

УДК 532.516:536.25

© 2001 г. Л.Е. СОРОКИН

ПОДКРИТИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ С АНОМАЛЬНОЙ ТЕРМОДИФФУЗИЕЙ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ

Методом сеток исследуется устойчивость течения бинарной смеси с аномальной термодиффузией относительно возмущений конечной амплитуды. В области монотонной неустойчивости обнаружены подкритические движения. Получены амплитудные кривые, границы устойчивости основного течения относительно наиболее опасных возмущений, изолинии функции тока, температуры и концентрации.

Ранее подкритические движения бинарной смеси с термодиффузией в вертикальном плоском слое, подогреваемом сбоку, исследовались методом сеток в [1]. Подкритические движения были обнаружены в области термоконцентрационной неустойчивости. Значительно больше работ посвящено подкритической неустойчивости движений бинарной смеси в горизонтальном слое. Ссылки на некоторые из них приведены ниже. В [2] даны обзор первых работ по этой теме и энергетический анализ задачи. В [3] рассматривается устойчивость равновесия бинарной смеси в горизонтальном слое со свободными и недеформируемыми границами. Строится и анализируется нелинейная динамическая модель движения смеси. В [4] методом сеток изучены вторичные нелинейные режимы свободной термовибрационной конвекции, возникающей в результате неустойчивости квазиравновесия в плоском горизонтальном слое двухкомпонентной смеси с термодиффузией. Установлен жесткий характер возбуждения колебательной неустойчивости в диапазоне параметров, соответствующих аномальной термодиффузии.

1. Рассматривается нелинейная задача о движении бинарной смеси с термодиффузией в бесконечном вертикальном слое с твердыми границами $x = 0$ и h (ось x направлена поперек, а ось z – вверх вдоль слоя). Температура на левой границе принимается равной нулю, на правой – постоянна и равна Θ . Границы слоя предполагаются непроницаемыми для вещества. Учитывается явление термодиффузии, приводящее к дополнительному потоку вещества, пропорциональному градиенту температуры. Неоднородность плотности, обусловленная градиентами температуры и концентрации, вызывает в слое конвективное течение. Все параметры смеси, кроме плотности, предполагаются не зависящими от температуры и концентрации.

Выберем в качестве единиц расстояния h , времени h^2/ν , скорости ν/h , температуры Θ , концентрации $\beta_1\Theta/\beta_2$ и функции тока ν , где β_1 и β_2 – температурный и концентрационный коэффициенты плотности; остальные обозначения обычные.

Конвективное течение бинарной смеси в приближении Буссинеска описывается уравнениями

$$\frac{\partial f^{(m)}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial f^{(m)}}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial f^{(m)}}{\partial x} \right) + \frac{1}{P_m} \Delta f^{(m)} + W^{(m)} \quad (1.1)$$

$$\Delta \psi = -\phi, \quad m = 1, 2, 3$$

с граничными условиями

$$x = 0: \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad f^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(f^{(3)} - \epsilon f^{(2)}) = 0$$

$$x = 1: \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad f^{(2)} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x}(f^{(3)} - \epsilon f^{(2)}) = 0$$

$$f^{(1)} = \varphi, \quad P_1 = 1, \quad W^{(1)} = G \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial x} \right)$$

$$f^{(2)} = T, \quad P_2 = \text{Pr}, \quad W^{(2)} = 0$$

$$f^{(3)} = C, \quad P_3 = \text{Sc}, \quad W^{(3)} = -\frac{\epsilon}{\text{Sc}} \Delta T$$

$$G = \frac{g\beta_1 \Theta h^3}{\nu^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad \text{Sc} = \frac{\nu}{D}, \quad \epsilon = -\frac{\alpha\beta_2}{\beta_1}$$

Уравнения (1.1) содержат четыре безразмерных параметра: числа Грасгофа G , Прандтля Pr , Шмидта Sc и безразмерный параметр термодиффузии ϵ . Граничные условия для вихря скорости φ вычислялись по формулам Вудса [1]. Остальные обозначения: ψ – функция тока, T – температура, C – концентрация легкой компоненты.

В качестве начальных условий для $f^{(m)}$ брались решения, полученные ранее и близкие по значениям параметров задачи к искомому.

Задача имеет решение, описывающее плоскопараллельное стационарное течение в бесконечном плоском слое

$$\psi_0 = G \frac{1+\epsilon}{24} x^2(1-x)^2 \tag{1.2}$$

$$T_0 = x, \quad C_0 = \epsilon x + \text{const}$$

Стационарное движение (1.2) при достаточно больших числах G становится неустойчивым. В области аномальной термодиффузии ($\epsilon < 0$), согласно линейной теории, имеют место три вида неустойчивости: монотонная ($\epsilon_w < \epsilon < 0$), волновая ($-0,5 < \epsilon < \epsilon_w$) и длинноволновая термоконцентрационная ($-1 < \epsilon < -0,5$) [5]. В скобках указаны интервалы значений коэффициента термодиффузии, для которых наиболее опасна соответствующая мода. Граничное значение ϵ_w , разделяющее области монотонной и волновой неустойчивости, зависит от чисел Pr и Sc и изменяется от $-0,5$ до $-0,25$.

Вторичные движения, возникающие в области монотонной неустойчивости, являются объектом изучения данной работы. На основе численного решения нелинейных уравнений методом сеток установлено, что в рассматриваемой области параметров существуют подкритические движения, т.е. монотонная неустойчивость возбуждается "жестко".

Рассматривались решения, обладающие периодичностью вдоль бесконечного вертикального слоя. Условия периодичности имеют вид

$$f^{(m)}(x, z + l, t) = f^{(m)}(x, z, t), \quad m = 1, 2, 3$$

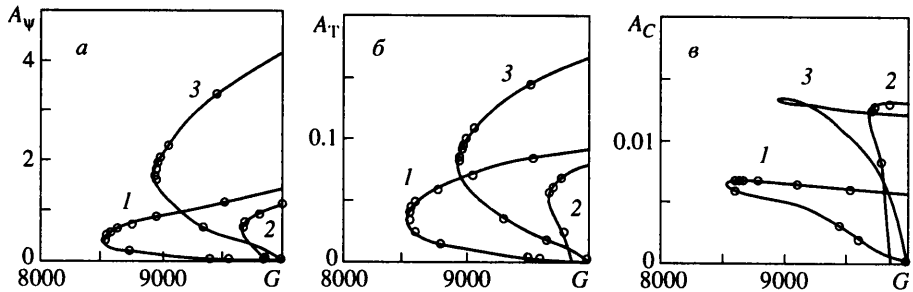
где $l = 2\pi/k$ – период вдоль оси z (k – волновое число). Таким образом, задача решалась в области $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq l$.

Решения задачи имеют следующие свойства симметрии:

$$\psi(x, z, t) = \psi(1-x, l-z, t), \quad T(x, z, t) = 1 - T(1-x, l-z, t)$$

$$\varphi(x, z, t) = \varphi(1-x, l-z, t), \quad C(x, z, t) = |\epsilon| - C(1-x, l-z, t)$$

(1.3)



Фиг. 1. Амплитудные кривые для функции тока (а), температуры (б) и концентрации (в) при $\epsilon = -0,2$: 1 – $Sc = 676,7$, $Pr = 6,7$, $k = 2,88$; 2 – $Sc = 30$, $Pr = 6,7$, $k = 2,79$, 3 – $Sc = 30$, $Pr = 1$, $k = 2,9$

Использование этих свойств симметрии позволило искать решение в половине области и примерно в 2 раза сократить время счета.

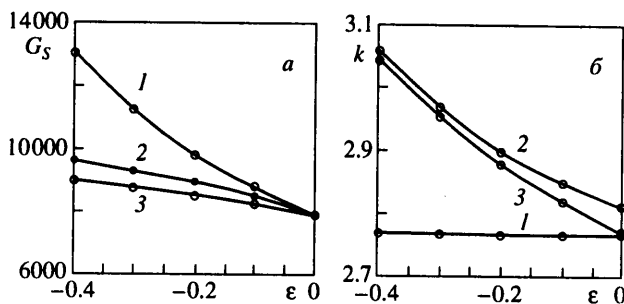
При установлении решения велась регистрация максимальных значений функции тока и амплитуды вторичного движения A_ψ , A_T , A_C на оси слоя ($A_f = \max f - \min f$). Сначала искалось решение в надкритической области. Последующие решения обычно получались при переходе от больших чисел G к меньшим (от больших амплитуд вторичного движения к меньшим амплитудам).

2. Рассмотрим результаты расчетов. Подкритические движения зависят как от параметров смеси ϵ , Pr , Sc и числа G , так и от характеристик возмущений: амплитуды и волнового числа k .

На фиг. 1 показана зависимость амплитуд вторичного движения A_ψ , A_T и A_C от числа G при коэффициенте термодиффузии $\epsilon = -0,2$. Как видно, вторичные движения смеси существуют и при числах $G < G_l$, где G_l – критические числа Грасгофа, предсказываемые линейной теорией (согласно линейной теории $G_l = 9831$ при $\epsilon = -0,2$ и не зависит от чисел Pr и Sc). Это так называемые подкритические движения. Также видно, что существует критическое число Грасгофа G_S (зависящее от ϵ , Pr , Sc и k), соответствующее "носику" амплитудных кривых, точке стыковки верхней и нижней ветвей этих кривых.

При $G < G_S$ течение устойчиво относительно возмущений любой амплитуды. В области $G_S < G < G_l$ возмущения затухают, если их амплитуда меньше значений, определяемых нижней ветвью амплитудной кривой. Если амплитуда возмущений больше значений, определяемых нижней ветвью амплитудной кривой, то эти конечные возмущения нарастают до амплитуды, определяемой верхней ветвью амплитудной кривой. Таким образом, нижняя ветвь амплитудной кривой является неустойчивой, а верхняя устойчива. При $G > G_l$ возмущения любой амплитуды, в том числе и бесконечно малые, развиваются в стационарный вихрь конечной амплитуды. Для кривой 1 значение $G_S = 8524$, для кривой 2 – 9674, для кривой 3 – 8928.

Для определения нижней ветви амплитудной кривой задавались начальные состояния с определенной амплитудой. Для этого подбиралось такое число G , чтобы амплитуды A_ψ , A_T , A_C уменьшались до нужного уровня. Начальные состояния не являются решениями уравнений, нужно некоторое время установления для получения приближенного решения. Подбирались такие величины G и ΔG , чтобы амплитуды A_ψ , A_T , A_C нарастали для G и при $(G - \Delta G)$ затухали. На нижней ветви характеристики течения изменяются гораздо медленнее, чем вдали от нее, – имеет место положение неустойчивого равновесия течения. Можно подобрать такое G , что на каком-то временном отрезке (например, при $t = 5,6-6,4$) значения амплитуд стабилизируются (6 – 7 значащих цифр не изменяются). Эти значения амплитуд A_ψ , A_T , A_C принимались за



Фиг. 2. Характеристики устойчивости течения смеси. *a* – границы устойчивости, *б* – волновые числа: 1 – линейная теория; 2 ($Sc = 30, Pr = 1$) и 3 ($Sc = 676,7$ и $Pr = 6,7$) – границы подкритических движений

границные. Несовпадение значений G_l и точек пересечения нижних ветвей кривых с осью G происходит, видимо, в основном из-за грубости нахождения точек нижней ветви.

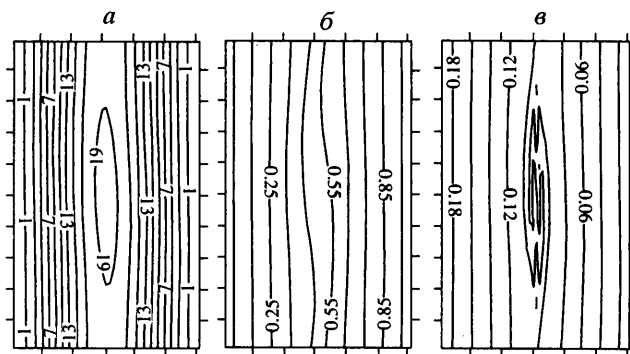
На фиг. 2, *a* приведены границы устойчивости течения (1.2) смеси относительно наиболее опасных возмущений как бесконечно малой амплитуды (кривая 1, линейная теория), так и конечной амплитуды (кривые 2 и 3, нелинейная теория). Ниже этих кривых течение устойчиво, выше – неустойчиво. Подбирались такие волновые числа возмущений, чтобы величины G_s были минимальными для соответствующих значений ϵ . Эти возмущения и считались наиболее опасными.

Согласно линейной теории, граница монотонной неустойчивости практически не зависит от чисел Pr и Sc [5]. Это не так для возмущений конечной амплитуды. Величина "подкритичности" ($G_l - G_s$) при уменьшении параметров Sc и Pr ведет себя по-разному: уменьшается с уменьшением числа Sc и растет при уменьшении числа Pr . Амплитуда подкритических движений пропорциональна отношению $Sc/Pr = \chi/D$, т.е. прямо пропорциональна коэффициенту температуропроводности и обратно пропорциональна коэффициенту диффузии. Это видно из фиг. 1 и 2. Для смесей с $Sc = 2$ (газ) подкритические движения обнаружены при $Pr < 0,35$.

На фиг. 2, *б* приведена зависимость волнового числа k наиболее опасных возмущений от параметра термодиффузии ϵ для соответствующих границ устойчивости 1, 2 и 3.

Форма подкритических движений бинарной смеси, представляющих собой стационарные вихри на границе встречных потоков, не отличается от формы надкритических движений и показана на фиг. 3, где изображены линии тока (*a*), изотермы (*б*) и линии одинаковой концентрации (*в*) для параметров $\epsilon = -0,2, Pr = 6,7, Sc = 676,7, G = 9000, k = 2,88$. Изображение сжато вдоль оси канала в 1,35 раза. На фиг. 3, *в* (изолинии концентрации C) хорошо видно ядро вихря, где чередуются тонкие слои бинарной смеси с разной концентрацией компонент. Вихрь воздействует на тепло- и массоперенос неодинаково. Большую роль играет разница в характерном времени теплопроводности и диффузии, а также скорость вращения вихря. Жидкость прогревается быстрее, чем происходит выравнивание концентрации компонент смеси. Из-за этого в вихре изолинии температуры менее искривлены, чем изолинии концентрации.

Вращение смеси изменяет направление локальных градиентов концентрации. На фиг. 3, *в* в ядре вихря чередуются два слоя с градиентом концентрации компонент, направленным от одного слоя к другому. Слой с большей концентрацией легкой компоненты пусть называется легким, а другой слой – тяжелым. Рассмотрим участок ядра вихря, где оба слоя опускаются вниз и затем изменяют направление на про-



Фиг. 3. Изолинии функции тока (а), температуры (б) и концентрации (в) при $\epsilon = -0,2$, $G = 9000$, $Sc = 676,7$, $Pr = 6,7$, $k = 2,88$

тивоположное, т.е. происходит складывание слоев. При этом формируются два прилегающих друг к другу внутренних слоя одинаковой концентрации, которые по существу образуют один слой. Предположим, что это легкий слой. Тогда слой, оказавшийся снаружи после складывания, – тяжелый. Градиент концентрации легкой компоненты направлен внутрь – от наружного тяжелого слоя к внутреннему легкому. Слева от линии складки он направлен вправо, а справа от этой линии – влево, т.е. навстречу друг другу.

Затем оба слоя поднимаются вверх и снова изменяют направление на противоположное. После этого два тяжелых слоя оказываются рядом и образуют фактически один внутренний слой. И в этом случае градиенты концентрации компонент смеси направлены в противоположные стороны. На этом период чередования слоев заканчивается.

Локальные градиенты концентрации в ядре вихря направлены в противоположные стороны. Поэтому эффективный глобальный градиент концентрации, имеющий положительный знак, уменьшается, в то время как градиент температуры изменяется гораздо слабее.

Градиент температуры и соответствующий ему при аномальной термодиффузии градиент концентрации компонент смеси оказывают противоположное влияние на плотность смеси. Тяжелая компонента в этом случае имеет положительный градиент, а легкая – отрицательный. Поэтому уменьшение эффективного глобального градиента концентрации с положительным знаком (увеличение градиента концентрации с отрицательным знаком) увеличивает силы плавучести и скорость смеси до значений, при которых уже возможно существование вихревого движения. При этом число Грасгофа не изменяется и $G < G_c$. Возможно, это объясняет механизм подкритических движений в смеси.

Такой механизм возможен только в вихрях с конечной энергией, когда ядро вихря имеет конечные размеры. При этом глобальные градиенты температуры и концентрации должны оказывать противоположное влияние на плотность смеси. С уменьшением числа G уменьшается энергия вихря, уменьшается размер ядра и при $G < G_s$, когда ядро вихря исчезает, исчезает и сам вихрь, подкритические движения затухают.

3. Остановимся на некоторых методических вопросах численного решения. Использовалась неявная схема с поперечной прогонкой (вдоль оси x). Расчеты велись на сетках 32×58 , 40×70 и 60×98 (число отрезков вдоль осей x и z соответственно). Основные результаты, представленные на фиг. 1–3, получены на сетке 60×98 в половине области с использованием свойств симметрии (1.3). Тонкая структура ядра вихря определяет допустимый максимальный шаг сетки. Амплитудная кривая $A_C(G)$ для $Sc = 676,7$ на сетке 40×70 (и на более грубых сетках) резко возрастает, а затем

также быстро уменьшается около носика ($G \approx G_S$) этой кривой. Все кривые на фиг. 1, вычисленные на сетке 60×98 , таких выбросов не имеют.

При переходе с сетки 40×70 на сетку 60×98 число G_S уменьшается в пределах от 0,7% при $\varepsilon = -0,1$ до 1% при $\varepsilon = -0,4$. Проводились некоторые расчеты и в полной области без использования свойств симметрии. Результаты обоих способов совпали с точностью 0,1%.

Шаг по времени на сетке 60×98 выбирался в пределах от $5 \cdot 10^{-5}$ до 10^{-4} . При большем шаге на основное течение накладываются колебания малой амплитуды (менее 0,1% амплитуды подкритического движения), которые имеются и под нижней ветвью амплитудной кривой. Это численная неустойчивость, зависящая от шага пространственной сетки и шага по времени.

Также имеет место хорошо известный факт: с уменьшением шага по пространству нужно уменьшать и шаг по времени. Время установления увеличивается с ростом чисел Pg и Sc и составляет от нескольких десятков до нескольких тысяч безразмерных единиц.

Заключение. Для течения бинарной смеси с аномальной термодиффузией в области монотонной неустойчивости существуют подкритические движения, которые возбуждаются "жестко"; граница подкритических движений G_S зависит от коэффициента термодиффузии ε , чисел Pg и Sc , волнового числа k . Форма подкритических движений не отличается от формы надкритических движений – это цепочка стационарных вихрей на границе встречных потоков. Наличие градиентов температуры и концентрации компонент, оказывающих противоположное влияние на плотность смеси, разница в характерном времени тепло- и массодиффузии, а также вихревое движение конечной амплитуды, по-видимому, являются необходимыми условиями существования подкритических движений в смеси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сорокин Л.Е.* Подкритическое конвективное движение бинарной смеси с термодиффузией // Неизотермические течения вязкой жидкости. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 19–23.
2. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
3. *Knobloch E., Proctor M.R.E.* Nonlinear periodic convection in double-diffusive systems // J. Fluid Mech. 1981. V. 108. P. 291–316.
4. *Гершуни Г.З., Колесников А.К., Легро Ж.-К., Мызникова Б.И.* Вибрационная конвекция в горизонтальном слое бинарной смеси с эффектом $SoRe$ // Вибрационные эффекты в гидродинамике. Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 1998. С. 97–108.
5. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Сорокин Л.Е.* Об устойчивости конвективного течения бинарной смеси с термодиффузией // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 66–71.

Пермь

Поступила в редакцию
10.XI.1999