

УДК 533.6.011.5 : 532.516.5

© 2001 г. А.Б. ГОРШКОВ

## ТЕПЛООБМЕН ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ СФЕРЫ И ЦИЛИНДРА ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Рассматривается обтекание сферы и цилиндра с постоянной температурой поверхности сверхзвуковым потоком совершенного газа на основе численного решения уравнений Навье–Стокса. Получены расчетные зависимости числа Нуссельта и коэффициента восстановления от числа Рейнольдса в диапазоне  $1 \leq Re_0 \leq 10^3$  для чисел Маха  $M_\infty = 3$  (цилиндр) и 5 (сфера). Проведено сравнение с экспериментальными данными. Исследовано влияние граничных условий прилипания и скольжения на теле на характеристики теплообмена и на течение в донной области.

Задача об определении тепловых характеристик тел простой формы (пластина, сфера, цилиндр, острый конус) в до- и сверхзвуковых потоках газа при различных режимах обтекания – от континуального до свободномолекулярного – рассматривалась многими авторами с начала 50-х годов (см., например, обзор [1] и монографию [2]). Особенно много работ посвящено интегральному теплообмену при обтекании цилиндра, что связано с широким использованием тонких проволочек в экспериментальной практике в качестве термоанемометров. В частности, получены экспериментальные зависимости числа Нуссельта  $Nu_e = hD/\kappa(T_r)$  и коэффициента восстановления  $r = (T_r - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$  от числа Рейнольдса  $Re_0 = \rho_\infty U_\infty D/\mu(T_0)$  для различных чисел  $M_\infty$  набегающего потока. Здесь  $h = Q_w/S(T_r - T_w)$  – средний коэффициент теплоотдачи,  $S$ ,  $D$  – площадь поверхности и диаметр тела,  $Q_w$  – суммарный тепловой поток на тело,  $\kappa(T_0)$  и  $\mu(T_0)$  – коэффициенты теплопроводности и вязкости газа при температуре торможения  $T_0$ ,  $T_r$  – температура восстановления, при которой  $Q_w = 0$ ,  $T_w$  – температура поверхности,  $\rho$  – плотность,  $U$  – скорость газа, индексом  $\infty$  обозначены параметры набегающего потока.

Однако большинство работ носило экспериментальный характер, а имеющиеся теоретические результаты для континуального режима основывались на упрощенных уравнениях Навье–Стокса, а именно на уравнениях пограничного слоя, Стокса или Осеена. В конце 60-х и в 70-х годах появились работы, в которых рассматривалось обтекание сферы или цилиндра на основе численного решения модельного уравнения Больцмана, а также полных уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа. Довольно подробные исследования с использованием полных уравнений Навье–Стокса были проведены в [3], монографиях [4, 5]. Однако все эти работы посвящены главным образом гиперзвуковому обтеканию ( $M_\infty \approx 20$ ) холодных тел ( $t_w \equiv T_w/T_0 \ll 1$ ). Течениям при умеренных числах Маха ( $1 < M_\infty < 10$ ) и температуре тела, близкой к температуре восстановления  $T_w \approx T_r$  (более интересным с точки зрения использования в лабораторном эксперименте), уделено значительно меньше внимания. Среди немногих таких работ можно отметить [6, 7], где рассмотрено сверхзвуковое обтекание цилиндра.

В данной работе представлены расчетные зависимости среднего теплового потока  $Nu(Re)$  и коэффициента восстановления  $r(Re)$ , полученные в результате системати-

ческого численного исследования на основе полных уравнений Навье–Стокса сверхзвукового обтекания сферы и цилиндра в области течения со скольжением и в переходной области ( $0,001 < \text{Kn}_\infty \sim M_\infty/\text{Re}_\infty < 1$ ). Проведено сравнение с аналогичными зависимостями, найденными в эксперименте. Для верификации программы выполнено сравнение с численными решениями уравнений Навье–Стокса, полученными другими авторами [3, 5].

**1. Постановка задачи.** В плоском ( $v = 0$ ) и осесимметричном ( $v = 1$ ) случае уравнения Навье–Стокса в консервативной форме для сжимаемого совершенного газа с постоянным показателем адиабаты  $\gamma$  в произвольной системе координат  $\xi = \xi(x, z)$ ,  $\zeta = z(x, z)$  имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \zeta} + \frac{v}{z} \mathbf{H} = 0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{Q} = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho w \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho u w - \tau_{xz} \\ \rho w^2 - (\tau_{zz} - \tau_{\varphi\varphi}) \\ (e + p)w - (u\tau_{xz} + w\tau_{zz}) + q_z \end{pmatrix}, \quad J^{-1} = \frac{\partial(x, z)}{\partial(\xi, \zeta)}$$

$$\mathbf{E} = J^{-1} \left( \mathbf{E}_c \frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathbf{G}_c \frac{\partial \xi}{\partial z} \right), \quad \mathbf{G} = J^{-1} \left( \mathbf{E}_c \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \mathbf{G}_c \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)$$

$$\mathbf{E}_c = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho u w - \tau_{xz} \\ (e + p)u - (u\tau_{xx} + w\tau_{xz}) + q_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_c = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w u - \tau_{xz} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ (e + p)w - (u\tau_{xz} + w\tau_{zz}) + q_z \end{pmatrix}$$

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{V}$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = 2\mu \frac{w}{z} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad q_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_z = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{w}{z}, \quad e = \rho \frac{u^2 + w^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}$$

$$p = \rho RT$$

Здесь  $J$  – якобиан координатного преобразования;  $u, w$  – компоненты вектора скорости  $\mathbf{V}$  в декартовой системе координат  $(x, z)$ ;  $\mathbf{Q}$  – вектор консервативных переменных;  $\mathbf{E}, \mathbf{G}$  и  $\mathbf{E}_c, \mathbf{G}_c$  – векторы потоков массы, импульса и энергии в криволинейной и декартовой системах координат;  $e$  – полная энергия в единице объема.

Интегрирование системы (1.1) осуществляется численно с использованием неявной итерационной схемы, предложенной в [8]. При конечно-разностной аппроксимации как вязких, так и конвективных потоков используются центральные разности. Для подавления осцилляций параметров течения в процессе итераций и обеспечения устойчивости счета в разностную схему вводилась искусственная диссипация по методу [9]. Более полно численный метод решения системы (1.1) описан в [10].

Расчетная область ограничена внешней границей, осью (плоскостью) симметрии  $z = 0$  и поверхностью тела. Внешняя граница, фиксированная в процессе расчета, имела форму эллипса. Головная ударная волна рассчитывалась насквозь. Внешняя граница выбиралась достаточно далеко (до нескольких диаметров), чтобы при больших числах  $\text{Re}$  течение в следе было сверхзвуковым, а при малых  $\text{Re}$  на входной части границы, где газ втекает, выполнялись условия набегающего потока. На выходной части внешней границы использовалась линейная экстраполяция неконсервативных

переменных: давления, температуры и декартовых компонент скорости. На оси симметрии задавались условия четности и нечетности неконсервативных переменных.

Один из тестовых расчетов, описанных ниже (обтекание лобовой поверхности сферы) проведен с выделением ударной волны, на которой ставились обобщенные условия Ренкина – Гюгонио. В качестве дополнительного условия на волне использовалась линейная экстраполяция давления из внутренней области течения. Отход ударной волны рассчитывался по методу [11].

Применяемая конечно-разностная схема требует дополнительного численного условия на стенке, в качестве которого использовалось равенство нулю второй производной давления по нормали к стенке  $(\partial^2 p / \partial n^2)_w = 0$ . При больших числах Re это условие дает такие же результаты, как и условие равенства нулю нормального градиента давления  $(\partial p / \partial n)_w = 0$ .

В расчетах газ предполагался совершенным с показателем адиабаты  $\gamma = 1,4$  и числом Прандтля  $Pr = 0,71$ , вязкость вычислялась по формуле Сазерленда для воздуха. Теплопроводность материала шара и цилиндра полагалась бесконечно большой, так что температуру поверхности можно считать постоянной. Это предположение соответствует экспериментальным условиям. Использовались условия скольжения на стенке двух видов. Условия [1]:

$$U_s = \frac{2 - \alpha_i}{\alpha_i} l \left[ \frac{\partial U}{\partial n} - \sigma U \right], \quad l = \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{1}{RT}} \quad (1.2)$$

$$T_s = T_w + \frac{2 - 0,83\alpha_e}{\alpha_e} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{l}{Pr} \frac{\partial T}{\partial n}$$

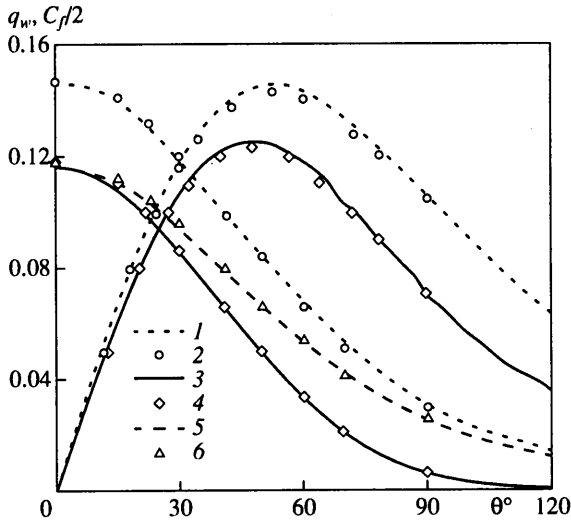
и условия [12]

$$U_s = \frac{2 - \alpha_i}{\alpha_i} 1,142 \sqrt{\frac{2}{\pi}} l \left[ \frac{\partial U}{\partial n} - \sigma U \right] \quad (1.3)$$

$$T_s = T_w + \frac{2 - 0,83\alpha_e}{\alpha_e} \frac{\gamma/2}{\gamma - 1} \frac{l}{Pr} \frac{\partial T}{\partial n}$$

Здесь  $U_s, T_s$  – скорость и температура газа у стенки,  $\sigma$  – кривизна,  $n$  – нормаль к стенке,  $\alpha_i, \alpha_e$  – коэффициенты аккомодации импульса и энергии. Несмотря на то что условие (1.3) для скачка температуры на стенке получено для одноатомного газа, оно часто используется также и для расчета течений двухатомного газа (см., например, [5, с. 17]), что, строго говоря, неверно. Однако можно заметить, что формулы для скачка температуры в (1.2) и (1.3) различаются только множителями перед производной, которые совпадают для одноатомного газа и различны в 1,5 раза для двухатомного. Поэтому можно считать, что (1.3) соответствует (1.2) для двухатомного газа, но с другим коэффициентом аккомодации. Если положить  $\alpha_i = \alpha_e = 1$  в (1.3), то это будет соответствовать  $\alpha_i = 0,93, \alpha_e = 0,77$  в (1.2).

**2. Тестовые расчеты.** Для верификации получаемых результатов при малых числах Re были проведены сравнения с численными расчетами на основе полных уравнений Навье – Стокса других авторов. На фиг. 1 приведено сравнение результатов данного расчета (кривые) на сетке  $25 \times 40$  (первое число – количество точек в продольном направлении с шагом  $5^\circ$ , второе – в поперечном) с расчетными данными [5, с. 45–49] (точки). В [5] рассматривалось обтекание лобовой поверхности сферы воздухом при  $M_\infty = 3, Re_\infty = 100, t_w = 0,48$ . Вязкость определялась по формуле Сазерленда. На фиг. 1 показаны распределения тепловых потоков  $q_w = (\kappa \partial T / \partial n)_w / \rho_\infty U_\infty^3$  и коэффициента трения  $C_f / 2 = (\mu \partial u / \partial n)_w / \rho_\infty U_\infty^2$  вдоль поверхности сферы для условий прилипания и скольжения (1.3). В последнем случае показаны также распределения тепловых потоков с учетом работы сил вязкости  $q_w = (\kappa \partial T / \partial n + U\tau)_w / \rho_\infty U_\infty^3, \tau = \mu \partial u / \partial n$ .

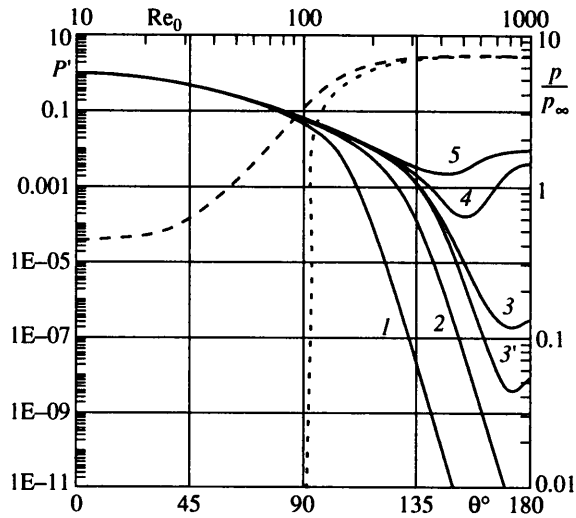


Фиг. 1. Расчетные распределения теплового потока и трения вдоль поверхности сферы:  $M_\infty = 3$ ,  $Re_\infty = 100$ ,  $t_w = 0,48$ . Кривые – данный расчет, точки – [5], 1, 2 – условия прилипания, 3, 4 – условия скольжения (1.3), 5, 6 – тепловой поток с учетом работы сил вязкости для условий (1.3)

Различие по всем сравниваемым параметрам составляет не более нескольких процентов. Следует заметить, что в этом примере расчет, так же как и в [5], проводился с выделением ударной волны. Расчет ударной волны насквозь (при том же шаге сетки у стенки) приводит к небольшому увеличению теплового потока и трения – соответственно на 5 и 2% в области максимумов.

Было проведено сравнение с результатами [3] численного расчета гиперзвукового обтекания полной сферы совершенным газом при  $\gamma = 1,4$ ,  $M_\infty = 20$ ,  $Re_\infty = 200$  ( $Re_0 = 22$ ),  $t_w = 0,05$ . Сравнивались распределения давления  $p/\rho_\infty U_\infty^2$ , числа Стантона  $St = (\kappa \partial T / \partial n)_w / \rho_\infty U_\infty C_p (T_0 - T_w)$  и коэффициента трения  $C_f$  вдоль поверхности сферы. В отличие от предыдущего примера, показанного на фиг. 1, в этом случае (так же как и в [3]) ударная волна рассчитывалась насквозь. На стенке задавались условия прилипания. Вязкость газа вычислялась по степенному закону  $\mu \sim T^{1/2}$ . Величины, полученные данным методом на двух разных сетках  $31 \times 40$  и  $61 \times 70$ , отличаются друг от друга не более, чем на 3%, но в обоих случаях находятся несколько выше данных [3] (см. фиг. 1 в [3]). Наибольшее отличие достигается в области максимумов: примерно 3% – для давления и 11% – для теплового потока и трения. Причем результаты, полученные данным методом на более грубой сетке, лучше совпадают с расчетами [3], чем на мелкой. Это связано, по-видимому, с довольно грубой сеткой  $30 \times 30$ , использовавшейся в [3].

В расчетах при малых числах  $Re$  с условием прилипания на стенке обнаружен интересный эффект – при уменьшении числа  $Re$  в донной области сферы и цилиндра образовывалась зона сильно разреженного газа. На фиг. 2 представлены расчетные распределения давления  $P' = p/\rho_\infty U_\infty^2$  вдоль сферы, полученные на сетке  $61 \times 70$  для случая [3]:  $\gamma = 1,4$ ,  $M_\infty = 20$ ,  $t_w = 0,05$  при  $Re_0 = 22, 67, 100, 111$  и  $167$ . Видно, что давление в донной области начинает резко уменьшаться примерно при  $Re_0 \leq 100$  и достигает чрезвычайно низких значений – меньше чем  $10^{-11}$  – для чисел  $Re_0 = 22$  и  $67$ . Однако эти зависимости носят качественный характер, так как значение донного



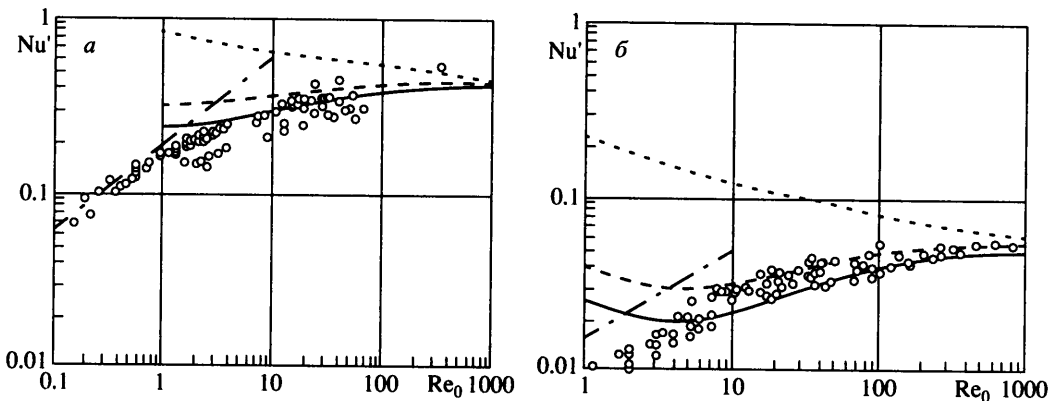
Фиг. 2. Обтекание сферы, расчет на сетке  $61 \times 70$ , условия прилипания,  $M_\infty = 20$ ,  $\gamma = 1,4$ ,  $t_w = 0,05$ ,  $\mu \sim T^{1/2}$ . Кривые 1–5 – распределение давления  $P' = p/\rho_\infty U_\infty^2$  вдоль сферы,  $Re_0 = 22, 67, 100, 111, 167$  соответственно. Кривая 3' – расчет на сетке  $91 \times 105$ ,  $Re_0 = 100$ . Пунктирная (условия прилипания) и штриховая (условия скольжения (1.2)) кривые – давление  $p/p_\infty$  в задней критической точке сферы в зависимости от числа Рейнольдса  $Re_0$

давления при столь малых числах  $Re$  оказывается зависящим от сетки и при расчете на более мелкой сетке донное давление падает еще значительно. Например, расчетное донное давление для  $Re_0 = 100$  на сетке  $91 \times 105$  (кривая 3') оказывается на два порядка меньше, чем на сетке  $61 \times 70$  (кривая 3). Описанный эффект имеет место лишь для давления (и плотности), в поведении температуры в донной области не замечено никаких особенностей. Так, изменение среднего теплового потока на сферу для двух упомянутых расчетов на сетках  $91 \times 105$  и  $61 \times 70$  составило менее 1%.

Следует отметить, что данный эффект не наблюдается при задании условий скольжения на стенке. Это проиллюстрировано на фиг. 2, где представлены расчетные зависимости давления  $p/p_\infty$  в задней критической точке от  $Re_0$  для условий прилипания и скольжения (1.2). Видно, что уменьшение донного давления в случае прилипания происходит очень резко – давление падает примерно на 4 порядка (при расчете на сетке  $61 \times 70$ ) при изменении числа  $Re_0$  от 111 до 100. Аналогичное поведение донного давления наблюдалось и для меньших чисел Маха ( $M_\infty = 3$  и 5) в расчетах тепловых характеристик цилиндра и сферы, представленных ниже. Упоминаний в литературе о подобном численном эффекте найти не удалось. В [3] распределения давления в донной области приводятся лишь для достаточно больших чисел  $Re_0 \geq 167$  ( $Re_\infty \geq 1500$ ), когда данный эффект уже отсутствует.

Приведенные результаты свидетельствуют о неприменимости условия прилипания для расчета течения в донной области сильно затупленных тел при малых числах  $Re$  ( $Re_0 \leq 100$  – для обтекания сферы при  $M_\infty = 20$ ).

**3. Результаты расчетов и сравнение с экспериментом.** Рассмотрим тепловые характеристики сферы и цилиндра. Все расчеты проводились на сетке  $61 \times 70$  с равномерным шагом  $3^\circ$  вдоль тела и с экспоненциальным сгущением к стенке в поперечном направлении. Температура восстановления, при которой полный тепловой поток на тело равен нулю, в расчетах определялась как абсцисса точки пересечения зависимости теплового потока от температуры поверхности  $Q_w(T_w)$  с осью ординат  $Q_w = 0$ .



Фиг. 3. Зависимость  $Nu'$  от числа  $Re_0$ . Точки – экспериментальные данные ([1,13] – цилиндр, [1,14] – сфера). Штриховые и сплошные кривые – расчет с условиями скольжения (1.2) и (1.3) соответственно, пунктир – расчет с условиями прилипания, штрихпунктир – свободномолекулярный предел при  $M_\infty \gg 1$ ,  $\alpha_c = 1$ . *a* – цилиндр,  $M_\infty = 3$ ,  $T_0 = 381$  К, *б* – сфера,  $M_\infty = 5$ ,  $T_0 = 293$  К

При небольших изменениях температуры тела  $\Delta T_w \ll T_0$  тепловой поток меняется линейно с температурой. Этот экспериментальный факт использовался для контроля согласованности расчетных результатов – для каждого числа  $Re$  проводилось как минимум три расчета при разных температурах поверхности. Безразмерный средний тепловой поток вычислялся по следующим формулам: для цилиндра

$$q_{w,av} = \frac{1}{\pi \rho_\infty U_\infty^3} \int_0^\pi \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial n} + U\tau \right)_w d\theta$$

для сферы

$$q_{w,av} = \frac{1}{2\rho_\infty U_\infty^3} \int_0^\pi \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial n} + U\tau \right)_w \sin\theta d\theta$$

В экспериментах число  $Nu$  приводится, как правило, при температуре тела, равной температуре восстановления  $T_w = T_r$ . Поэтому средний коэффициент теплообмена  $h = Q_w / S(T_r - T_w)$  (т.е. наклон зависимости  $Q_w(T_w)$ ) определялся по двум расчетным точкам на графике  $Q_w(T_w)$ , для которых тепловой поток меняет знак. Если использовать другие две точки (из имеющихся трех), то значение коэффициента теплообмена и соответственно числа  $Nu$  может измениться на несколько процентов.

На фиг. 3 представлены экспериментальные данные разных авторов в виде зависимости комплекса  $Nu' = Nu_e / \sqrt{Re_0}$  от числа  $Re_0$ , заимствованные из [1,13] – для цилиндра (фиг. 3, *a*) и из [1,14] – для сферы (фиг. 3, *б*). Здесь  $Nu_e = hD/\kappa(T_r)$  – число Нуссельта при температуре восстановления. Эксперименты проводились в воздухе при числах Маха  $1 < M_\infty < 10$ . Опытные данные свидетельствуют, что в области, переходной от континуального течения к свободномолекулярному, показатель степени в зависимости  $Nu(Re)$  монотонно меняется от  $1/2$  ( $Nu \sim \sqrt{Re}$ ), что соответствует приближению пограничного слоя, до  $1$  ( $Nu \sim Re$ ). На этих же фигурах нанесены расчетные кривые  $Nu'(Re_0)$ , полученные с условиями прилипания и скольжения, согласно (1.2) и (1.3), с коэффициентами accommodations импульса и энергии  $\alpha_i = \alpha_e = 1$ . Значения чисел  $M$  набегающего потока и температуры торможения в расчетах ( $M_\infty = 3$ ,  $T_0 = 381$ К для цилиндра и  $M_\infty = 5$ ,  $T_0 = 293$ К для сферы) были выбраны так, чтобы соответствовать основной массе экспериментальных данных.

Отдельные параметрические расчеты, выполненные на сетках  $31 \times 40$  и  $91 \times 105$ , показывают, что точность (сходимость по сетке) расчетных данных по интегральному тепловому потоку на тело не хуже 10%. Для сравнения на фигурах показана зависимость  $Nu(Re)$  в свободномолекулярном пределе при  $M_\infty \gg 1$ ,  $\alpha_e = 1$ . Число Стантона  $St = h/\rho_\infty U_\infty C_p$  ( $Nu_e = St Re_0 Pr$ ) и температурный коэффициент восстановления  $r$  в этом случае имеют вид [2]: для цилиндра

$$h = Q_w / [\pi D (T_r - T_w)], \quad St = \alpha_e \frac{\gamma + 1}{8\gamma}, \quad r = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}$$

для сферы

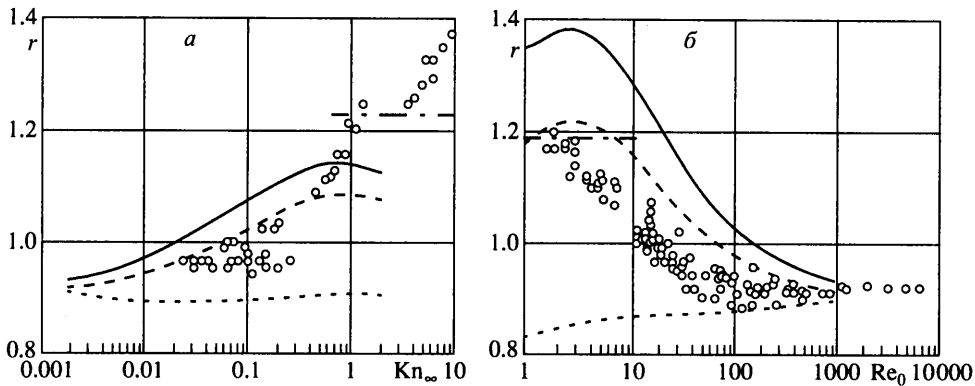
$$h = Q_w / [\pi D^2 (T_r - T_w)], \quad St = \alpha_e \frac{\gamma + 1}{2\pi\gamma}, \quad r = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}$$

Из представленных результатов видно, что условия прилипания дают сильно завышенные значения  $Nu_e$  почти во всем рассматриваемом диапазоне чисел Рейнольдса  $1 < Re_0 < 10^3$ . Условия скольжения (1.2) согласуются с экспериментальными данными до  $Re_0 = 10$ , уменьшение коэффициентов аккомодации (условия (1.3)) улучшает согласие с экспериментом примерно до  $Re_0 = 3$ . С ростом числа  $Re_0$  все три расчетные кривые сближаются и стремятся к континуальному пределу  $Nu \sim \sqrt{Re}$ , максимальное различие между ними при  $Re_0 = 10^3$  составляет 8% в случае обтекания цилиндра и 21% – в случае сферы.

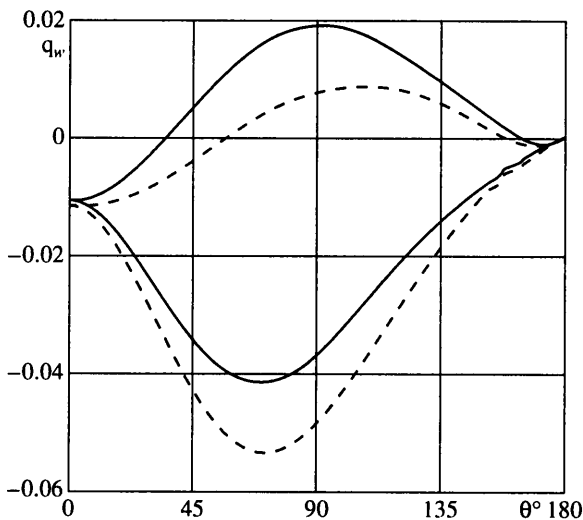
Более быстрый выход на континуальный предел для случая обтекания цилиндра объясняется тем, что при одних и тех же числах  $M$  и  $Re$  ударный слой около цилиндра является более плотным, чем около сферы. Кроме того, в расчетах число  $M$  набегающего потока для цилиндра ( $M_\infty = 3$ ) меньше, чем для сферы ( $M_\infty = 5$ ), а значит, и число Кнудсена  $Kn \sim M/Re$  для цилиндра меньше. Этим же объясняется больший отход расчетных кривых для сферы от экспериментальных точек при малых числах  $Re$  (комплекс  $Nu/\sqrt{Re}$  для сферы начинает даже расти с уменьшением  $Re$  вместо полученной в эксперименте зависимости  $Nu/\sqrt{Re} \sim \sqrt{Re}$ ). Как видно из графиков, при малых числах  $Re_0 < 3$  (которым соответствуют числа Кнудсена в набегающем потоке, вычисленные по диаметру тела,  $Kn_\infty > 0,8$ ) условия скольжения (1.2) и (1.3) не дают выхода на свободномолекулярный предел  $Nu \sim Re$ . Это не удивительно, так как условия скольжения получены из решения задачи для модифицированного уравнения Больцмана в одномерном кнудсеновском слое около бесконечной плоской стенки. Очевидно, последнее условие нарушается при обтекании конечных тел, когда  $Kn \sim 1$ .

На фиг. 4 представлен температурный коэффициент восстановления  $r$  соответственно в зависимости от числа  $Kn_\infty$  для цилиндра и от числа  $Re_0$  для сферы. Точками показаны экспериментальные данные [15] для цилиндра и данные разных авторов для сферы, приведенные в [14]. Здесь же нанесены расчетные кривые, полученные на сетке  $61 \times 70$  с условиями прилипания и скольжения согласно (1.2) и (1.3) с коэффициентами аккомодации импульса и энергии  $\alpha_i = \alpha_e = 1$ . Уже отмечалось, что ударный слой при обтекании цилиндра относительно более плотный, чем вблизи сферы. Поэтому, как это видно из графиков, влияние коэффициентов аккомодации на изменение температуры восстановления для цилиндра меньше, чем для сферы. Следует отметить, что для цилиндра расчетный коэффициент восстановления  $r$  всегда меньше свободномолекулярного  $r_{fm}$ , тогда как для сферы расчетный максимум  $r$  при обоих условиях скольжения превышает  $r_{fm}$ . Так же как и в случае зависимости  $Nu(Re)$  для сферы, при малых числах  $Re_0 < 3$  наблюдается немонотонное изменение коэффициента восстановления.

Из фиг. 4 видно, что расчет дает несколько завышенные по сравнению с экспериментом значения температуры восстановления  $T_r$ , причем уменьшение коэффициентов аккомодации (т.е. переход от условий (1.2) к условиям (1.3)) увеличивает  $T_r$  и



Фиг. 4. Зависимость коэффициента восстановления  $r$  для цилиндра (а) от числа  $Kn_\infty$  и для сферы (б) от числа  $Re_0$ . Точки – экспериментальные данные ([15] – цилиндр, [14] – сфера), другие обозначения – см. фиг. 3. а – цилиндр,  $M_\infty = 3$ ,  $T_0 = 381$  К, б – сфера,  $M_\infty = 5$ ,  $T_0 = 293$  К



Фиг. 5. Расчетные распределения теплового потока по цилиндру при  $\gamma = 1,4$ ,  $M_\infty = 3$ ,  $Re_0 = 3$ ,  $T_0 = 381$  К,  $T_w = 400$  К. Пунктирные и сплошные кривые – условия скольжения (1.2) и (1.3) соответственно, верхние и нижние кривые – тепловой поток с учетом и без учета работы сил вязкости

в отличие от теплового потока ухудшает согласование с экспериментом. Почему это происходит, можно понять, если рассмотреть, как уменьшение коэффициентов аккомодации влияет на распределение теплового потока вдоль поверхности тела. В качестве примера на фиг. 5 показаны расчетные распределения безразмерного теплового потока  $q_w = (\kappa \partial T / \partial n)_w / \rho_\infty U_\infty^3$  (две нижние кривые) вдоль поверхности цилиндра при  $Re_0 = 3$ ,  $T_w = 400$  К для условий скольжения (1.2) и (1.3). Здесь же даны распределения полного теплового потока с учетом работы сил вязкости  $q_w = (\kappa \partial T / \partial n + U \tau)_w / \rho_\infty U_\infty^3$  (две верхние кривые). Температура  $T_w = 400$  К близка к температуре восстановления для условий (1.2), полученной в расчетах;  $T_r = 401,7$  К. Это можно видеть непосредственно из фиг. 5 – "положительные" и "отрицательные" площади,



описываемые верхней пунктирной кривой, приблизительно равны между собой. Условия (1.3) соответствуют гораздо большему уменьшению коэффициента аккомодации для энергии  $\alpha_e = 0,77$ , чем для импульса  $\alpha_i = 0,93$ . Поэтому тепловой поток к телу за счет теплопроводности (нижние кривые) по абсолютной величине заметно уменьшается, а вклад работы сил вязкого трения  $U\tau$  (разность между верхними и нижними кривыми) остается практически неизменным. Таким образом, полный тепловой поток и соответственно температура восстановления увеличиваются.

**Заключение.** Проведены численные исследования сверхзвукового обтекания сферы и цилиндра с использованием уравнений Навье – Стокса в диапазоне чисел Рейнольдса  $1 \leq Re_0 \leq 10^3$ . Показано, что расчет с условиями скольжения хорошо согласуется с экспериментальными данными по числу Нуссельта при  $Re_0 \geq 3$ , но дает несколько завышенные значения коэффициента восстановления. Условия прилипания непригодны для расчета тепловых характеристик во всем рассмотренном диапазоне чисел Рейнольдса.

Автор благодарит В.В. Лунева за постановку задачи и полезные обсуждения результатов работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schaaf S.A., Chambre P.L. Flow of rarefied gases // Fundamentals of Gas Dynamics / Ed. H.W. Emmons. N.Y.: Princeton Univ. Press, 1958. = Шаф С.А., Шамбре П.А. Течение разреженных газов // Основы газовой динамики / Под ред. Г. Эммонса. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 637–688.
2. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.
3. Бабаков А.В., Белоцерковский О.М., Северинов Л.И. Численное исследование течения вязкого теплопроводного газа у тупого тела конечных размеров // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 3. С. 112–123.
4. Кокошинская Н.С., Павлов Б.М., Пасконов В.М. Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом. М.: Изд-во МГУ, 1980. 247 с.
5. Головачев Ю.П. Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. М.: Наука, 1996. 374 с.
6. Егоров И.В., Зайцев О.Л. Об одном подходе к численному решению двумерных уравнений Навье – Стокса методом сквозного счета // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31. № 2. С. 286–299.
7. Башкин В.А., Егоров И.В., Егорова М.В. Обтекание кругового цилиндра сверхзвуковым потоком вязкого совершенного газа // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 6. С. 107–115.
8. Yoon S., Jameson A. An LU-SSOR scheme for the Euler and Navier – Stokes equations // AIAA Paper. 1987. № 87–0600. 11 p.
9. Pulliam T.H., Steger J.L. Recent improvements in efficiency, accuracy and convergence for implicit approximate factorization algorithms // AIAA Paper. 1985. № 85–0360. 37 p.
10. Горшков А.Б. Расчет ламинарного донного теплообмена за телами в виде тонких конусов // Космонавтика и ракетостроение. 1997. № 11. С. 13–20.
11. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 304 с.
12. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
13. Dewey C.F., Jr. Hot wire measurements in low Reynolds number hypersonic flows // ARS Journal. 1961. V. 31. № 12. P. 1709–1718.
14. Никольский Ю.В., Первушин Г.Е., Черникова Л.Г. Экспериментальное исследование теплопередачи на сферах и тонких конусах в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Учен. зап. ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 1. С. 71–77.
15. Stalder J.R., Goodwin G., Creager M.O. Heat transfer to bodies in a high speed rarefied gas stream // NASA. Rep. 1952. № 1093.