МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 2001

УДК 532.5.013.4

 Г.Г. ДЕНИСОВ

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОВЕРХНОСТИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА МЕЖДУ ЖИДКОСТЯМИ

На основе теорем теоретической механики дан физический смысл возникновения неустойчивости тангенциального разрыва при наличии малой вязкости.

Влияние вязкости жидкости на устойчивость гидродинамических течений давно и неоднократно обсуждалось [1–3]. С одной стороны, при малых скоростях невозмущенных течений вязкость несомненно является стабилизирующим фактором, с другой – при достаточно больших скоростях она выступает как причина неустойчивости. Ранее устойчивость поверхности тангенциального разрыва рассматривалась в невязком случае либо в линейном приближении [3–5] (критический случай по Ляпунову), либо с учетом нелинейных членов (например, [6]), что кардинально усложняет задачу и ограничивает возможности анализа. Введение в рассмотрение вязкости исключает появление тангенциальных разрывов. Однако можно рассматривать случаи, когда из двух только одна жидкость обладает вязкостью или когда обе жидкости вязкие при наличии между ними пленки идеальной жидкости. В этих случаях разрыв в профиле скоростей существует, задача становится математически корректной. В такой постановке аналитически были получены условия устойчивости в [7]. Влияние малой вязкости только одной жидкости на устойчивость на основе энергетического подхода рассматривалась в [8, 9].

Ниже на основе результатов [7] дается физическая интерпретация влияния вязкости (малой) на устойчивость тангенциального разрыва с использованием общих теорем теории устойчивости.

Уравнения гидродинамики для несжимаемой вязкой жидкости при наличии силы тяжести записываются в виде

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\,\nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla\, p - \nu\Delta\mathbf{v} = \mathbf{g}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

Здесь $\mathbf{v}$ – скорость жидкости, p – давление, $\rho, \nu, \mathbf{g}$ – плотность, кинематическая вязкость и ускорение силы тяжести.

Рассмотрим устойчивость поверхности тангенциального разрыва в поле силы тяжести с учетом поверхностного натяжения. Жидкости по обе стороны различны, их вязкости будем предполагать малыми. Дисперсионное соотношение, определяющее решение задачи об устойчивости в виде плоских волн $v_s = A_s e^{i\omega t - ikx + ry}$, в системе координат, связанной с нижней жидкостью, имеет вид [9]

$$(\rho+\rho')\lambda^2 + (-2ik\rho' u_0 + 4k^2\eta + 4k^2\eta')\lambda + gk(\rho-\rho')\alpha k^3 - \rho' k^2 u_0^2 - 4ik^3\eta' u_0 = 0 \qquad (1)$$

Здесь величины со штрихом относятся к верхней, а без штриха к нижней жидкости, u_0 – стационарная скорость верхней жидкости, относительно нижней, $\lambda = i\omega$.

Условия устойчивости в случае идеальных жидкостей [3]

$$u_0^2 \leq 2\frac{(\rho+\rho')}{\rho\rho'}\sqrt{\alpha g(\rho-\rho')} \tag{2}$$

Для двух вязких жидкостей, когда вязкости малы, имеем [7]

$$u_0^2 < 2\frac{(\eta+\eta')^2}{\rho'\eta^2+\rho\eta'^2}\sqrt{\alpha g(\rho-\rho')} \tag{3}$$

Формулу (3) благодаря учету вязкостей можно рассматривать как разрешение критического случая по Ляпунову уравнения (1), к которому относится данная задача при идеальных жидкостях. При $\rho' = 0$ имеем

$$u_0^2 < (1+\eta/\eta')^2 v_{\min}^2 \quad (v_{\min}^2 = 2\sqrt{g\alpha/\rho})$$

где $v_{\min}$ – минимальная фазовая скорость распространения волн в нижней жидкости. В отсутствие вязкости η нижней жидкости неустойчивость возникает, как только u_0 превзойдет $v_{\min}$, а при существенном отношении η/η' величина критической скорости сильно возрастает.

Отметим противоположное влияние на устойчивость вязкостей η и η' и полнейшую аналогию данных результатов с результатами исследования устойчивости гибкого вращающего вала, где отношению η'/η соответствует отношение трения вала о внешнюю среду к его внутреннему трению, являющемуся причиной неустойчивости [10], а также с результатами задачи о возбуждении упругой распределенной системы движущейся относительно нее вязкой средой [11].

Для выяснения физического смысла механизма возникновения неустойчивости рассмотрим эту задачу с иной точки зрения. Характеристическому уравнению (1) поставим в соответствие линейную систему с обобщенными координатами α, β ($\alpha + i\beta = z$), описываемую двумя сопряженными уравнениями

$$(\rho+\rho')\ddot{\alpha} = -2ku_0\rho'\dot{\beta} - 4k^2(\eta+\eta')\dot{\alpha} - s\alpha - 4k^3u_0\eta'\beta$$

$$(\rho+\rho')\ddot{\beta} = 2ku_0\rho'\dot{\alpha} - 4k^2(\eta+\eta')\dot{\beta} - s\beta + 4k^3u_0\eta'\alpha$$

$$s(k,u_0) = gk(\rho-\rho') + \alpha k^3 - \rho' k^2 u_0^2$$

$$w = \tfrac{1}{2}s(k,u_0)(\alpha^2+\beta^2)$$

Здесь w – потенциальная энергия, $\alpha = \beta = 0$ – состояние равновесия.

Формально эту систему можно рассматривать как некоторую механическую систему, находящуюся под действием гироскопических, диссипативных, потенциальных и циркулярных сил, – соответственно первые, вторые, третьи и четвертые члены правых частей уравнений. Роль угловой скорости вращения, определяющей величину гироскопических сил и центробежных сил инерции, играет параметр ku_0.

Такой вид описания системы позволяет просто исследовать ее устойчивость в отсутствие циркулярных сил ($\eta' = 0$), опираясь лишь на общие утверждения теории устойчивости – теоремы Кельвина. Так, если к системе, находящейся под действием гироскопических и потенциальных сил с минимумом потенциальной энергии в состоянии равновесия ($s(k,\ u_0) > 0$), добавляются силы диссипации, то равновесие становится асимптотически устойчивым, если же $s(k,\ u_0) < 0$, то диссипативные силы разрушают устойчивость, если она была возможна за счет гироскопических сил. Таким образом, неустойчивость возникает с ростом u_0 при $s(k,\ u_0) = 0$ и обусловлена наличием вязкости η. Условия асимптотической устойчивости

$$\rho' u_0^2 < gk^{-1}(\rho-\rho') + \alpha k, \quad \rho' u_{0\min}^2 < 2\sqrt{g(\rho-\rho')\alpha} \tag{4}$$

Положив в уравнении (1) $\lambda = \lambda' + iku_0$, что соответствует переходу в другую систему координат, будем иметь

$$(\rho+\rho')\lambda'^2+2\rho iku_0\lambda'+4k^2(\eta+\eta')\lambda'+qk(\rho-\rho')+\alpha k^3-k^2u_0^2\rho+4ik^3u_0\eta=0$$

В этой системе уже нижняя жидкость имеет постоянную составляющую u_0 скорости движения и поэтому в гироскопическую и центробежную силы входит плотность ρ нижней жидкости, а в циркулярную – ее вязкость. Теперь также просто найти условия устойчивости, но уже при $\eta = 0$. Они будут такими, как (4), но с заменой в левых частях неравенств ρ' на ρ.

Соотношение $s(k, u_0)<0$ выявляет факт уменьшения энергии жидкости при появлении волны возмущения, чему способствует наличие вязкости, и ее можно отнести к волнам с отрицательной энергией [9]. Выясняется также, что известные условия устойчивости (2) при $\eta=\eta'=0$ можно рассматривать как устойчивость консервативной системы за счет гироскопической стабилизации равновесного состояния, потенциальная энергия которого не минимальна. Поэтому в силу теоремы Кельвина добавление диссипации разрушает устойчивость.

Теорему Кельвина можно применять и в случае $\eta \neq 0$, $\eta' \neq 0$, переходя в новую систему отсчета заменой $\lambda = \lambda'' + iku_*$ в уравнении (1), где скорость системы равна $u_* = u_0\eta'/(\eta + \eta')$. При этом исчезает мнимость в свободном члене характеристического уравнения (циркулярные силы), а требование его положительности дает условия асимптотической устойчивости (3).

Заключение. Физический смысл изменения условий устойчивости поверхности тангенциального разрыва состоит в самом факте наличия вязкости жидкостей и объясняется в линейной постановке задачи, что существенно отличается от сложного нелинейного объяснения неустойчивости [12] в невязком случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00061).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Heisenberg W.* Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen // Ann. Phys. 1924. B. 74. S. 577–627.
2. *Линь Цзя-Цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
4. *Рэлей* (Стретт Вж.В.). Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 476 с.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 623 с.
6. *Власов В.П., Жданов С.К., Трубников Б.А.* Нелинейная теория неустойчивости Кельвина – Гельмгольца // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 3. С. 10–16.
7. *Куликовский А.Г., Шикина И.С.* О влиянии вязкости на устойчивость тангенциального разрыва в несжимаемой жидкости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1997. № 6. С. 29–32.
8. *Cairns R.A.* The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows // J. Fluid Mech. 1979. V. 92. № 1. P. 1–14.
9. *Островский Л.А., Рыбак С.А., Цимринг Л.Ш.* Волны отрицательной энергии в гидродинамике // Успехи физ. наук. 1986. Т. 150. Вып. 3. С. 417–437.
10. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
11. *Денисов Г.Г.* Диссипация и устойчивость в механических системах // Изв. РАН. МТТ. 1998. С. 183–190.
12. Физическая экциклопедия. Т. 1. М.: Сов. энциклопедия, 1988. 704 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
3.XI.1998