

УДК 533.6.011.5: 532.516.5

© 2001 г. В.А. БАШКИН, И.В. ЕГОРОВ, М.В. ЕГОРОВА, Д.В. ИВАНОВ

### ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА С ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Исследовано обтекание кругового цилиндра с изотермической поверхностью ( $T_{w0} = 0,5$ ) сверхзвуковым потоком ( $M_\infty = 5$ ) совершенного газа в диапазоне чисел Рейнольдса  $Re = 30 - 5 \cdot 10^5$ . Численно показано, что возможны две ветви решения. На первой ветви по мере возрастания числа  $Re$  последовательно реализуются схемы течения: безотрывное обтекание; обтекание с формированием области локального отрывного течения; обтекание с формированием области глобального отрывного течения. На второй ветви при всех числах  $Re$  наблюдается схема течения с областью локального отрыва; при определенном значении числа  $Re$  это решение скачкообразно переходит на первую ветвь.

Численный анализ стационарных автомодельных решений уравнений Прандтля показал, что в области течения при положительном градиенте давления решение задачи является неединственным и существует множество его ветвей [1–4]. При этом среди решений есть пространственно устойчивые и неустойчивые. Первые могут реализовываться при численном анализе неавтомодельных задач ламинарного пограничного слоя.

Асимптотический анализ поведения решения в окрестности точки отрыва при больших числах Рейнольдса как для несжимаемой жидкости, так и для сжимаемого газа также установил неединственность решения для течения в отрывных областях. В рассмотренных случаях неединственность решения задачи связана с неединственностью решения уравнений Прандтля. Результаты этих исследований для несжимаемой жидкости обобщены в монографии [5].

Уравнения Прандтля являются предельной формой уравнений Навье – Стокса при  $Re \rightarrow \infty$ . Поэтому неединственность решения в областях отрывного течения также должна иметь место при численном анализе задач на основе уравнений Навье – Стокса; при этом она должна наблюдаться не только при больших, но и при умеренных и малых числах  $Re$ . В связи с этим отметим, что в [6, 7] для частного случая обтекания тел потоком несжимаемой жидкости при наличии экрана показано, что решение задачи, описываемое уравнениями ползущего течения Стокса (предельная форма уравнений Навье – Стокса при  $Re \rightarrow 0$ ), существует и является единственным. Из этого можно заключить, что неединственность решения уравнений Навье – Стокса следует ожидать при числах  $Re > 1$ , когда становится существенной роль инерционных членов уравнений.

Обширные области отрывного течения обычно наблюдаются за плохообтекаемыми телами, классическим примером которых является круговой цилиндр.

Исследование структуры поля течения около кругового цилиндра с теплоизолированной и изотермической поверхностью, обтекаемого сверхзвуковым потоком совершенного газа, на основе полных уравнений Навье – Стокса проведено в [8, 9] на сетке  $51 \times 51$ . При всех значениях температурного фактора реализовывалась одна ветвь решения, на которой по мере увеличения числа  $Re$  последовательно наблюдались три схемы течения: безотрывное обтекание, обтекания с локальным и глобальным отрывами.

Поскольку указанная сетка является достаточно грубой для выявления особенностей зарождения и развития отрывного течения, то в [10] численные исследования выполнены на более мелкой сетке  $101 \times 101$  применительно к обтеканию сверхзвуковым потоком ( $M_\infty = 5$ ) кругового цилиндра радиуса  $R$  с теплоизолированной поверхностью в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Результаты расчетов позволили установить границы реализации указанных трех схем обтекания кругового цилиндра.

Первая – безотрывное обтекание, которое имеет место при малых числах  $Re$  ( $Re = u_\infty R / \nu_\infty = 30\text{--}250$ ,  $u_\infty$ ,  $\nu_\infty$  – скорость и кинематический коэффициент вязкости набегающего потока соответственно).

Вторая – обтекание с формированием локальной зоны отрывного течения (стелющийся отрыв), когда оторвавшийся поток присоединяется в задней критической точке цилиндра. Вследствие этого на оси симметрии скорость потока монотонно возрастает по мере отхода от задней критической точки (градиент скорости в задней критической точке  $u'(1) > 0$ ). Эта схема течения реализуется в небольшом диапазоне чисел  $Re = 275\text{--}325$ .

Третья схема – обтекание при наличии глобального отрыва: в кормовой части цилиндра формируется замкнутая отрывная область с точкой присоединения на оси симметрии. В этом случае скорость на ней изменяется немонотонным образом и  $u'(1) < 0$ . Эта схема течения является основной и реализуется при умеренных и больших числах Рейнольдса ( $Re \geq 350$ ).

Следует отметить, что в [10] был установлен узкий интервал чисел  $Re$ , в котором имеет место гистерезис. Это указывает на неединственность решения задачи в этом интервале.

На изотермической поверхности кругового цилиндра развитие пограничного слоя происходит иначе, чем в случае теплоизолированной поверхности, вследствие этого будет иным поведение аэродинамических характеристик.

Цель настоящей работы – изучить структуру поля течения и поведение аэродинамических характеристик кругового цилиндра с изотермической поверхностью в зависимости от числа  $Re$  при сверхзвуковой скорости набегающего потока. Численный анализ уравнений Навье – Стокса при числе  $M_\infty = 5$  и температурном факторе  $T_{w0} = 0,5$ , проведенный на мелкой сетке  $101 \times 101$ , позволил обнаружить две ветви решения, главные различия которых связаны со структурой ближнего следа.

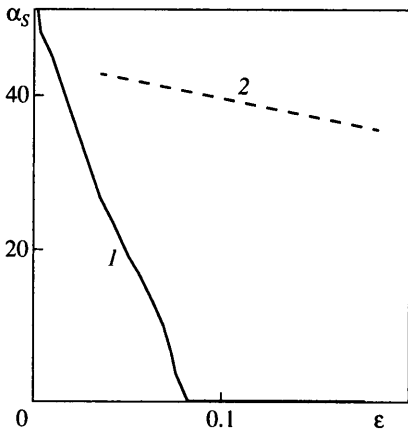
1. Исследование выполнено на основе численного анализа нестационарных двумерных уравнений Навье – Стокса согласно методике [8]. Газ предполагался совершенным с показателем адиабаты  $\gamma = 1,4$ , числом  $Pr = 0,7$  и динамической вязкостью, зависящей от температуры по степенному закону ( $\mu \sim T^{\omega}$ ,  $\omega = 0,7$ ).

Расчеты по обтеканию кругового цилиндра с изотермической поверхностью выполнены в диапазоне чисел  $Re = 30 - 5 \cdot 10^5$  при числе Маха  $M_\infty = 5$  и температурном факторе  $T_{w0} = T_w/T_0 = 0,5$ , где  $T_0$  и  $T_w$  – температуры торможения набегающего потока и поверхности цилиндра.

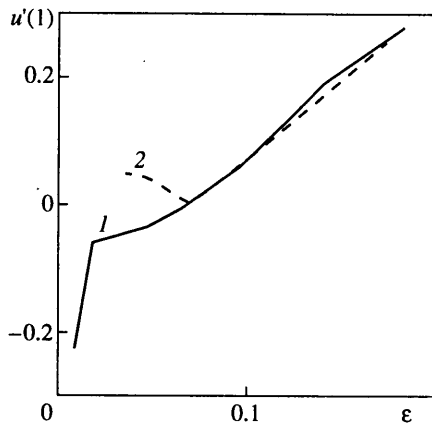
В предположении о симметрии течения относительно продольной оси расчеты проводились для верхней половины поля течения на сетке  $101 \times 101$ , которая при числах  $Re \leq 100$  была равномерной и не зависела от числа  $Re$ . При числах  $Re \geq 100$  она строилась со сгущением узлов в окрестности твердой поверхности и оси симметрии следа; для этого выделялся слой толщиной  $2/\sqrt{Re}$ , в котором размещалось 20% общего числа узлов в поперечном направлении, т.е. конфигурация сетки изменялась в зависимости от числа  $Re$ .

Численное исследование проходило в два этапа.

На первом этапе была рассчитана серия вариантов для дискретных значений числа  $Re$  из исследуемого диапазона. Расчеты начинались с наименьшего числа  $Re = 30$ . После нахождения численного решения для этого числа  $Re$  автоматически изменялось значение  $Re$ , перестраивалась сетка и строилось нулевое приближение согласно решению для предыдущего числа  $Re$ . При этом перенос значений сеточных функций



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Положение точки отрыва  $\alpha_S$  на поверхности изотермического цилиндра в зависимости от параметра  $\epsilon$  при  $M_\infty = 5$ : 1 и 2 – первая и вторая ветви

Фиг. 2. Градиент скорости  $u'(1)$  в задней критической точке изотермического цилиндра в зависимости от параметра  $\epsilon$  при  $M_\infty = 5$ : 1 и 2 – первая и вторая ветви

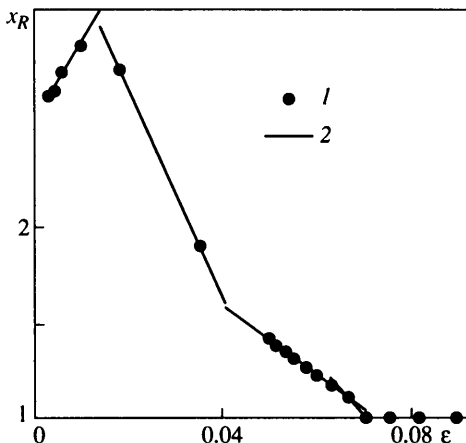
с одной сетки на другую (по сути сетки с одинаковой геометрией и разным сгущением узлов – это разные сетки) осуществлялся при помощи линейного двухмерного сплайна вида  $f(x, y) = ax + by + c$  (что вносило возмущения в начальное приближение и в принципе делало возможным при определенных условиях переход решения с одной ветви на другую). Затем находилось решение задачи для нового значения числа  $Re$ . Таким образом, последовательно в одном пакете были получены решения задачи для всех указанных дискретных значений числа  $Re$ .

Анализ полученных результатов расчетов показал, что наряду с решениями, соответствующими основной или первой ветви, присутствуют решения с иной структурой ближнего следа, которые образуют вторую ветвь решений.

На втором этапе исследования проводились дополнительные расчеты с целью определения недостающих решений первой ветви и установления области существования второй ветви. Для этого, используя найденные на первом этапе отдельные решения второй ветви в качестве отправной точки, были рассчитаны серии вариантов как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения значений  $Re$ . В результате была определена вторая ветвь решений.

2. Для выявления особенностей решений, соответствующих разным ветвям, рассмотрим поведение геометрических и кинематических характеристик отрывной зоны: точки первичного отрыва  $\theta_S$ ; градиента скорости  $u'(1)$  в задней критической точке; длины отрывной зоны  $x_R$ . Здесь  $\theta$  – центральный угол, отсчитываемый от передней критической точки,  $x$  – расстояние вдоль оси симметрии, отсчитываемое от центра цилиндра. Положения точек отрыва  $\theta_S$  и присоединения  $\theta_R$  на обтекаемой поверхности определялись по распределению локального коэффициента сопротивления трения  $c_f$ , а положение точки присоединения  $x_R$  на оси симметрии устанавливалось по распределению скорости (числа Маха) вдоль этой оси. Результаты расчетов представлены на фиг. 1–3 в виде зависимостей величин  $\alpha_S = 180^\circ - \theta_S$ ,  $u'(1)$  и  $x_R$  от параметра  $\epsilon = Re^{-1/2}$ .

Отметим, что изменения рассматриваемых характеристик по параметру  $\epsilon$  близки к кусочно-линейным зависимостям; в пределах каждого участка с линейной зависимостью наблюдается однотипная структура поля течения и происходит накопление количественных изменений. Указанные аэродинамические характеристики по-раз-



Фиг. 3. Длина отрывной зоны  $x_R$  за изотермическим цилиндром в зависимости от параметра  $\epsilon$  при  $M_\infty = 5$ : 1 – расчетные точки; 2 – аппроксимационные зависимости

ному реагируют на те или иные структурные изменения и из-за этого им соответствуют различные числа характерных интервалов.

Первая ветвь представляет собой типичные решения, когда по мере увеличения числа  $Re$  в ближнем следе последовательно реализуются безотрывное течение, локально и глобально отрывные течения. Решения этой ветви получены во всем рассмотренном диапазоне чисел  $Re$ .

Вторая ветвь соответствует режиму обтекания с формированием обширной локальной отрывной зоны (стелющийся отрыв) при всех числах  $Re$ . При этом с ростом числа  $Re$  точка отрыва монотонно смещается вверх по потоку, а градиент скорости  $u'(1)$  изменяется немонотонным образом, оставаясь всюду положительной величиной. Численная процедура нахождения решений этой ветви является устойчивой вплоть до числа  $Re = 10^3$ . При числах  $Re > 10^3$  в процессе счета происходит переход или скачок на первую ветвь решения, что связано, по-видимому, с неустойчивостью решений второй ветви из-за усложнения структуры течения в отрывной зоне. Для изучения этого вопроса необходимы дополнительные исследования.

Точка отрыва на поверхности цилиндра для обеих ветвей непрерывно смещается вверх по потоку при возрастании числа  $Re$  (фиг. 1).

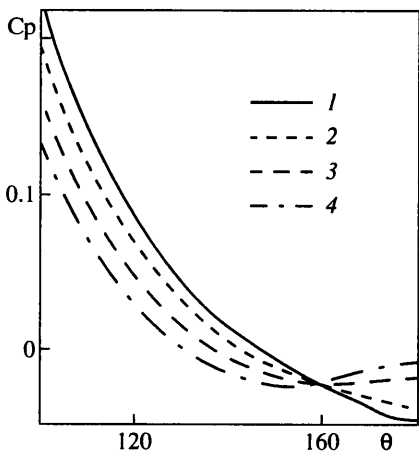
Для первой ветви отрыв потока впервые наблюдается при  $Re_{**} \approx 150$  и зависимость  $\alpha_S = f(\epsilon)$  является кусочно-линейной функцией; каждому интервалу с линейной зависимостью по  $\epsilon$  соответствует своя структура поля течения в отрывной зоне.

Для второй ветви точка отрыва  $\alpha_S$  как "грубая" характеристика не реагирует на изменения "тонкой" структуры поля течения ближнего следа и во всем интервале аппроксимируется единой линейной зависимостью

$$\alpha_S = 44,6685 - 49,917\epsilon \quad (2.1)$$

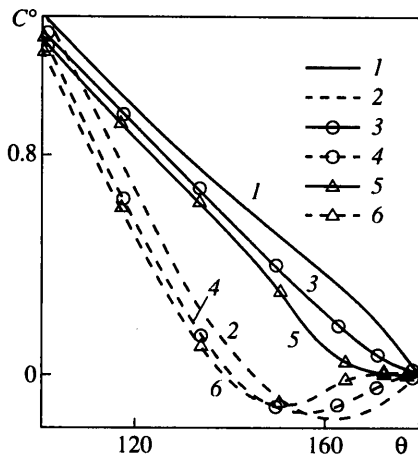
Коэффициенты аппроксимации определялись методом наименьших квадратов, а их значения приведены с учетом стольких значащих цифр, сколько их выдает программа; максимальная погрешность аппроксимации составляет 0,3%. Если предположить, что аппроксимация (2.1) имеет силу и при меньших числах  $Re$ , то из нее следует, что отрыв потока появляется при  $\epsilon = 0,8948$  ( $Re_{**} = 1,25$ ). Таким образом, на второй ветви, как и на первой, на режиме ползущего течения Стокса ( $Re \rightarrow 0$ ) обтекание цилиндра является безотрывным.

По поведению зависимости  $u'(1) = f(\epsilon)$  (фиг. 2) рассмотренный диапазон чисел  $Re$



Фиг. 4

Фиг. 4. Распределение коэффициента давления  $c_p$  в кормовой части изотермического цилиндра при  $M_\infty = 5$ : 1 –  $Re = 30$ ; 2 –  $50$ ; 3 –  $100$ ; 4 –  $200$



Фиг. 5

Фиг. 5. Распределение величины  $C^0 = c_f \sqrt{Re}$  в кормовой части изотермического цилиндра при  $M_\infty = 5$ : 1 –  $Re = 30$ , 3 –  $100$ , 5 –  $200$  (первая ветвь решения); 2 –  $Re = 30$ , 4 –  $100$ , 6 –  $200$  (вторая ветвь решения)

можно разбить на два больших интервала:  $Re \leq Re_* \approx 200$  ( $\epsilon \geq 0,0707$ ) и  $Re > Re_*$  ( $\epsilon < 0,0707$ ). Здесь  $Re_* \approx 200$  есть критическое число  $Re$ , при котором  $u'(1) = 0$ .

Для обеих ветвей в каждом указанном интервале можно выделить ряд подынтервалов, характеризующихся линейной зависимостью и соответствующих определенной структуре поля течения в ближнем следе.

В первом интервале градиенты скорости  $u'(1)$  для обеих ветвей совпадают между собой, что обуславливает совпадение распределений скорости на оси симметрии. Они реагируют на изменения в тонкой структуре ближнего следа и позволяют выделить три характерных интервала по  $\epsilon$ . Поскольку для их объяснения необходимо привлекать другие аэродинамические характеристики, то об этом речь пойдет ниже.

Во втором интервале градиенты скорости  $u'(1)$  в задней критической точке, соответствующие разным ветвям, имеют разные знаки и возрастают по модулю с увеличением числа  $Re$ ; при этом в окрестности  $Re_*$  наблюдается симметрия в поведении  $u'(1)$ :  $[u'(1)]_{II} = -[u'(1)]_I$ . Точка  $Re = Re_*$  является точкой бифуркации решения: на первой ветви реализуется схема течения с глобальным отрывом и формированием замкнутой отрывной зоны, на второй – с локальным отрывом.

По поведению  $u'(1)$  для первой ветви можно установить ряд характерных интервалов по  $\epsilon$ . Поскольку решения этой ветви характеризуются наличием глобального отрыва, то эти характерные интервалы удобно выявить по поведению длины отрывной зоны  $x_R$  (фиг. 3). Она реагирует на изменения в тонкой структуре поля ближнего следа, и в исследованном диапазоне чисел  $Re$  четко выделяются четыре интервала с линейной аппроксимацией

$$x_R = A + B\epsilon$$

Коэффициенты аппроксимации для каждого интервала имеют следующие значения: 1)  $A = 2,99303$ ,  $B = -28,1857$ ; 2)  $A = 2,33596$ ,  $B = -18,3621$ ; 3)  $A = 3,8038$ ,  $B = -53,5646$ ; 4)  $A = 2,55995$ ,  $B = 40,1331$ .

Сопоставление расчетных данных с аппроксимационными зависимостями проведено на фиг. 3. Начало первого интервала определяется критическим значением

числа  $Re_*$ . Остальные границы характерных интервалов оценивались с помощью аппроксимационных зависимостей, поскольку расчетные точки получены для дискретных значений числа  $Re$ .

В первом, наиболее коротком интервале ( $Re_* \leq Re \leq Re_*^{(1)} = 225$ ) происходит формирование глобального отрыва в ближнем следе. Во втором интервале ( $Re_*^{(1)} \leq Re \leq Re_*^{(2)} = 575$ ) размеры отрывной зоны сравнительно невелики, движущийся в ней газ имеет температуру, близкую к температуре стенки цилиндра, и, следовательно, развитие глобального отрыва происходит так же, как для несжимаемой жидкости. В третьем интервале ( $Re_*^{(2)} \leq Re \leq Re_*^{(3)} = 5674$ ) в отрывной зоне проявляется влияние сжимаемости и максимальные скорости в ней принимают до- и трансзвуковые значения.

В последнем интервале ( $Re \geq Re_*^{(3)}$ ) в замкнутой отрывной зоне наблюдается локальная область сверхзвукового течения, а также вторичный отрыв и присоединение потока. Поскольку в этом интервале с ростом числа  $Re$  длина отрывной зоны уменьшается, что это косвенно указывает на переходный характер течения в ближнем следе.

3. По найденным полям газодинамических переменных вычислялись местные аэродинамические характеристики: коэффициент давления  $c_p = (p - p_\infty)/q_\infty$ , локальные коэффициенты сопротивления трения  $c_f = \tau_w/q_\infty$  и относительный поток тепла  $q_w = q_w^*/\rho_\infty V_\infty H_\infty$  ( $H_\infty, q_\infty$  – энтальпия торможения и скоростной напор набегающего потока соответственно,  $\tau_w, q_w^*$  – напряжение трения и тепловой поток на поверхности тела).

Как отмечалось выше, весь исследованный диапазон чисел  $Re$  разбивается на два интервала. Рассмотрим поведение аэродинамических характеристик в кормовой части цилиндра в этих интервалах.

В первом интервале ( $Re \leq Re_*$ ) при фиксированном числе  $Re$  для обеих ветвей решения характерно полное совпадение полей давления; в качестве примера на фиг. 4 показано распределение коэффициента  $c_p$  в кормовой части цилиндра. Поля скоростей совпадают на наветренной стороне цилиндра и различаются в ближнем следе; об этом можно судить по поведению коэффициента  $c_f$  (фиг. 5). Следовательно, изменение структуры ближнего следа не влияет на поле течения на наветренной стороне цилиндра.

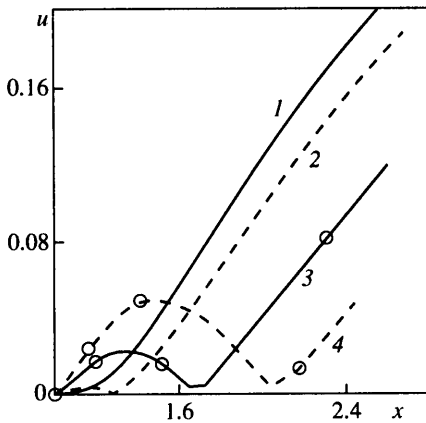
По поведению градиента скорости  $u'(1)$  выделяются три характерных интервала.

1.  $Re \leq 50$  ( $\epsilon \geq 0,141$ ) – малые числа  $Re$ , когда в донной области образуется сильное разрежение, а коэффициент давления на поверхности тела в окрестности задней критической точки монотонно уменьшается, достигая в ней наименьшего значения. Иными словами, распределение  $c_p$  является типичным для плохообтекаемого тела в рамках уравнений ползущего течения Стокса.

2.  $50 \leq Re \leq 100$  ( $0,141 \geq \epsilon \geq 0,1$ ) – в этом интервале коэффициент давления в окрестности задней критической точки изменяется немонотонным образом (максимум разрежения находится вне критической точки).

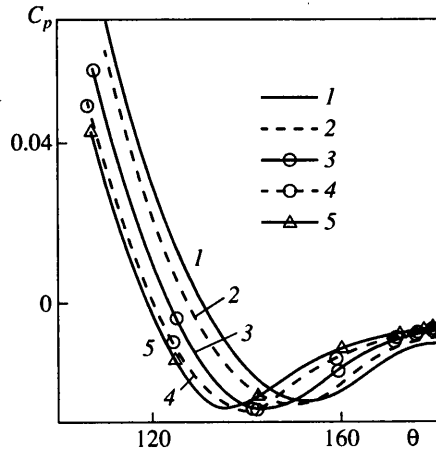
3.  $100 < Re \leq Re_* \approx 200$  ( $0,1 \geq \epsilon \geq 0,07$ ) – усиливается неравномерность в распределении коэффициента  $c_p$ , при этом значение  $c_{p \min}$  изменяется незначительно, его положение сдвигается вверх по потоку, а  $c_p(1)$  возрастает. В результате в окрестности задней критической точки формируется область с положительным градиентом давления, что приводит к локальному отрыву для первого решения и к вторичному отрыву и присоединению потока для второго решения (фиг. 5). В связи с этим отметим, что  $Re = 200$  несколько превышает критическое число  $Re_*$ ; при  $Re = Re_*$  распределение  $C^\circ$  должно иметь область с нулевым напряжением трения, длина которой различна для разных решений.

Интересно отметить, что хотя распределения коэффициента  $c_f$  различны для двух



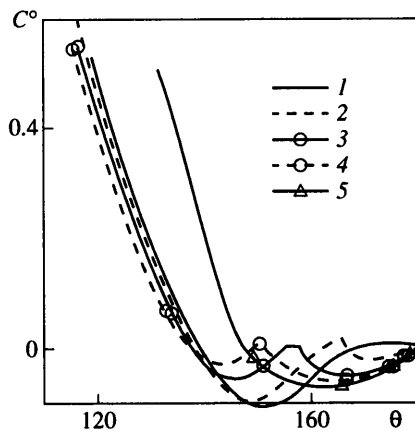
Фиг. 6

Фиг. 6. Распределение скорости в плоскости симметрии за изотермическим цилиндром при  $M_\infty = 5$  (вторая ветвь решения): 1-4 -  $Re = 200, 300, 600, 1000$



Фиг. 7

Фиг. 7. Распределение коэффициента давления  $c_p$  в кормовой части изотермического цилиндра при  $M_\infty = 5$ : 1-4 - 200, 300, 600, 1000 (вторая ветвь решения); 5 - 1500 (первая ветвь решения)



Фиг. 8. Распределение величины  $C^o = c_f \sqrt{Re}$  в кормовой части изотермического цилиндра при  $M_\infty = 5$ : 1-4 -  $Re = 200, 300, 600, 1000$  (вторая ветвь решения); 5 - 1500 (первая ветвь решения)

ветвей, тем не менее распределения относительного теплового потока  $q_w$  полностью совпадают между собой.

Во втором интервале ( $Re \geq Re_*$ ) при  $Re = \text{const}$  двум решениям соответствуют разные поля давления и скорости. Эти различия возрастают по мере увеличения числа  $Re$ ; причем они наблюдаются не только в ближнем следе, но частично и на наветренной стороне цилиндра. Поскольку решение второй ветви существует в небольшом интервале чисел  $Re$  ( $1000 \geq Re \geq 200$ ), то ниже при сопоставлении решений первой и второй ветви будет подразумеваться этот интервал.

Для первой ветви в этом интервале чисел  $Re$  происходит формирование и развитие глобального отрыва. Вследствие этого распределение скорости в плоскости сим-

метрии является немонотонным с минимумом скорости в области возвратного течения. После достижения минимума при движении вниз по потоку скорость увеличивается и выходит на значение режима дальнего следа; типичные распределения скорости приведены, например, в [9]. Для второй ветви нет глобального отрыва и распределение скорости в плоскости симметрии является знакопостоянной функцией. Тем не менее изменение скорости вниз по потоку от цилиндра также является немонотонным: после прохождения локального максимума и минимума осуществляется выход на режим дальнего следа (фиг. 6).

Распределения коэффициента давления  $c_p$  в кормовой части цилиндра, соответствующие разным ветвям решений, близки как в качественном, так и в количественном отношении. На фиг. 7 приведены распределения  $c_p$  для второй ветви. Для сравнения там же построена зависимость при  $Re = 1500$  для первой ветви; при  $Re = 200$ , как отмечалось выше, распределения  $c_p$  для двух ветвей решения полностью совпадают между собой.

Распределение коэффициента  $c_f$  в кормовой части цилиндра, соответствующие второй ветви, показаны на фиг. 8; там же для сравнения нанесена зависимость при  $Re = 1500$  для первой ветви. В рассматриваемом интервале чисел  $Re$  для решений второй ветви характерно наличие вторичного отрыва и присоединения потока в отрывной зоне, в то время как для решений первой ветви он отсутствует.

**Заключение.** Численное исследование обтекания кругового цилиндра с изотермической поверхностью сверхзвуковым потоком совершенного газа позволило установить две ветви решения уравнений Навье – Стокса, различающиеся структурой поля течения в ближнем следе. Решения первой ветви существуют во всем рассмотренном интервале чисел  $Re$  и по мере увеличения  $Re$  в ближнем следе последовательно имеют место безотрывное течение, локально отрывное течение, глобально отрывное течение. Решения второй ветви получены в ограниченном интервале чисел  $Re$  ( $Re \leq 1000$ ) и характеризуются наличием локально отрывного течения в ближнем следе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stewartson K.* Further solutions of the Falkner – Skan equations // Proc. Camb. Phil. Soc. 1954. V. 50. Pt 3. P. 454–465.
2. *Либби, Лю.* Дополнительные решения уравнения Фолкнера – Скан // Ракетн. техника и космонавтика. 1967. Т. 5. № 5. С. 276–277.
3. *Чен, Либби.* Пространственная устойчивость новых решений уравнения Фолкнера – Скан // Ракетн. техника и космонавтика. 1968. Т. 6. № 6. С. 221–232.
4. *Башкин В.А.* Расчет уравнений автомодельного пространственного ламинарного пограничного слоя методом квазилинеаризации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11. № 5. С. 1338–1344.
5. *Сычев В.В., Рубин А.И., Сычев Вик.В., Королев Г.Л.* Асимптотическая теория отрывных течений. М.: Наука, 1987. 256 с.
6. *Kohr M.* An integral method for two-dimensional Stokes flows past rigid obstacles in the half-plane // Appl. Mech. and Eng. 1998. V. 3. № 1. P. 5–24.
7. *Kohr M.* An direct boundary integral equations method to Stokes flow past rigid bodies in ground effect // Appl. Mech. and Eng. 1998. V. 3. № 2. P. 217–232.
8. *Башкин В.А., Егоров И.В., Егорова М.В.* Обтекание кругового цилиндра сверхзвуковым потоком вязкого совершенного газа // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 6. С. 107–115.
9. *Башкин В.А., Егоров И.В., Егорова М.В.* Влияние температурного фактора на аэродинамические характеристики кругового цилиндра в сверхзвуковом потоке совершенного газа // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 156–162.
10. *Башкин В.А., Егоров И.В., Егорова М.В., Иванов Д.В.* Зарождение и развитие отрывного течения за круговым цилиндром в сверхзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 6. С. 27–36.