

УДК 532.517.2:532.527

© 2001 г. Ф.Б. КАПЛАНСКИЙ, Ю.А. РУДИ

**ЭВОЛЮЦИЯ ВЯЗКОГО ВИХРЕВОГО КОЛЬЦА**

На основе существующего решения уравнения Стокса для завихренности в движущейся системе координат получены поле скорости внутри вязкого вихревого кольца и его скорость как целого. Показано, что найденные характеристики движения связывают ранее полученные результаты для предельных времен и подтверждаются экспериментальными данными. Проведен анализ влияния на процесс развития вихревого кольца значения начального числа Рейнольдса путем построения диаграмм вовлечения.

Вихревые кольца представляют собой сравнительно простой для экспериментального воспроизведения объект гидродинамики, в котором концентрируются многие проблемы. Его изучению посвящены многочисленные исследования на протяжении более 100 лет (см. обзоры в [1, 2]).

В частности, установлено, что вихревое кольцо в своем развитии проходит две стадии: стадию формирования и стадию последующей эволюции. Описание сформировавшегося вихревого кольца предполагает наличие как соответствующих решений уравнений Навье – Стокса, так и формул для динамических характеристик его движения. Большинство теоретических результатов, посвященных этой теме, описывает лишь начальную и финальную фазы развития кольца. При этом для описания финальной диффузионной стадии развития используется автомодельное решение [3], а для изучения начальной фазы – гауссово распределение завихренности в ядре вихря.

Попытка обобщения решения [3] на более широкий временной промежуток принята в [4], где были включены в рассмотрение эффекты второго порядка, возникающие вследствие воздействия нелинейных членов, однако временной промежуток правомочности решения оказался ограниченным, т.е. равномерность аппроксимации была потеряна. Другое решение задачи о развитии вихревого кольца в форме распределения завихренности, удовлетворяющее условию сохранения импульса вихря со временем, предложено в [5] (см. также [6]). Впоследствии это распределение завихренности было интерпретировано как первый член разложения полного решения по зависящему от времени числу Рейнольдса [7]. Для этого проведено преобразование подобия для исходных уравнений с включением нового параметра  $\tau = R_0/L$  как отношения начального внешнего радиуса вихревого кольца  $R_0$  к зависящему от времени масштабу ядра  $L = (2\nu t)^{1/2}$  и интерпретированному как внутренний радиус кольца, где  $\nu$  – кинематическая вязкость и  $t$  – время. Этот подход позволил выявить смысл найденного нового распределения завихренности как обобщение результата [3]. Появление решений, описывающих движение вязкого кольцевого вихря, обусловило в свою очередь попытки найти на их основе скорость кольца как целого и другие характеристики его движения.

Общее выражение для скорости вязкого вихревого кольца, справедливое для произвольных распределений вихря и функции тока, получено в [8] (см. также [9]). На его основе, по заданному гауссовому распределению завихренности в ядре определено соответствующее выражение для функции тока, а также найдена формула для скорости кольца с тонким ядром. Предпринимавшиеся для развития этого результата

попытка получить новые выражения для скорости вязкого вихревого кольца содержали противоречие, так как в формулу, выведенную на основе полных уравнений Навье – Стокса, подставлялись решения Стокса, а именно результат [3] и его обобщение [5].

В [10, 11] показано, что равномерно-пригодная аппроксимация решений второго порядка для задачи о вихревом кольце может быть найдена путем наложения пространственно-равномерного сдвига на решение первого порядка, и тем самым снято указанное противоречие. При использовании решения [3] найдена асимптотическая скорость дрейфа кольца, справедливая для финальной диффузионной стадии его развития.

Целью настоящей работы является нахождение основных параметров движения сформировавшегося вихревого кольца на основе ранее полученных линейных приближений уравнений Навье – Стокса [5–7]. Новый интерес к этой проблеме обусловлен результатами [10, 11], из которых, в частности, следует, что скорость вихревого кольца, определенная с помощью решения Стокса, может обладать свойствами, описываемыми полными уравнениями Навье – Стокса [1]. В целях оценки влияния на процесс начального числа Рейнольдса применен метод диаграмм вовлечения [12].

Предлагаемая в настоящей статье модель вязкого вихревого кольца аналогична модели для вихревой пары, представленной в [13], и ее результаты являются развитием [5].

**1. Решение уравнения Стокса в движущейся системе координат.** Рассматривается осесимметричное нестационарное движение вязкой несжимаемой жидкости. Для описания движения вихревого кольца используется эволюционное уравнение для азимутальной компоненты вихря  $\zeta$  (см., например, [14])

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(v \zeta) + \frac{\partial}{\partial x}(u \zeta) = \nu \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\zeta}{r^2} \right] \quad (1.1)$$

где  $x, r$  – оси цилиндрической системы координат. Аксиальная и радиальная компоненты скорости обозначены соответственно  $u$  и  $v$  (фиг. 1).

Функция тока введена как

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + U(t), \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.2)$$

где  $U(t)$  – скорость кольца, которая должна быть определена далее (см. [1, 4, 10, 11]).

Азимутальная компонента вихря  $\zeta$  может быть выражена через функцию тока с помощью уравнения

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -r \zeta \quad (1.3)$$

Граничные условия для кольцевого вихря выбирались в виде

$$\Psi(0, x) = \zeta(0, x) = 0 \quad (1.4)$$

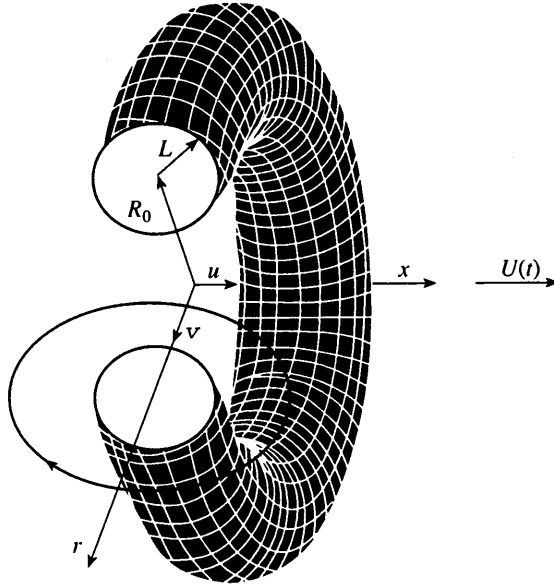
$$(x^2 + r^2)^{1/2} \rightarrow \infty: \Psi, \zeta \rightarrow 0 \quad (1.5)$$

Интегрируя (1.1) при использовании граничных условий (1.4) и (1.5), можно получить условие сохранения импульса вихря

$$I = \pi \rho \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r^2 \zeta dx dr \quad (1.6)$$

Вводя безразмерные переменные

$$\sigma = \frac{r}{L}, \quad \eta = \frac{x - x_0(t)}{L}, \quad \tau = \frac{R_0}{L}, \quad \Phi = \frac{\Psi}{\zeta_0 L^3}, \quad \omega = \frac{\zeta}{\zeta_0}, \quad L = \sqrt{2\nu t}, \quad \zeta_0 = A(M, \nu, R_0) t^{-\lambda} \quad (1.7)$$



Фиг. 1. Геометрия вязкого вихревого кольца

и используя обозначения

$$U(t) = \frac{dx_0(t)}{dt}, \quad M = \frac{l}{\rho}$$

где  $\rho$  – плотность жидкости, можно выписать соответствующее уравнение для завихренности в форме

$$\begin{aligned} & -2\lambda\omega - \sigma \frac{\partial\omega}{\partial\sigma} - \eta \frac{\partial\omega}{\partial\eta} - \tau \frac{\partial\omega}{\partial\tau} + \text{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial\sigma} \left( -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \omega \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} \omega \right) \right] = \\ & = \frac{\partial^2\omega}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial\omega}{\partial\sigma} - \frac{\omega}{\sigma^2}, \quad \text{Re} = \frac{\zeta_0 L^2}{\nu} \end{aligned} \quad (1.8)$$

В [7] решение уравнения (1.8) найдено для малых чисел  $\text{Re}$  в форме асимптотических разложений

$$\begin{aligned} \omega(\sigma, \eta, \tau; \text{Re}) &= \omega_1(\sigma, \eta, \tau) + \text{Re} \omega_2(\sigma, \eta, \tau) + \dots \\ \Phi(\sigma, \eta, \tau; \text{Re}) &= \Phi_1(\sigma, \eta, \tau) + \text{Re} \Phi_2(\sigma, \eta, \tau) + \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

которые справедливы при  $\text{Re} \rightarrow 0$  для фиксированных  $\sigma, \eta, \tau$ . Первый член разложения вычислен в виде

$$\omega_1 = \exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma^2 + \eta^2 + \tau^2)\right) I_1(\sigma\tau) \quad (1.10)$$

где  $I_1$  – модифицированная функция Бесселя. Значения величин  $\zeta_0$  и  $\text{Re}$  заданы выражениями

$$\zeta_0 = \frac{2M}{(4\pi\nu t)^{3/2} R_0}, \quad \text{Re} = \frac{M}{2(\pi\nu)^{3/2} t^{1/2} R_0} = \frac{M\tau}{2^{1/2} \pi^{3/2} \nu R_0^2} \quad (1.11)$$

Прямая подстановка (1.10) в (1.6) показывает, что вычисленное решение удовлетворяет условию сохранения импульса.

Все результаты, приводимые ниже, справедливы в том же промежутке времени,

что и решение (1.10), и это позволяет формально с помощью (1.10) описывать движение вязкого вихревого кольца для случая, когда начальное число  $Re_0$  очень мало (оно может быть введено как  $Re_0 = M/\pi R_0^2 \nu = \Gamma_0/\nu$ , см. ниже (3.11)).

Подчеркнем, что параметр  $\tau$  обратно пропорционален времени. Индекс 1 далее опущен.

**2. Поле скорости внутри движущегося вихревого кольца.** Для вычисления функции тока  $\Psi$  используется метод интегральных преобразований, эффективность которого для рассматриваемой задачи показана в [5]. Легко видеть, что интегральное преобразование Фурье – Ганкеля для завихренности  $\omega$  (1.10) имеет вид

$$\Omega = \exp\left(-\frac{\mu^2 + \alpha^2}{2}\right) J_1(\tau\mu) \quad (2.1)$$

Соответственно образ функции  $f = \Phi/\sigma$  при использовании уравнения (1.3) может быть определен как

$$f = \exp\left(-\frac{\mu^2 + \alpha^2}{2}\right) (\mu^2 + \alpha^2)^{-1} J_1(\tau\mu) \quad (2.2)$$

где  $J_1$  – функция Бесселя первого порядка. В свою очередь, определив обратное преобразование Фурье – Ганкеля для  $f$ , получим следующее выражение для  $\Psi$ :

$$\Psi = \frac{2\zeta_0 L^3 \sigma}{\sqrt{2\pi}} \iint_0^\infty \mu \exp\left(\frac{-\mu^2 - \alpha^2}{2}\right) (\mu^2 + \alpha^2)^{-1} J_1(\tau\mu) J_1(\sigma\mu) \cos(\alpha\eta) d\mu d\alpha \quad (2.3)$$

Интегрирование по переменной  $\alpha$  [15] дает

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-\alpha^2/2)}{\mu^2 + \alpha^2} \cos(\alpha\eta) d\alpha = \frac{1}{4\mu} \pi \exp\left(\frac{\mu^2}{2}\right) F(\mu, \eta) \quad (2.4)$$

$$F(\mu, \eta) = G(\mu, \eta) + G(\mu, -\eta), \quad G(\mu, \eta) = \exp(\eta\mu) \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\mu + \eta}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

где  $\operatorname{erf}(z)$  – функция ошибок.

Таким образом,  $\Psi$  выражается в форме однократного интеграла

$$\Psi = \frac{M\sigma}{4\pi R_0} \int_0^\infty F(\mu, \eta) J_1(\tau\mu) J_1(\sigma\mu) d\mu \quad (2.5)$$

и соответствующие безразмерные компоненты скорости внутри движущегося вихревого кольца имеют вид

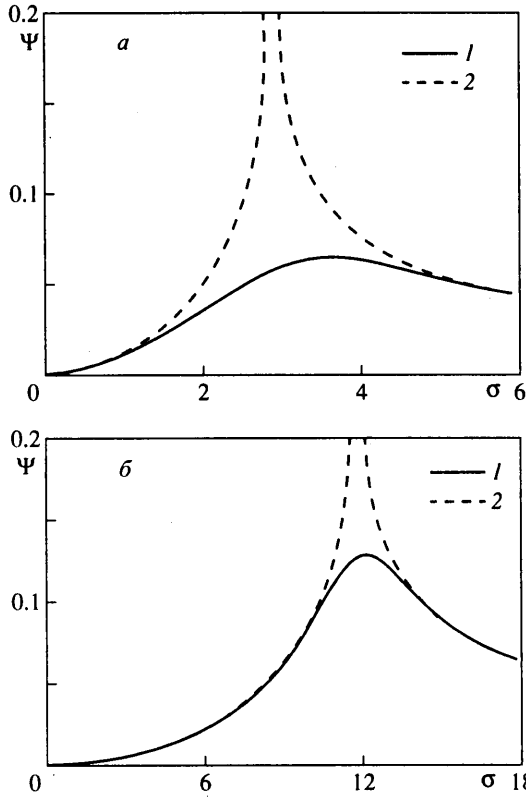
$$u_r = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty \mu^2 F(\mu, \eta) J_1(\tau\mu) J_0(\sigma\mu) d\mu \quad (2.6)$$

$$v_r = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty \mu \{-G(\mu, -\eta) + G(\mu, \eta)\} J_1(\tau\mu) J_1(\sigma\mu) d\mu \quad (2.7)$$

Для понимания поведения решения (2.5) при  $\tau \rightarrow \infty$  рассмотрим известное выражение функции тока для круговой вихревой нити [14]. В принятых обозначениях оно имеет вид

$$\Psi_* = \frac{M\sqrt{\sigma}}{2\pi^2\sqrt{\tau}R_0} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k\right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right\}, \quad k^2 = \frac{4\tau\sigma}{\eta^2 + (\tau + \sigma)^2} \quad (2.8)$$

Сравнение  $\Psi$ , заданной в виде (2.5), и  $\Psi_*$ , вычисленной по (2.8) при  $\eta = 0$ , показано на фиг. 2. Величины, приводимые на фиг. 2, нормированы на  $M/R_0$ . Как можно видеть из этого сравнения,  $\Psi$  стремится к  $\Psi_*$  при увеличении  $\tau$ .



Фиг. 2. Значения функций тока  $\Psi$  (кривая 1) и  $\Psi_*$  (кривая 2) при  $\eta = 0$  для  $\tau = 3$  (а) и 12 (б)

Вычисления  $\Psi$  с помощью (2.5) при  $\tau \rightarrow 0$  приводят к значениям, идентичным решению [3].

**3. Скорость вихревого кольца.** Общее выражение для скорости вязкого вихревого кольца, справедливое для произвольных распределений вихря и функции тока, найдено в [8]

$$U = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\Psi + 6xrv) \zeta dx dr / 2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty r^2 \zeta dx dr \quad (3.1)$$

В [8] выведена формула (3.1) с использованием преобразования Лэмба [16] (основы этого подхода впервые были разработаны Гельмгольцом [17]) для скорости кольца в идеальной жидкости и доказана правомочность ее применения для вязкой жидкости. Формула (3.1) дает мгновенную скорость, с которой движется трехмерный вихревой центроид [9].

Используя (3.1) и (1.7), найдем скорость  $U$  как

$$U = \frac{1}{2} \frac{\zeta_0^2 L^5 \pi}{M} \left[ E_1 - 6 \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \sigma \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} \omega d\eta d\sigma \right] \quad (3.2)$$

$$f = \frac{\Phi}{\sigma}, \quad E = \pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \zeta \Psi dx dr = \zeta_0^2 L^5 \pi \rho \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \sigma f \omega d\sigma d\eta = \zeta_0^2 L^5 \pi \rho E_1$$

где  $E$  – кинетическая энергия.

Интеграл (3.2) при использовании интегрирования по частям может быть переписан в виде

$$\begin{aligned} & -6 \int_0^{\infty} \sigma \left\{ f \omega \eta \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \omega) d\eta \right\} d\sigma = -6 \int_0^{\infty} \sigma \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} f \omega d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 f \omega d\eta \right\} d\sigma = \\ & = 6 E_1 - 6 \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma \eta^2 f \omega d\eta d\sigma \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отсюда получаем

$$U = \frac{\pi}{2} \frac{\zeta_0^2 L^5}{M} \left[ 7 E_1 - 6 \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma \eta^2 f \omega d\eta d\sigma \right] \quad (3.4)$$

Интегральное преобразование Фурье для  $\eta^2 \omega$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_1(\sigma \tau) \exp\left(-\frac{\tau^2 + \sigma^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \exp(i\eta \alpha) d\eta = \\ & = I_1(\sigma \tau) \exp\left(-\frac{\tau^2 + \sigma^2 + \alpha^2}{2}\right) (1 - \alpha^2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Используя (2.1), (2.2) и теорему Парсеваля, вычисляем

$$U = \frac{M \tau}{4\pi^2 R_0^3} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\mu \exp(-\mu^2 - \alpha^2) J_1^2(\tau \mu)}{\mu^2 + \alpha^2} (1 + 6\alpha^2) d\mu d\alpha \quad (3.6)$$

И наконец, интегрируя по  $\alpha$ , находим выражение для  $U$  в виде однократного интеграла

$$U = \frac{M \tau}{4\pi^2 R_0^3} \int_0^{\infty} \{ \pi(1 - \operatorname{erf}(\mu)) (1 - 6\mu^2) + 6\pi^{1/2} \mu \exp(-\mu^2) \} J_1^2(\tau \mu) d\mu \quad (3.7)$$

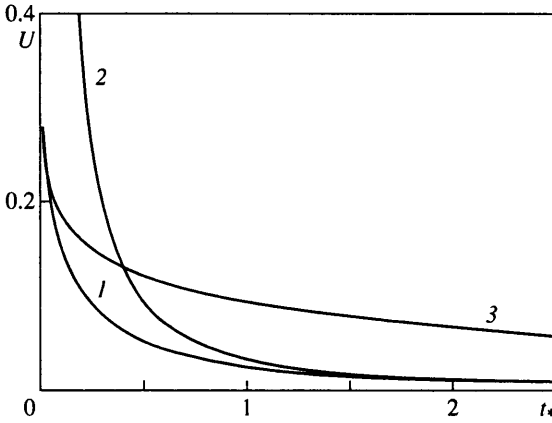
который может быть выражен в конечной форме

$$\begin{aligned} U = & \frac{M \tau}{4\pi^2 R_0^3} \left\{ 3\sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) I_1\left(\frac{\tau^2}{2}\right) + \frac{1}{12} \sqrt{\pi} \tau^2 {}_2F_2\left[\left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}, \left\{\frac{5}{2}, 3\right\}, -\tau^2\right] - \right. \\ & \left. - \frac{3\sqrt{\pi}}{5} \tau^2 {}_2F_2\left[\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}, \left\{2, \frac{7}{2}\right\}, -\tau^2\right] \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  ${}_2F_2$  – обобщенная гипергеометрическая функция [15].

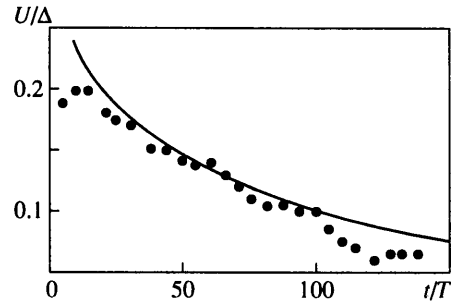
Формула (3.1) для скорости кольцевого вихря выведена на основе полных уравнений Навье – Стокса, и поэтому процедура подстановки в эту формулу решения Стокса в общем случае некорректна. Такая же процедура, впервые использованная в [4], подробно обсуждалась в [1, 10, 11]. В этих работах проанализирована роль пространственно-равномерного сдвига для разложений решений уравнений Навье – Стокса с решениями Стокса в качестве их главных членов и показано, что равномерно-пригодная аппроксимация решений второго порядка в данном случае может быть найдена путем наложения пространственно-равномерного сдвига на решение первого порядка [1]. Последнее доказывает корректность полученного результата (3.8).

Найденные распределения завихренности и функции тока при значениях  $\tau \rightarrow 0$  преобразуются в автомодельное решение [3] и при  $\tau \rightarrow \infty$  стремятся к дельта-функции и круговой вихревой нити соответственно.



Фиг. 3

Фиг. 3. Изменение скорости вязкого вихревого кольца  $U$  со временем. 1 – настоящий расчет, 2 – асимптотическая дрейфовая скорость кольца [10], 3 – скорость кольца с малым поперечным сечением [8]



Фиг. 4

Фиг. 4. Скорость вязкого вихревого кольца. Кривая – расчет по формуле (3.7), точки – эксперимент [19] при  $Re_0 = 900$  и  $R_0 = 1,8$  см

Поведение вычисленной скорости вихря при  $\tau \rightarrow 0$  согласуется с этим выводом. Действительно, разлагая  $J_1(\tau\mu)$  в ряд для малых  $\tau$  [18], получим выражение для асимптотической дрейфовой скорости

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{M\tau^3}{16\pi^2 R_0^3} \int_0^\infty \mu^2 \{ \pi(1 - \operatorname{erf}(\mu))(1 - 6\mu^2) + 6\pi^{1/2} \mu \exp(-\mu^2) \} d\mu = \\
 &= \frac{M\tau^3}{32\pi^2 R_0^3} \frac{28\pi^{1/2}}{15} = \frac{7}{15} \frac{M}{(8\pi\nu t)^{3/2}} = 0,0037038 \frac{l/\rho}{(\nu t)^{3/2}}
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Формула (3.9) идентична результату [10] и справедлива для заключительной фазы развития диффундирующего кольцевого вихря. Особый интерес представляет вычисление выражения (3.7) при больших, но конечных значениях  $\tau$ . Такие значения соответствуют началу стадии развития сформировавшегося вихревого кольца.

Формула для скорости тонкого вихревого кольца в наших обозначениях имеет вид [8, 9]

$$U_0 = \frac{\Gamma_0}{4\pi R_0} \left[ \operatorname{Ln} \left( \frac{8\tau}{\sqrt{2}} \right) - 0,558 + O \left( \frac{1}{\tau} \operatorname{Ln} \frac{1}{\tau^2} \right) \right] \quad (3.10)$$

На фиг. 3 сопоставляются результаты вычислений по формулам (3.7), (3.9) и (3.10). Как видно, для больших времен в пределе  $t^* = 2\nu t / R_0^2 = l / \tau^2 \rightarrow \infty$  найденная скорость совпадает с асимптотической дрейфовой скоростью кольца и для малых времен принимает значения, близкие вычисленным по формуле (3.10). В частности, разность значений  $U_0$  и  $U$  для  $\tau = 10$  меньше 2%. Все величины, приведенные на фиг. 3, нормированы на  $\Gamma_0 / R_0 = M / \pi R_0^3$ , где  $\Gamma_0$  – начальная циркуляция кольца, определяемая из соотношения

$$\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \zeta dr dx = \frac{M}{\pi R_0^2} \left( 1 - \exp \left( -\frac{\tau^2}{2} \right) \right) = \Gamma_0 \left( 1 - \exp \left( -\frac{\tau^2}{2} \right) \right) \quad (3.11)$$

Близость скоростей  $U_0$  и  $U$  при больших  $\tau$  ожидаема, если учесть стремление распределения завихренности (1.10) к распределению Гаусса, использованного при выводе формулы скорости тонкого вихревого кольца [8].

**4. Сравнение с экспериментальными данными.** В [19] экспериментально изучалось движение ламинарного вихревого кольца в воде и была измерена его трансляционная скорость. В отличие от других экспериментов [19] данные по скорости приведены в зависимости от времени, а не от расстояния от сопла, что позволяет провести непосредственное сравнение расчетных и экспериментальных данных. Параметры эксперимента следующие: диаметр сопла 4 см, начальное число  $Re_0 = 900$  и измеренный начальный радиус кольца  $R_0 = 1,8$  см.

Из условия  $Re_0 = \Gamma_0 / \nu = M / \nu \pi R_0^2 = 900$  найдем  $M = 91,6 \text{ см}^4 \cdot \text{с}$ . При использовании масштаба скорости  $\Lambda = 5,0 \text{ см/с}$  [19] из  $\Lambda = \Gamma_* / R_0$  следует, что  $\Gamma_* = 9 \text{ см}^2/\text{с}$  и масштаб времени  $T = R_0^2 / \Gamma_* = 0,36 \text{ с}$ . В соответствии с [19] момент начала фазы сформировавшегося кольца  $t_1 = t_0 / T = 9,2$ . Таким образом, интервал  $t_1 = 9,2-150$ , в котором проводились измерения, соответствует диапазону изменения  $\tau = 7-1,7$ , расположенному вне областей справедливости формул, как для асимптотической скорости дрейфа ( $\tau < 1$  (3.9)), так и для скорости тонких колец ( $\tau > 10$  (3.10)).

В то же время, как видно из фиг. 4, наблюдается хорошее согласие между экспериментально найденными значениями скорости и вычисленными по формуле (3.8). Можно предложить следующее объяснение тому, что формула (3.8), справедливая для малых чисел  $Re$ , остается справедливой и для больших чисел  $Re$ . В соответствии с результатами численного моделирования эволюции вихревого кольца на основе полных уравнений Навье – Стокса расчетные распределения завихренности на начальном этапе отличаются от распределений (1.10). Это происходит из-за влияния нелинейных членов. Однако влияние нелинейности сказывается на изолиниях малых значений завихренности, и это не приводит к значительным изменениям интегральных характеристик эволюции кольца даже при больших числах  $Re$ .

**5. Влияние начального числа Рейнольдса.** Оценка влияния увеличения  $Re_0$  на решения (2.6)–(2.7) может быть осуществлена при использовании метода диаграмм вовлечения [12]. Так, уравнения для траекторий частиц могут быть выписаны в виде

$$\dot{x} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + U(t), \quad \dot{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (5.1)$$

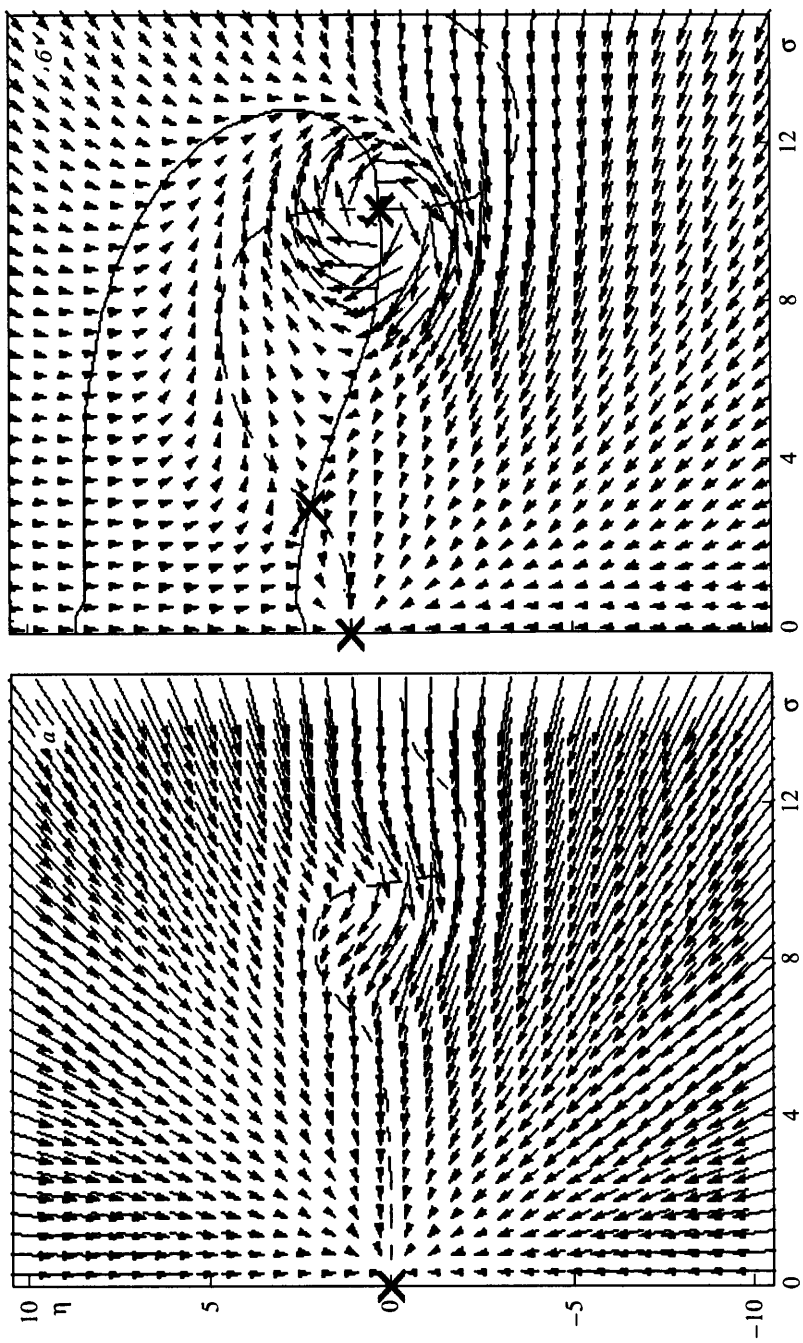
где точки означают производные по времени. В безразмерных переменных система (5.1) приобретает вид

$$\frac{d\sigma}{ds} = -\frac{\sigma}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{Re_0 \tau}{8} \nu, \quad (5.2)$$

$$\frac{d\eta}{ds} = -\frac{\eta}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{Re_0 \tau}{8} u_r, \quad s = \ln t \quad (5.3)$$

Структура течения исследовалась путем определения и классификации критических точек уравнений (5.2) и (5.3) при фиксированных  $\tau$  в зависимости от  $Re_0$ . В отличие от решений (2.6) и (2.7) в системе (5.2), (5.3) присутствует сложная зависимость от  $Re_0$ , и, хотя семейство кривых, полученное из условий равенства правых частей (5.2) и (5.3) нулю, лежит вне областей применимости решений (2.6) и (2.7), гипотетически они могут вести себя, как и нелинейные решения [12]. При  $\tau = 10$  бифуркации решений системы (5.2), (5.3) происходят для чисел  $Re_0 = 150$  и  $750$ . Режим течения жидких частиц при  $\tau = 10$  для  $Re_0 < 150$  иллюстрирует фиг. 5, а. Здесь траектории частиц сходятся в одной критической точке, лежащей на оси симметрии  $\eta$ . При  $Re_0 > 150$  появляются две новые критические точки – "седло" и "фокус". Траектории частиц разделяются на две группы: одни по-прежнему стремятся к первой





Фиг. 5. Диаграммы вовлечения для (вектора скорости)  $\tau = 10$ ,  $a - Re_0 = 100$ ,  $\delta - Re_0 = 600$ . Штриховая кривая – решение уравнения (5.2), сплошная кривая – решение уравнения (5.3); знаки – критические точки

критической точке, тогда как вторые движутся к центру вихревого кольца – в его ядро к точке фокуса (фиг. 5, б). При дальнейшем увеличении числа  $Re_0$  первая группа частиц исчезает и все траектории сходятся в фокусе. Для  $\tau < 2$  режим разделения траекторий частиц не наблюдается. Возможной интерпретацией свойств решения системы (5.2)–(5.3) для тонких колец при больших числах  $Re_0$  является зафиксированный в эксперименте для этих параметров унос завихренности в след, сопровождающийся несохранением импульса вихря.

**Заключение.** Найдено новое, зависящее от времени выражение для скорости вязкого вихревого кольца, связывающее ранее полученные результаты для предельных времен. Это выражение обеспечивает лучшее предсказание поведения этой характеристики эволюции кольца по сравнению с существующими в виде степенной зависимости от времени, о чем свидетельствует достаточно хорошее совпадение с экспериментальными данными. В дополнение к известному решению Стокса задачи о вязком вихревом кольце в форме распределения завихренности [5–7] определено интегральное выражение для соответствующей функции тока. Поскольку это выражение описывает промежуточные формы между толстым кольцом и круговой вихревой нитью, оно может служить полезной аппроксимацией для последней в моделях вихревой динамики. Найденное выражение для функции тока также позволяет построить диаграммы вовлечения и выявить возникающий при росте влияния нелинейности новый режим течения вихревых колец, не наблюдающийся при использовании решения [3].

Авторы признательны Х.С. Кестенбойму за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Estonian Science Foundation (grant № 3493).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shariff K., Leonard A.* Vortex rings // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1992. V. 24. P. 235–279.
2. *Lim T.T., Nickels T.B.* Vortex rings // *Fluid Fortices* / Ed. Green S.I. Kluwer Acad. Publ. 1995. P. 95–153.
3. *Phillips O.M.* The final period of decay of non-homogeneous turbulence // *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 1956. V. 52. Pt 1. P. 135–151.
4. *Kambe T., Oshima Y.* Generation and decay of viscous vortex rings // *J. Phys. Soc. Japan.* 1975. № 1. V. 38. P. 271–280.
5. *Калтаев А.* Исследование динамических характеристик движения вихревого кольца в вязкой жидкости // *Динамика сплошной среды.* Алма-Ата: изд-во КазГУ, 1982. С. 63–70.
6. *Капланский Ф.* О диффузии круговой вихревой нити // *Изв. АН ЭССР. Физ. Мат.* 1984. Т. 33. № 3. С. 372–374.
7. *Березовский А.А., Капланский Ф.Б.* Диффузия кольцевого вихря // *Изв. АН СССР. МЖТ.* 1987. № 6. С. 10–15.
8. *Saffman P.G.* The velocity of viscous vortex rings // *Stud. Appl. Math.* 1970. V. 49. № 4. P. 371–380.
9. *Saffman P.G.* *Vortex Dynamics.* Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1992. 311 p.
10. *Rott N., Cantwell B.* Vortex drift. I. Dynamic interpretation // *Phys. Fluids A.* 1993. V. 5. № 6. P. 1443–1450.
11. *Rott N., Cantwell B.* Vortex drift. II. The flow potential surrounding a drifting vortical region // *Phys. Fluids A.* 1993. V. 5. № 6. P. 1451–1455.
12. *Cantwell B.J.* Transition in the axisymmetric jet // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 104. P. 369–386.
13. *Cantwell B., Rott N.* The decay of a viscous vortex pair // *Phys. Fluids.* 1988. V. 31. № 11. P. 3213–3224.
14. *Batchelor G.K.* *An Introduction to Fluid Dynamics.* Cambridge: Univ. Press, 1967. 615 p.
15. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* *Интегралы и ряды.* М.: Наука, 1983. 750 с.
16. *Lamb H.* *Hydrodynamics.* N.Y.: Dover, 1945. 738 p.

17. *Helmholtz H.* On integrals of the hydrodynamical equations which express vortex – motion // Transl. P.G. Tait, 1867 with a letter by Lord Kelvin (W. Thompson) in London Edinburg Dublin Phil. Mag. J. Sci. Fourth series 33. 1858. P. 485–512. (From German).
18. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган М.: Наука, 1979. 830 с.
19. *Eisenga A.H.M., Verzicco R., Heijst G.J.E., van.* Dynamics of a vortex ring moving perpendicularly to the axis of a rotating fluid // J. Fluid Mech. 1998. V. 354. P. 69–100.

Таллинн

Поступила в редакцию  
11.X.1999