3 на фиг. 2). Это согласуется с экспериментальными данными [8] для флаттера бегущей волны. Таким образом, квазилинейная теория не только правильно предсказывает тенденцию к уменьшению волнового числа генерируемой волны, но и дает удовлетворительное количественное совпадение с экспериментом. Для указанных выше значений V фазовая скорость установившихся волн с учетом добавки (3.8) близка к 0,4, что также согласуется с экспериментальными данными [8].

α	c_α	γ_α	$\text{Im } \sigma_{\alpha\beta}$				
0,290	0,413	0,0283	0,261	0,284	0,287	0,278	0,262
0,355	0,382	0,0691	0,331	0,366	0,373	0,363	0,343
0,420	0,362	0,0910	0,389	0,435	0,446	0,436	0,413
0,485	0,349	0,0899	0,430	0,488	0,503	0,493	0,468
0,550	0,340	0,0640	0,453	0,520	0,540	0,532	0,507

Заключение. Теория взаимодействия турбулентного пограничного слоя с монохроматической упругой волной обобщена на случай волнового пакета, содержащего суперпозицию бегущих волн со случайными фазами. На этой основе разработана схема вычисления матрицы взаимных нелинейных упругостей потока и получены динамические уравнения для амплитуд гидроупругих волн. Основные расчеты выполнены в рамках локальной модели взаимодействия волнового поля с течением в пограничном слое, поскольку выборочные вычисления показали хорошее соответствие с результатами численного решения уравнений Прандтля.

В рамках квазилинейного приближения возникает несинхронное взаимодействие волн, которое определяется порождаемой ими деформацией среднего течения в турбулентном пограничном слое. В этом случае динамические уравнения описывают конкуренцию гармоник пакета. Для неустойчивости быстрых волн объяснено два эффекта, наблюдавшихся ранее в экспериментах. Это выживание в процессе конкуренции одной гармоники и уменьшение ее волнового числа с ростом скорости потока. Расчеты фактически подтвердили гипотезу [13] об установлении в процессе конкуренции волны, амплитуда которой близка к максимальной в одноволновой теории.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 97-01-00183 и 96-15-96593).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gad-el-Hak M.* Boundary layer interactions with compliant coatings: An overview // *Appl. Mech. Rev.* 1986. V. 39. № 4. P. 511–523.
2. *Кулик В.М., Погуда И.С., Семенов Б.Н.* Экспериментальное исследование воздействия однослойных вязкоупругих покрытий на турбулентное трение и пульсации давления на стенке // *Инж.-физ. журн.* 1984. Т. 47. № 2. С. 189–196.
3. *Grothberg J.B.* Pulmonary flow and transport phenomena // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1994. V. 26. P. 529–571.
4. *Lucey A.D., Carpenter P.W.* A numerical simulation of the interaction of a compliant wall and inviscid flow // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 234. P. 121–146.
5. *Carpenter P.W., Garrad A.D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Pt 1: Tollmien–Schlichting instabilities // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 155. P. 465–510.
6. *Carpenter P.W., Garrad A.D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Pt 2: Flow induced surface instabilities // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 170. P. 199–232.
7. *Gad-el-Hak M., Blackwelder R.F., Riley J.J.* On the interaction of the compliant coatings with boundary layer flows // *J. Fluid. Mech.* 1984. V. 140. P. 257–280.
8. *Gad-el-Hak M.* The response of elastic and visco-elastic surfaces to a turbulent boundary layer // *Trans. ASME: J. Appl. Mech.* 1986. V. 53. № 1. P. 206–212.
9. *Benjamin T.B.* Shearing flow over a wavy boundary // *J. Fluid Mech.* 1959. V. 6. Pt 2. P. 161–205.
10. *Duncan J.H., Waxman A.M., Tulin M.P.* The dynamics of waves at the interface between a viscoelastic coating and a fluid flow // *J. Fluid. Mech.* 1985. V. 158. P. 177–197.
11. *Evrensel C.A., Kalnins A.* Response of a compliant slab to viscous incompressible fluid flow // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1988. V. 55. № 3. P. 660–666.
12. *Reutov V.P., Rybushkina G.V.* Hydroelastic instability threshold in a turbulent boundary layer over a compliant coating // *Phys. Fluids.* 1998. V. 10. № 2. P. 417–425.

13. *Реутов В.П., Рыбушкина Г.В.* Нелинейная стадия двумерной гидроупругой неустойчивости в турбулентном пограничном слое на упругом покрытии: Препринт № 477. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1998. 25 с.
14. *Реутов В.П.* Нелинейные характеристики взаимодействия турбулентного пограничного слоя с волнистой поверхностью // ПМТФ. 1998. Т. 39. № 6. С. 72–84.
15. *Jenkins A.D.* A quasi-linear eddy-viscosity model for the flux of energy and momentum to wind waves using conservation-law equations in a curvilinear coordinate system // J. Phys. Oceanogr. 1992. V. 22. № 8. P. 843–858.
16. *Реутов В.П., Троицкая Ю.И.* О нелинейных эффектах при взаимодействии волн на воде с турбулентным ветром // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 31. № 6. С. 825–834.
17. *Mellor L.G., Gibson D.M.* Equilibrium turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 1966. V. 24. Pt 2. P. 225–253.
18. *Федяевский К.К., Гиневский А.С., Колесников А.В.* Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1973. 256 с.
19. *Mellor L.G.* Incompressible turbulent boundary layers with arbitrary pressure gradients and divergent or convergent cross flows // AIAA J. 1967. V. 5. № 9.
20. *Реутов В.П.* Нелинейный флаттер пластин в турбулентном пограничном слое слабо-сжимаемого течения // ПМТФ. 1993. Т. 34. № 2. С. 58–66.
21. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
13.VII.1999