

УДК 532.526.2.011

© 2001 г. В.В. БОГОЛЕПОВ, В.Я. НЕЙЛАНД

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ БЕГУЩЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Исследовано взаимодействие бегущего возмущения давления с ламинарным пограничным слоем сжимаемого газа, когда его уровень превышает значение, вызывающее отрыв стационарного потока. Получено, что при достаточно большой скорости перемещения возмущения давления течение может оставаться безотрывным, а направление его перемещения определяет характер распространения возмущений в пограничном слое. Показано, что даже в линейном приближении возмущения в основном индуцируются линейным пристеночным слоем, а не критическим слоем, который всегда остается нелинейным. Получено также, что в нестационарном случае коротковолновые колебания возмущений затухают по времени, а длинноволновые нарастают и что рост возмущений по времени усиливает их затухание по продольной координате, а затухание – ослабляет его.

В последние два десятилетия нестационарные эффекты взаимодействия ламинарного пограничного слоя с внешним сверхзвуковым потоком газа часто рассматривались в рамках трехслойной схемы течения, возникшей при исследовании стационарной задачи об отрыве пограничного слоя [1–3]. Нестационарная форма этой теории была сформулирована в [4–8].

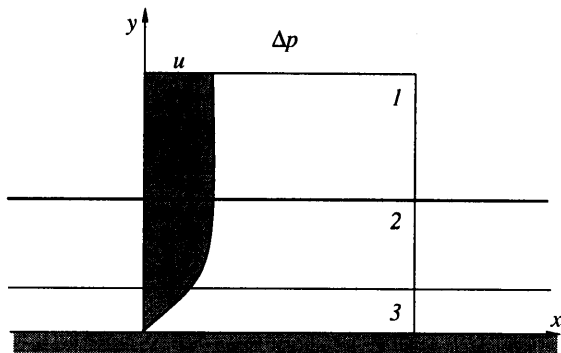
Исходное трехслойное асимптотическое решение уравнений Навье – Стокса содержало пристеночный слой нелинейного вязкого течения, слабозвозмущенную внешнюю зону невязкого сверхзвукового потока и промежуточную область невязкого в первом приближении течения с малыми возмущениями относительно начального профиля пограничного слоя.

Дальнейшие исследования нестационарных задач для малых возмущений давления, допускаящих линеаризацию решения в пристеночной области, позволили получить новые результаты по теории устойчивости пограничного слоя относительно длинноволновых возмущений [9, 10].

Исследования нестационарного отрыва [11] показали, что при соответствующей интенсивности возмущений задача может быть сведена к известному уравнению Бюргера. Это обстоятельство позволило с помощью преобразования Коула – Хопфа [12] трансформировать нелинейную задачу к линейной и углубить понимание процессов, сопровождающих нестационарный отрыв пограничного слоя.

В настоящей работе изучается взаимодействие бегущего возмущения давления с пограничным слоем (отдельные аспекты этого явления рассматривались в [13–16]). Показано, в частности, что при достаточно большой скорости его перемещения задача может быть линейной, а течение – безотрывным даже при возмущениях давления, превышающих уровень, вызывающий отрыв стационарного потока.

1. Рассматривается обтекание поверхности тела равномерным потоком вязкого совершенного газа. Предполагается, что число Маха в набегающем потоке $M_\infty > 1$, а число Рейнольдса – большое, но докритическое $Re_\infty = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty = \varepsilon^{-2} \gg 1$, где ρ_∞ , u_∞ и μ_∞ – значения плотности газа, его скорости и коэффициента вязкости в набегающем потоке, l – расстояние до передней кромки обтекаемой поверхности.



Фиг. 1. Трехслойная схема течения со взаимодействием: 1 – область равномерного набегающего потока; 2 – основная часть пограничного слоя; 3 – пристеночная часть пограничного слоя

Исследуется локальная возмущенная область течения на расстоянии $\sim l$ от передней кромки поверхности, индуцированная возмущением давления, которое перемещается вдоль поверхности.

В дальнейшем используются только безразмерные переменные. Для этого все линейные размеры относятся к l , компоненты скорости u и v вдоль осей прямоугольной системы координат x и y – к u_∞ , давление p и энтальпия h – к величинам $\rho_\infty u_\infty^2$ и u_∞^2 , а плотность газа ρ и его коэффициент вязкости μ – к своим значениям в набегающем потоке.

Предполагается, что возмущение давления и скорость его перемещения малы по порядку величины $\Delta p \sim \theta \ll 1$, $u_{\Delta p} \sim \sigma \ll 1$, а само возмущение давления возникает в результате его самоиндукции или некоторого внешнего воздействия. При неподвижном самоиндуцированном возмущении давления $\Delta p \sim \varepsilon^{1/2}$ реализуется трехслойная схема течения со взаимодействием [1–3]. Она представлена на фиг. 1, где цифрами 1, 2 и 3 обозначены ее характерные области: возмущенная область равномерного набегающего потока, основная часть пограничного слоя и его пристеночная часть.

Пусть сначала возмущение давления таково, что в пристеночном слое 3, где продольная компонента скорости по порядку величины равна скорости перемещения возмущения давления $u^{(3)} \sim u_{\Delta p} \sim \sigma$, индуцируются ее нелинейные возмущения $\Delta u^{(3)} \sim u^{(3)}$ (индексом сверху отмечается номер области течения). Так как плотность газа не изменяется по порядку величины во всей возмущенной области течения $\rho \sim 1$, то из сопоставления порядков величин членов уравнения сохранения продольного импульса $\rho u \frac{du}{dx} \sim \frac{dp}{dx}$ следует, что $\Delta p \sim \theta \sim \sigma^2$. Принимая во внимание, что в невозмущенном пограничном слое продольная компонента скорости около поверхности изменяется пропорционально расстоянию от нее $u \sim y/\delta$, где $\delta \sim \varepsilon$ – толщина пограничного слоя, можно получить оценку для толщины пристеночного слоя 3 $\Delta y^{(3)} \sim \varepsilon \sigma$. Сопоставление порядков величин членов уравнения неразрывности $\frac{d\rho u}{dx} \sim \frac{\partial \rho v}{\partial y}$ позволяет получить оценку для вертикальной компоненты скорости $v^{(3)} \sim \varepsilon \sigma^2 / \Delta x$, где $\Delta x \ll 1$ – характерная протяженность возмущенной области течения. Полагая дополнительно, что в нелинейном пристеночном слое 3 несущественны вязкие эффекты $\rho u \frac{du}{dx} \gg \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и мало вертикальное изменение давления по сравнению с продольным $\Delta p_y \sim \Delta y \frac{dp}{dx} \ll \Delta p_x \sim \theta \sim \sigma^2$, получаем следующее соотношение для этой величины: $\varepsilon \sigma \ll \Delta x \ll \sigma^3$. Для удовлетворения условий прилипания может быть рассмотрен дополнительно вязкий подслой 4, располагающийся ниже слоя 3.

В основной части пограничного слоя области 2 с характерной толщиной $\Delta y^{(2)} \sim \delta \sim \varepsilon$ продольная компонента скорости имеет тот же порядок величины, что и в набегающем потоке $u^{(2)} \sim 1$. Ее возмущение за счет смещения линий тока на толщину пристеночного слоя 3 по порядку величины будет равно $\Delta u^{(2)} \sim \Delta y^{(3)}/\varepsilon \sim \sigma$. Из сопоставления порядков величин членов уравнения неразрывности получается еще оценка для вертикальной компоненты скорости $v^{(2)} \sim \varepsilon\sigma/\Delta x$.

В возмущенной области 1 равномерного набегающего потока с характерными размерами $\varepsilon\sigma \ll \Delta x \sim \Delta y^{(1)} \ll \sigma^3$ продольная компонента скорости по порядку величины равна $u^{(1)} \sim 1$. Из сопоставления порядков величин членов уравнений сохранения продольного и поперечного импульсов $\rho u \partial u / \partial x \sim \partial p / \partial x$ и $\rho u \partial v / \partial x \sim \partial p / \partial y$ получаются оценки для возмущений компонент скорости $\Delta u^{(1)} \sim v^{(1)} \sim \Delta p \sim \theta \sim \sigma^2$. Учитывая, что в области 1 вертикальная компонента скорости должна иметь тот же порядок величины, что и в области 2, удается оценить характерную протяженность возмущений области течения с самоиндуцированным давлением $\Delta x \sim \varepsilon/\sigma$, $\varepsilon \ll \sigma^4 \ll 1$.

На основании построений системы оценок для размеров характерных областей и функций течения в них можно ввести для каждой из областей новые переменные, которые имели бы там одинаковые порядки величин ~ 1 при совершении предельного перехода

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow 0, \quad \varepsilon \ll \sigma^4 \quad (1.1)$$

Исследования удобно проводить в системе координат, движущейся вместе с возмущением давления с постоянной скоростью $u_{\Delta p} = \sigma c$, $c \sim 1$, в которой возмущение давления и течение сначала предполагаются стационарными (нестационарные течения будут рассмотрены в разд. 4 настоящей статьи). В этой системе координат при перемещении возмущения давления в направлении основного потока $c < 0$, при его обратном движении $c > 0$. Поэтому для нелинейного невязкого пристеночного слоя 3 вводятся следующие независимые переменные и асимптотические разложения функций течения:

$$x = \frac{\varepsilon}{\sigma} x_3, \quad y = \varepsilon \sigma y_3 \quad (1.2)$$

$$u = \sigma(u_3 + c) + \dots, \quad v = \sigma^3 v_3 + \dots, \quad p = p_w + \dots, \quad p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \sigma^2 p_3 + \dots$$

где γ – отношение удельных теплоемкостей, ρ_w – значение плотности газа около поверхности. Подстановка разложений (1.2) в уравнения Навье – Стокса и совершение предельного перехода (1.1) показывают, что течение в слое 3 в первом приближении будет описываться уравнениями "невязкого" несжимаемого пограничного слоя

$$\rho_w \left[(u_3 + c) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} \right] + \frac{dp_3}{dx_3} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} = 0$$

На поверхности должно выполняться только условие непротекания

$$v_3 = 0 \quad (y_3 = 0) \quad (1.4)$$

начальное условие получается из сращивания с пристеночной частью невозмущенного пограничного слоя

$$u_3 \rightarrow \omega y_3 \quad (p_3 \rightarrow 0) \quad (1.5)$$

где ω – вертикальный градиент продольной компоненты скорости около поверхности в невозмущенном пограничном слое. Краевая задача (1.3) – (1.5) имеет аналитическое

решение

$$u_3 = \omega y_3 + u_w(x_3) - c, \quad v_3 = -y_3 \frac{du_w}{dx_3}, \quad u_w = \pm \sqrt{c^2 - \frac{2p_3(x_3)}{\rho_w}} \quad (1.6)$$

$$u_w(x_3) \rightarrow c \quad (p_3 \rightarrow 0)$$

где $u_w(x_3)$ – продольная компонента скорости около поверхности, знак плюс относится к возмущению давления, которое движется навстречу основному потоку, а минус – к возмущению давления, которое движется в том же направлении, что и основной поток.

Для основной части пограничного слоя области 2 вводятся новые переменные и асимптотические разложения функций течения

$$x = \frac{\varepsilon}{\sigma} x_2, \quad y = \varepsilon y_2 \quad (1.7)$$

$$u = u_{20}(y_2) + \sigma(u_{21} + c) + \dots, \quad v = \sigma^2 v_{21} + \dots, \quad \rho = \rho_{20}(y_2) + \sigma \rho_{21} + \dots$$

$$p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \sigma^2 p_2 + \dots, \quad h = h_{20}(y_2) + \sigma h_{21} + \dots$$

где индексом 20 отмечены профили функций течения в невозмущенном пограничном слое. Подстановка разложений (1.7) в уравнения Навье – Стокса и в уравнение состояния и выполнение предельного перехода (1.1) показывают, что в первом приближении течение в области 2 будет описываться системой линейных уравнений

$$\rho_{20} \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} + u_{20} \frac{\partial \rho_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho_{20} v_{21})}{\partial y_2} = 0, \quad u_{20} \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} + v_{21} \frac{du_{20}}{dy_2} = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial y_2} = 0, \quad u_{20} \frac{\partial \rho_{21}}{\partial x_2} + v_{21} \frac{d\rho_{20}}{dy_2} = 0, \quad h_{21} = -\rho_{21} \frac{h_{20}}{\rho_{20}}$$

которые допускают частичное интегрирование

$$u_{21} = -A \frac{du_{20}}{dy_2}, \quad v_{21} = \frac{dA}{dx_2} u_{20}, \quad \rho_{21} = -A \frac{d\rho_{20}}{dy_2} \quad (1.9)$$

где $A = A(x_2)$ – толщина вытеснения пристеночной области 3. Сращивание асимптотических разложений в областях 3 и 2 показывает, что

$$\rho_w = \rho_{20}(0), \quad A\omega = c - u_w \quad (1.10)$$

Для возмущенной области 1 внешнего набегающего потока следует ввести новые независимые переменные и асимптотические разложения функций течения

$$x = \frac{\varepsilon}{\sigma} x_1, \quad y = \frac{\varepsilon}{\sigma} y_1 \quad (1.11)$$

$$u = 1 + \sigma c + \sigma^2 u_1 + \dots, \quad v = \sigma^2 v_1 + \dots, \quad \rho = 1 + \sigma^2 \rho_1 + \dots$$

$$p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \sigma^2 p_1 + \dots,$$

$$h = \frac{1}{(\gamma - 1) M_\infty^2} + \sigma^2 h_1 + \dots$$

Подстановка этих разложений в уравнения Навье – Стокса и в уравнение состояния и выполнение предельного перехода (1.1) показывают, что в первом приближении

течение в области I описывается системой уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0 \quad (1.12)$$

$$h_1 + \frac{\rho_1}{(\gamma - 1)M_\infty^2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_1, \quad \frac{\partial h_1}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 0$$

которые преобразуются в волновые уравнения для возмущения давления и вертикальной компоненты скорости

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial y_1^2} - (M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2} - (M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} = 0 \quad (1.13)$$

Учитывая, что во внешнем сверхзвуковом потоке возмущения не передаются вверх по потоку, можно получить вид решения этих уравнений и важное для дальнейшего соотношение

$$p_1 = p_1(x_1 - \sqrt{M_\infty^2 - 1}y_1), \quad v_1 = v_1(x_1 - \sqrt{M_\infty^2 - 1}y_1)$$

$$v_1(x_1, 0) = \sqrt{M_\infty^2 - 1} p_1(x_1, 0)$$

которое с учетом результатов сращения асимптотических разложений в областях 2 и I преобразуется к окончательному виду

$$p_1(x_1, 0) = p_2(x_2), \quad v_1(x_1, 0) = \frac{dA}{dx_2} \quad (1.14)$$

$$p_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{dA}{dx_2}$$

Соотношения (1.6), (1.10) и (1.14) позволяют сформулировать задачу для скорости газа у поверхности

$$2 \frac{dU}{dX} - U^2 = -1, \quad U \rightarrow \pm 1 \quad (X \rightarrow \mp \infty) \quad (1.15)$$

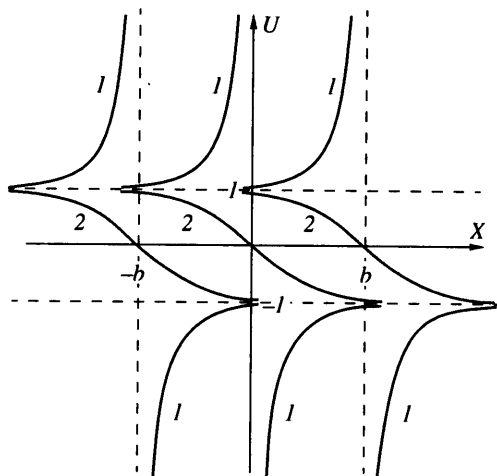
$$U = \frac{u_w}{|c|}, \quad X = 2a|c|x_2, \quad a = \frac{\omega \rho_w \sqrt{M_\infty^2 - 1}}{2}$$

где верхний знак относится к случаю $c > 0$ (возмущение давления движется навстречу основному потоку), а нижний – к случаю $c < 0$ (возмущение давления движется в направлении основного потока). Уравнение (1.15) имеет аналитическое решение

$$U = \frac{1 \pm \exp(X + b)}{1 \mp \exp(X + b)} \quad (1.16)$$

где b – произвольная постоянная, верхний знак относится к ветвям решения при $|U| \geq 1$ (кривые 1 на фиг. 2), а нижний – к ветвям решения при $|U| \leq 1$ (кривые 2 на фиг. 2).

По аналогии с дозвуковыми течениями, для которых расширение струек тока приводит к повышению давления, и сверхзвуковыми течениями, когда расширение струек тока вызывает падение давления, в [17] были введены понятия докритического и закритического пограничных слоев: при $d\delta/dp > 0$ пограничный слой в целом ведет себя как дозвуковой поток даже при сверхзвуковой скорости набегающего потока, а при $d\delta/dp < 0$ – как сверхзвуковой поток. Кроме того, понятия докритичности или закри-



Фиг. 2. Распределения скорости газа около стенки вдоль плоской поверхности: 1 – течения сжатия; 2 – течения разрежения

тичности связаны со способностью пограничного слоя передавать возмущения по дозвуковым струйкам тока вверх по потоку при $d\delta/dp > 0$ или только распространять возмущения вниз по течению при $d\delta/dp < 0$. Свойства таких течений, включая переходные транскритические, изучены в [2, 3, 18–21] для двумерных и трехмерных гиперзвуковых пограничных слоев.

В рассматриваемом случае изменение толщины пограничного слоя δ создается в основном за счет изменения толщины пристеночной области 3, поэтому с учетом (1.6)

$$\frac{d\delta}{dp} \sim \frac{d\delta_3}{dp_3} \sim \frac{d\delta_3}{dx_3} \frac{dx_3}{dp_3} \sim \frac{v_3}{u_3} \Big|_{y_3 \rightarrow \infty} \frac{dx_3}{dp_3} \sim -\frac{du_w}{dx_3} \frac{dx_3}{dp_3} \sim -\frac{du_w}{dp_3} \sim \frac{1}{U}$$

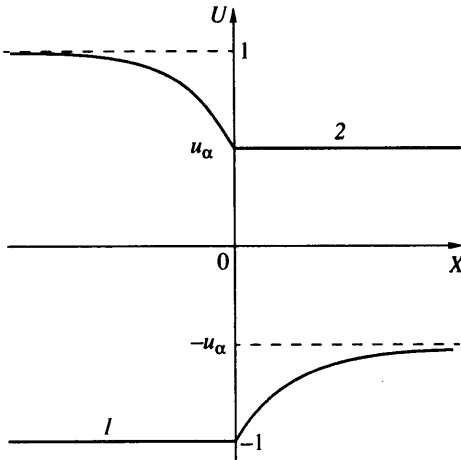
Следовательно, при $U, c > 0$ (верхняя половина фиг. 2), когда возмущение давления движется навстречу основному потоку, $d\delta/dp > 0$, реализуется докритическое возмущенное течение и кривые 1, 2 показывают передачу возмущений вверх по потоку. Если же $U, c < 0$ (нижняя половина фиг. 2), то возмущение давления движется в направлении основного потока, $d\delta/dp < 0$, реализуется закритическое возмущенное течение и кривые 1, 2 показывают затухание возмущений вниз по потоку.

Построенная теория взаимодействия бегущего возмущения давления с пограничным слоем на плоской поверхности позволяет расширить класс исследуемых течений и рассмотреть, например, случай, когда часть поверхности на расстоянии по порядку величины, равной характерной протяженности возмущенной области течения $\Delta l \sim \Delta x \sim \epsilon/\sigma$, отклоняется на угол $\alpha \sim \Delta y^{(3)}/\Delta x \sim \sigma^2$. Здесь дополнительно вводится криволинейная ортогональная система координат (s, n) , связанная с поверхностью и внешней нормалью к ней.

В криволинейных координатах останутся без изменения все соотношения для областей 3 и 2, а в условии (1.14) появится дополнительный член, учитывающий отклонение поверхности

$$p_2(s_2) = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\frac{dA}{ds_2} + \alpha_{3w} \right), \quad \alpha = \sigma^2 \alpha_{3w} \quad (1.17)$$

Соотношения (1.6), (1.10) и (1.17) позволяют сформулировать задачу для скорости газа около отклоненного участка поверхности u_w для закритического возмущенного



Фиг. 3. Распределения скорости газа около стенки при обтекании угла сжатия или при падении скачка уплотнения на плоскую поверхность: 1 – закритический режим течения; 2 – докритический режим течения

течения, которая в новых переменных

$$U_1 = \frac{u_w}{\sqrt{c^2 - \alpha_w}}, \quad X_1 = 2a\sqrt{c^2 - \alpha_w}s_2, \quad \alpha_w = \frac{\omega}{a}\alpha_{3w} \quad (1.18)$$

примет прежний вид (1.15) и будет иметь прежнее решение (1.16). Для докритического возмущенного течения скорость газа около отклоненного участка поверхности будет сохранять постоянное значение $u_w = \sqrt{c^2 - \alpha_w}$.

На фиг. 3 в переменных (1.15) представлены интегральные кривые для случая обтекания угла сжатия ($\alpha_w > 0$) или падения скачка уплотнения соответствующей интенсивности (начало подвижной системы координат помещается в угловой точке или в точке падения скачка при $X = 0$). Согласно полученным выше результатам, асимптотами решений на горизонтальном ($X < 0$) и на отклоненном ($X > 0$) участках поверхности являются

$$U = \pm 1, \quad U = \pm u_\alpha, \quad u_\alpha = (1 - \alpha_w / c^2)^{1/2}$$

Если возмущение (угловая точка или скачок уплотнения) перемещается в направлении основного потока, то реализуется закритическое возмущенное течение. Значение функции U остается постоянным вплоть до точки возмущения при $X \leq 0$ (кривая 1 на фиг. 3), так как в этом случае возмущения не распространяются вверх по потоку. За точкой возмущения при $X > 0$ интегральная кривая выходит на новую асимптоту $U = -u_\alpha$ (согласно виду кривых 1 из нижней половины фиг. 2). Если же возмущение перемещается навстречу основному потоку, то реализуется докритическое возмущенное течение. Функция U при $X \leq 0$ (кривая 2 на фиг. 3) изменяется от асимптотического значения $U = 1$ на горизонтальном участке поверхности до ее значения $U = u_\alpha$ на отклоненном участке (согласно виду кривых 2 из верхней половины фиг. 2). За точкой $X = 0$ функция U сохраняет неизменным свое новое значение, соответствующее новому положению обтекаемой поверхности или новому значению давления.

2. Пусть теперь возмущение давления $\Delta p \sim \theta \ll 1$ индуцирует в пристеночном слое 3 лишь линейные возмущения продольной компоненты скорости $\Delta u^{(3)} \ll u^{(3)} \sim u_{\Delta p} \sim \sigma \ll 1$. Тогда из сопоставления порядков величин членов уравнения сохранения продольного импульса следует, что $\Delta u^{(3)} \sim \theta/\sigma \ll u^{(3)} \sim \sigma$ и $\theta \ll \sigma^2$. Характерная толщина слоя 3 остается прежней $\Delta y^{(3)} \sim u^{(3)}\delta \sim \epsilon\sigma$, а ее изменение по порядку величины будет равно $\Delta(\Delta y^{(3)}) \sim \Delta u^{(3)}\Delta y^{(3)}/u^{(3)} \sim \epsilon\theta/\sigma$. Характерная величина вертикальной

компоненты скорости будет равна $v^{(3)} \sim \varepsilon\theta/\Delta x$, где $\Delta x \ll 1$ – опять характерная протяженность возмущенной области течения. Условия малости вертикального изменения давления и влияния вязких эффектов в слое 3 приводят к прежним оценкам для протяженности возмущенной области течения $\varepsilon\sigma \ll \Delta x \ll \sigma^3$.

В области 2 с толщиной, по порядку величины равной толщине пограничного слоя $\Delta y^{(2)} \sim \delta \sim \varepsilon$, где продольная компонента скорости имеет тот же порядок величины, что и в набегающем потоке $u^{(2)} \sim 1$, возмущение продольной компоненты скорости за счет смещения линий тока на величину изменения толщины пристеночного слоя 3 по порядку величины будет равно $\Delta u^{(2)} \sim \Delta(\Delta y^{(3)})/\varepsilon \sim \theta/\sigma$, а характерная величина вертикальной компоненты скорости будет равна $v^{(2)} \sim \varepsilon\theta/\sigma\Delta x$.

В возмущенной области 1 равномерного набегающего потока с характерными размерами $\varepsilon/\sigma \ll \Delta x \sim \Delta y^{(1)} \ll \sigma^3$ возмущения компонент скорости должны иметь тот же порядок величины, что и возмущение давления $\Delta u^{(1)} \sim v^{(1)} \sim \Delta p \sim \theta$. Учитывая, что вертикальная компонента скорости должна иметь тот же порядок величины, что и в области 2, можно получить прежнее соотношение для характерной протяженности возмущенной области течения $\Delta x \sim \varepsilon/\sigma$, $\varepsilon \ll \sigma^4 \ll 1$.

Поэтому для линейного невязкого пристеночного слоя 3 можно ввести прежние независимые переменные и новые асимптотические разложения функций течения

$$x = \frac{\varepsilon}{\sigma} x_3, \quad y = \varepsilon\sigma y_3 \quad (2.1)$$

$$u = \sigma(\omega y_3 + c) + \frac{\theta}{\sigma} u_3 + \dots, \quad v = \sigma\theta v_3 + \dots, \quad p = p_w + \dots$$

$$p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \theta p_3 + \dots$$

Подстановка разложений (2.1) в уравнения Навье – Стокса и совершение предельного перехода

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0, \quad \varepsilon \ll \sigma^4, \quad \theta \ll \sigma^2 \quad (2.2)$$

показывают, что в первом приближении для слоя 3 будут справедливы уравнения

$$\rho_w \left[(\omega y_3 + c) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega v_3 \right] + \frac{dp_3}{dx_3} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} = 0.$$

На поверхности должно выполняться условие непротекания (1.4), начальное условие получается опять из сращивания с пристеночной частью невозмущенного пограничного слоя

$$u_3 \rightarrow 0 \quad (p_3 \rightarrow 0) \quad (2.4)$$

Решение краевой задачи (1.4), (2.3) и (2.4) удастся получить в аналитическом виде

$$u_3 = -\frac{p_3}{c\rho_w}, \quad v_3 = \frac{y_3}{c\rho_w} \frac{dp_3}{dx_3} \quad (2.5)$$

Для основной части пограничного слоя области 2 также вводятся прежние независимые переменные и новые асимптотические разложения функций течения

$$x = \frac{\varepsilon}{\sigma} x_2, \quad y = \varepsilon y_2 \quad (2.6)$$

$$u = u_{20}(y_2) + \sigma c + \frac{\theta}{\sigma} u_{21} + \dots, \quad v = \theta v_{21} + \dots, \quad p = p_{20}(y_2) + \frac{\theta}{\sigma} p_{21} + \dots$$

$$p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \theta p_2 + \dots, \quad h = h_{20}(y_2) + \frac{\theta}{\sigma} h_{21} + \dots$$

Подстановка разложений (2.6) в уравнения Навье – Стокса и в уравнение состояния и выполнение предельного перехода (2.2) показывают, что в первом приближении течение в области 2 будет описываться прежней системой уравнений (1.8) и их решением (1.9). Выполнение условий сращивания асимптотических разложений в областях 3 и 2 приводит к соотношениям

$$\rho_w = \rho_{20}(0), \quad A\omega = \frac{P_3}{c\rho_w} \quad (2.7)$$

Для возмущенной области 1 внешнего набегающего потока можно использовать прежние переменные и асимптотические разложения функций течения (1.11), где величину σ^2 следует заменить на θ . Очевидно, что результатом последующих действий будет прежнее соотношение (1.14), которое с учетом (2.7) позволяет сформулировать задачу для толщины вытеснения линейного пристеночного слоя 3

$$\frac{dA}{dX} \mp A = 0, \quad A \rightarrow 0 \quad (X \rightarrow \mp\infty) \quad (2.8)$$

где верхний знак относится к случаю $c > 0$ (возмущение давления движется навстречу основному потоку), а нижний – к случаю $c < 0$ (возмущение давления движется в направлении основного потока). Ее решение имеет вид

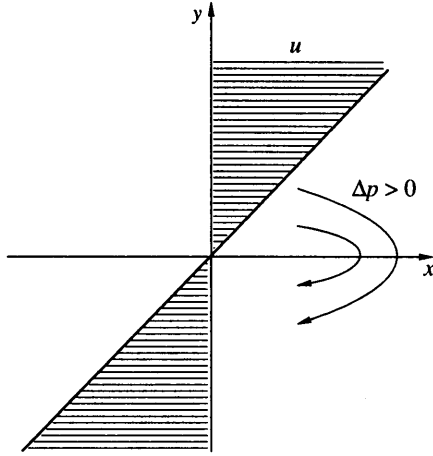
$$A \approx \exp(\pm X) \quad (2.9)$$

Оно описывает нарастание возмущений при $X > -\infty$ и $c > 0$ для докритического режима течения или их затухание при $X < \infty$ и $c < 0$ для закритического режима течения (см. решение (1.16)).

3. При перемещении возмущения давления в направлении основного потока профиль продольной компоненты скорости u в невозмущенном пограничном слое в системе координат, движущейся вместе с возмущением давления, будет содержать участки с положительными и отрицательными ее значениями. Некоторая окрестность точки, где $u = 0$, обычно называется критическим слоем [22]. Так как этот слой содержит сколь угодно малые значения скорости u , то при воздействии на него любого малого возмущения давления $\Delta p \ll 1$ можно определить характерную толщину $\Delta u_* \sim \varepsilon \Delta p^{1/2}$ слоя нелинейных возмущений продольной компоненты скорости $\Delta u \sim u \sim \Delta p^{1/2}$.

Когда в разд. 1 при возмущении давления $\Delta p \sim \theta \ll 1$ и скорости его перемещения $u_{\Delta p} \sim \sigma \ll 1$, $\theta \sim \sigma^2$ рассматривался нелинейный пристеночный слой 3, то не было необходимости как-то выделять критический слой, который также располагался вблизи поверхности и составлял с ним одно целое.

При $\theta \ll \sigma^2$ (разд. 2) пристеночный слой 3 – линейный и изменение его толщины равно $\Delta(\Delta y^{(3)}) \sim \varepsilon \theta / \sigma$. В то же время возмущение давления $\Delta p \sim \theta$ должно вызывать нелинейные возмущения продольной компоненты скорости $\Delta u \sim u \sim \theta^{1/2}$ в критическом слое с характерной толщиной $\Delta u_* \sim \varepsilon \theta^{1/2} \gg \Delta(\Delta y^{(3)})$, т.е. возмущенное течение должно было бы формироваться за счет изменения толщины критического слоя, а не линейного пристеночного слоя 3. Однако этого не происходит, так как критический слой по порядку величины тоньше пристеночного слоя 3 $\Delta u_* \sim \varepsilon \theta^{1/2} \ll$



Фиг. 4. Схема воздействия возмущения давления на критический слой

$\ll \Delta y^{(3)} \sim \varepsilon \sigma$ и поэтому находится на некотором удалении от поверхности. И положительное возмущение давления $\Delta p > 0$, например, разворачивает в обратном направлении струйки тока с наименьшими скоростными напорами из верхней части критического слоя (см. схему на фиг. 4). При этом толщина верхней части критического слоя уменьшается, нижней части – увеличивается, а его суммарная толщина в основном порядке величины не изменяется и он не оказывает никакого воздействия на формирование возмущенного течения.

4. Теперь рассматривается случай, когда вязкий линейный пристеночный слой 3 является нестационарным в выбранной подвижной системе координат. При обезразмеривании нестационарных уравнений Навье – Стокса время t относится к величине l/u_∞ .

Учет нестационарности не изменяет характерные размеры возмущенных областей течения и порядки функций в них и сопоставление порядков величин нестационарных и конвективных членов уравнений Навье – Стокса $\partial \Delta u / \partial t \sim u \partial \Delta u / \partial x$ позволяет сразу определить характерный масштаб времени для слоя 3 $t \sim \varepsilon / \sigma^2$. Тогда для нестационарного линейного вязкого пристеночного слоя 3 можно ввести независимые переменные и асимптотические разложения функций течения типа (2.1)

$$t = \frac{\varepsilon}{\sigma^2} t_3, \quad x = \frac{\varepsilon}{\sigma} x_3, \quad y = \varepsilon \sigma y_3 \quad (4.1)$$

$$u = \sigma(\omega y_3 + c) + \frac{\theta}{\sigma} u_3 + \dots, \quad v = \sigma \theta v_3 + \dots, \quad \rho = \rho_w + \dots$$

$$p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \theta p_3 + \dots$$

Подстановка разложений (4.1) в уравнения Навье – Стокса и совершение предельного перехода (2.2) показывают, что в первом приближении течение в слое 3 будет описываться следующими уравнениями:

$$\rho_w \left[\frac{\partial u_3}{\partial t_3} + (\omega y_3 + c) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \omega v_3 \right] + \frac{dp_3}{dx_3} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} = 0$$

Их решение должно удовлетворять краевым условиям (1.4) и (2.4) и некоторым начальным условиям при $t_3 = 0$.

Использование представления решения (4.2) в виде волн по времени и по продольной координате

$$u_3 = -\frac{df}{dy_3} \exp(i\lambda t_3 + ikx_3), \quad v_3 = ikf \exp(i\lambda t_3 + ikx_3) \quad (4.3)$$

$$p_3 = d \exp(i\lambda t_3 + ikx_3)$$

где $f = f(y_3)$, а k , λ и d – некоторые постоянные, позволяет сформулировать задачу Коши для функции $f(y_3)$ и выписать ее решение

$$\left(\frac{\lambda}{k} + c + \omega y_3 \right) \frac{df}{dy_3} - \omega f = \frac{d}{\rho_w}, \quad f(0) = 0 \quad (4.4)$$

$$f(y_3) = \frac{dk}{\rho_w(\lambda + ck)} y_3$$

Так как в областях 2 и 1 продольные компоненты скорости по порядку величины больше, чем в слое 3, то там будут несущественны нестационарные члены и время $t_3 = t_2 = t_1$ будет играть роль параметра для решений в этих областях. Поэтому для области 2 будут справедливы прежние переменные и асимптотические разложения функций течения (2.6), уравнения (1.8) и их решение (1.9). Сращивание асимптотических разложений в областях 3 и 2 с учетом соотношений (4.3) и (4.4) приводит к очевидному результату

$$\rho_w = \rho_{20}(0), \quad A(t_2, x_2)\omega = \frac{k}{\rho_w(\lambda + ck)} p_3 \quad (4.5)$$

Для области 1 будут справедливы переменные и асимптотические разложения (1.11) (с учетом замены величины σ^2 на θ) и соотношение (1.14) в качестве итогового результата. Используя еще представления (4.3) и последнее из соотношений (4.5), удастся получить окончательные дисперсионные соотношения

$$\Lambda_r = -K_r(2K_i \pm 1), \quad \Lambda_i \pm K_i = K_r^2 - K_i^2 \quad (4.6)$$

$$\lambda = 2ac^2(\Lambda_r + i\Lambda_i), \quad k = 2a|c|(K_r + iK_i)$$

где верхний знак соответствует докритическому течению при $c > 0$, а нижний – закритическому при $c < 0$. Здесь Λ_r – частота, K_r – волновое число, Λ_i и K_i – инкременты амплитуды возмущений по времени и по продольной координате.

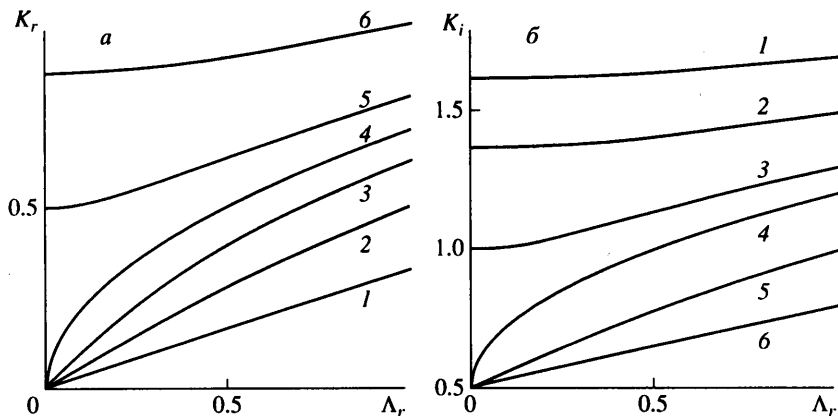
Соотношения (4.6) могут быть представлены в виде биквадратного уравнения для величины K_r и квадратного – для K_i

$$4K_r^4 + (1 - 4\Lambda_i)K_r^2 - \Lambda_r^2 = 0, \quad K_i^2 \pm K_i + \Lambda_i - K_r^2 = 0 \quad (4.7)$$

В первом из уравнений (4.7) величина Λ_r может рассматриваться как независимая переменная, а Λ_i – как параметр. Его решение выписывается в виде

$$K_r = (1/2\sqrt{2})(-1 + 4\Lambda_i + ((1 - 4\Lambda_i)^2 + 16\Lambda_r^2)^{1/2})^{1/2} \quad (4.8)$$

где свободные знаки выбраны так, чтобы величины K_r и K_r^2 были положительными. На фиг. 5, а представлены зависимости волнового числа K_r от частоты Λ_r для различных значений инкремента Λ_i (кривые 1–6, кривая 3 при $\Lambda_i = 0$ соответствует нейтральным колебаниям по времени). В стационарном случае при $\Lambda_r = \Lambda_i = 0$ волновое число $K_r = 0$, что означает отсутствие колебаний возмущений по продольной



Фиг. 5. Дисперсионные кривые: *a* – зависимости волнового числа K_r от частоты Λ_r при значениях инкремента амплитуды возмущений по времени $\Lambda_i = -2; -0,5; 0; 0,25; 0,5; 1$ (кривые 1–6); *б* – зависимости инкремента амплитуды возмущений по продольной координате K_i от Λ_r при $\Lambda_i = -1; -0,5; 0; 0,25; 1; 3$ (кривые 1–6)

координате. В целом кривые на фиг. 5, *a* показывают, что при всех значениях частоты Λ_r колебания возмущений тем сильнее растут по времени, чем больше длина их волны (малые значения волнового числа K_r , $\Lambda_i < 0$, кривые 1 и 2, например). И наоборот, затухают колебания тем сильнее, чем меньше длина их волны (большие значения K_r , $\Lambda_i > 0$, кривые 5 и 6, например).

Если решение (4.8) подставить во второе уравнение (4.7) для величины K_i , то его решение в зависимости от переменной Λ_r и параметра Λ_i можно выписать в конечном виде

$$K_i = \mp \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 4\Lambda_i + ((1 - 4\Lambda_i)^2 + 16\Lambda_r^2)^{1/2}}{2} \right)^{1/2} \right) \quad (4.9)$$

где свободные знаки выбирались так, чтобы в стационарном случае при $\Lambda_r = \Lambda_i = 0$ получалось значение $K_i = \mp 1$ (см. прежнее решение (2.9)). Очевидно, что решение (4.9) симметрично относительно горизонтальной оси Λ_r , поэтому на фиг. 5, *б* представлены только зависимости для закритического течения (со знаком плюс), кривая 3 при $\Lambda_r = 0$ соответствует нейтральным колебаниям по времени.

Кривые на фиг. 5, *б* показывают, что все колебания возмущений затухают по продольной координате (при докритических течениях – вверх по потоку, а при закритических – вниз по потоку) и что минимальный инкремент $|K_i|_{\min} = 0,5$. Кроме того, колебания затухают тем сильнее, чем сильнее они нарастают по времени (большие значения K_i , $\Lambda_i < 0$, кривые 1 и 2, например). А когда колебания все сильнее затухают по времени, они все слабее затухают по продольной координате (меньшие значения K_i , $\Lambda_i > 0$, кривые 5 и 6, например).

Заключение. При исследовании взаимодействия бегущего возмущения давления с ламинарным пограничным слоем установлены следующие факты.

При достаточно большой скорости перемещения возмущения давления течение может оставаться безотрывным. Направление перемещения возмущения давления определяет докритический или закритический тип пограничного слоя. Изменение толщины пограничного слоя всегда происходит в основном за счет изменения толщины линейного или нелинейного пристеночного слоя. В нестационарном случае

коротковолновые колебания затухают по времени, а длинноволновые – нарастают. Все колебания затухают с ростом продольной координаты.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00462).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейланд В.Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
2. Нейланд В.Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1529. 125 с.
3. Гогши Л.В., Нейланд В.Я., Степанов Г.Ю. Теория двумерных отрывных течений // Итоги науки и техники. Сер. Гидромеханика. М.: ВИНТИ, 1975. Т. 8. С. 5–73.
4. Schneider W. Upstream propagation of unsteady disturbances in supersonic boundary layers // J. Fluid Mech. 1974. V. 63. Pt 3. P. 465–485.
5. Brown S.N., Daniels P.G. On the viscous flow about the trailing edge of a rapidly oscillating plate // J. Fluid Mech. 1975. V. 67. Pt 4. P. 743–761.
6. Рыжов О.С. Уравнение нестационарного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 4. С. 780–783.
7. Рыжов О.С., Терентьев Е.Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 6. С. 1007–1023.
8. Рыжов О.С. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околосзвуковых скоростях внешнего потока // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1091–1094.
9. Smith F.T. On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1979. V. 366. № 1724. P. 91–109.
10. Жук В.И., Рыжов О.С. Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 6. С. 1326–1329.
11. Липатов И.И., Нейланд В.Я. К теории нестационарного отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // Учен. зап. ЦАГИ. 1987. Т. 18. № 1. С. 36–49.
12. Абловиц М., Сизур Х. Солитоны и методы обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.
13. Жук В.И., Рыжов О.С. Об одном свойстве линеаризованных уравнений пограничного слоя с самоиндуцированным давлением // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. № 5. С. 1042–1045.
14. Жук В.И., Рыжов О.С. О решениях дисперсионного уравнения из теории свободного взаимодействия пограничного слоя // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. № 5. С. 1085–1088.
15. Жук В.И., Рыжов О.С. О локально-невязких возмущениях в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 1. С. 56–59.
16. Жук В.И., Попов С.П. Нестационарная волна отрыва в пограничном слое при сверхзвуковом обтекании // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303. № 4. С. 822–824.
17. Crocco L. Considerations on the shock-boundary layer interaction // Proc. Conf. on High-Speed Aeronaut. Brooklin: Polytech. Inst. Brooklin, 1955. P. 75–112.
18. Нейланд В.Я. Особенности отрыва пограничного слоя на охлажденном теле и его взаимодействие с гиперзвуковым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 6. С. 99–109.
19. Нейланд В.Я. К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 1. Пространственные течения // Учен. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 2. С. 70–79.
20. Нейланд В.Я. Асимптотическая теория отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // Успехи механики. 1981. Т. 4. Вып. 2. С. 3–62.
21. Нейланд В.Я. Особенности взаимодействия и отрыва трансзвукового пограничного слоя // Учен. зап. ЦАГИ. 1987. Т. 18. № 2. С. 30–45.
22. Benney D.J., Bergeron R.F., Jr. A new class of nonlinear waves in parallel flows // Stud. Appl. Math. 1969. V. 48. № 3. P. 181–204.