

УДК 532.527

© 2001 г. Т.Е. БОЯРИНЦЕВА, А.С. САВИН

ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ

Дано описание типов движений в системе точечных вихрей, изначально расположенных в вершинах правильного $2n$ -угольника, вызванных пространственно-периодическим возмущением, при котором вихри оказываются в углах двух правильных n -угольников с общим центром.

Системы точечных вихрей достаточно широко используются при моделировании гидродинамических процессов, а также в теории сверхтекучести. Вследствие этого представляют интерес различные случаи их совместного движения. Точечные вихри могут образовывать конфигурации, движущиеся, как единое целое, и сохранять, таким образом, с течением времени свое взаимное расположение [1]. Примером таких конфигураций являются вихревые дорожки. Однако эти системы неустойчивы по отношению к конечным смещениям вихрей друг относительно друга и под действием таких возмущений переходят к иным режимам движения. В общем случае их описание весьма сложно; даже в системе четырех вихрей может возникать стохастическое движение [2]. С другой стороны, при наложении на вихревую систему возмущений специального вида ее дальнейшее движение становится упорядоченным и сравнительно легко поддается описанию. Например, под воздействием пространственно-периодического возмущения симметричная вихревая дорожка может переходить к двум качественно различным типам дальнейшего движения: спариванию ближайших вихрей, либо разделению дорожки на две, одна из которых движется внутри другой [3].

Похожие свойства, но с большим набором режимов движения, обнаруживает система точечных вихрей одинаковой интенсивности Γ , расположенных в вершинах правильного $2n$ -угольника, при наложении на нее пространственно-периодического возмущения. Это возмущение состоит в том, что каждый четный вихрь смещается на величину $(\delta r, \delta \varphi)$ в полярной системе координат с началом в центре невозмущенной вихревой системы и полярной осью, проходящей через один из нечетных вихрей. Та же вихревая система рассматривалась в [4], однако это исследование в качественном отношении не завершено, поскольку не установлены все возможные типы движений и их связь с числом вихрей в системе. Восполнению этого пробела посвящена настоящая работа.

В силу пространственной периодичности наложенного на рассматриваемую систему возмущения она в любой момент времени будет представлять собой совокупность двух подсистем точечных вихрей, расположенных в вершинах правильных n -угольников, вписанных в окружности радиусов r и R и повернутых на угол θ друг относительно друга.

Произвольная система точечных вихрей интенсивностей Γ_i , находящихся в точках Z_i , имеет интегралы движения [5]

$$\sum_i \Gamma_i Z_i \bar{Z}_i = \text{const}, \quad \sum_i \sum_{j \neq i} \Gamma_i \Gamma_j \ln |Z_i - Z_j| = \text{const} \quad (1)$$

Учитывая, что интенсивности всех вихрей одинаковы ($\Gamma_i = \Gamma$), а величины $Z_i \bar{Z}_i$ равны либо R^2 , либо r^2 , интегралам движения (1) можно придать вид

$$R^2 + r^2 = B = \text{const} \quad (2)$$

$$(rR)^{n-1} (r^{2n} + R^{2n} - 2r^n R^n \cos(n\theta)) = C = \text{const} \quad (3)$$

Характер поведения системы вихрей определяется уравнениями (2) и (3), а также начальными значениями R , r и θ .

Без ограничения общности положим $B = 1$. Из соотношения (2) выразим R через r и рассмотрим константу C , входящую в интеграл движения (3), как функцию от r и θ

$$C(r, \theta) = \left(r\sqrt{1-r^2} \right)^{n-1} \left(r^{2n} + (1-r^2)^n - 2r^n \left(\sqrt{1-r^2} \right)^n \cos(n\theta) \right) \quad (4)$$

Систему координат привяжем к одному из вихрей (первому), так, чтобы все нечетные вихри имели радиальную координату $R = \sqrt{1-r^2}$.

Опишем все возможные типы движения четных вихрей относительно нечетных и построим траекторные портреты для четных вихрей в этой системе координат. Траекторный портрет показывает все возможные траектории движения вихрей одной подсистемы относительно другой. Хотя на траекторных портретах вихри нечетной подсистемы выглядят неподвижными, на самом деле вся вихревая система вращается вокруг своего центра и окружность нечетной подсистемы тоже меняет свой радиус, подчиняясь закону (2).

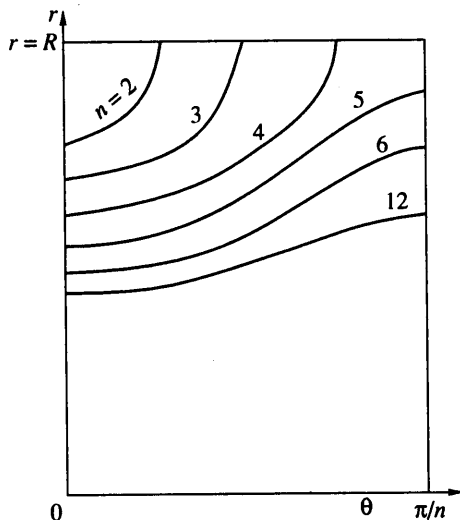
Для решения поставленной задачи найдем сепаратрисы – линии, разделяющие области начальных значений r и θ с различными типами дальнейшего движения вихревой системы. $C(r, \theta)$ периодична по θ . Рассмотрим $C(r, \theta)$ при $\theta \in [0, \pi/n]$.

При любом фиксированном значении θ у функции $C(r, \theta)$ существует максимум при $r \in [0, \sqrt{2}/2]$; значение $\sqrt{2}/2$ соответствует случаю $r = R$. Наибольший из таких максимумов – абсолютный максимум C – соответствует углу $\theta = \pi/n$, так как при этом в формуле (4) $\cos(n\theta) = -1$. Через эту точку, очевидно, не проходит никакая линия $C = \text{const}$, и при приближении к ней траектории ограничивают области, последовательно вложенные друг в друга, т.е. это точка равновесия типа "центр". Наименьший из таких максимумов соответствует углу $\theta = 0$, назовем его $C^* = \min_{\theta} \max_r C(r, \theta)$.

Так как при любом угле θ функция $C(r, \theta)$ непрерывна и монотонно убывает до нуля при уменьшении до нуля r , то она принимает значение C^* при некотором $r \in [0, r^*]$, где r^* есть радиус внутренней подсистемы, при котором C для данного угла θ принимает максимальное значение, т.е. существует непрерывная линия, назовем ее L_1 , на которой $C = C^*$.

Линия L_1 замкнута и охватывает начало координат. В области, ограниченной этой линией (назовем ее областью I) $C < C^*$. Для любого возможного C существует единственная линия $C(r, \theta) = C = \text{const}$, и эта линия охватывает начало координат. При попадании начальных значений r и θ в область I движение может быть названо "проскальзыванием", поскольку вихревая подсистема, которая в начальный момент была внутренней, в дальнейшем всегда остается внутренней и движется вокруг центра быстрее внешней. В силу (2) имеется две области I : при $r < R$ и при $r > R$. Соответственно имеются две линии L_1 .

Так как функция $C(r, \theta)$ непрерывна как по r , так и по θ , то существует непрерывная линия максимумов C по r . В точке $\theta = 0$ эта линия пересекает найденную сепаратрису L_1 , при других θ , L_1 лежит ближе к началу координат, чем линия максимумов. Из непрерывности функции $C(r, \theta)$ следует, что есть еще другая линия, на



Фиг. 1. Поведение линии L_2 в зависимости от n

которой $C = C^*$, назовем ее L_2 . Она отстоит при $0 < \theta \leq \pi/n$ дальше от начала координат, чем линия максимумов.

Для линии L_2 имеются две возможности (фиг. 1). Во-первых, она может пересекать окружность $r = R$, после чего внешняя и внутренняя подсистемы вихрей меняются местами. В этом случае в силу уравнения (2) L_2 является замкнутой линией, ограничивающей область, содержащую точку локализации вихря, к которому привязана система координат ($r = R, \theta = 0$); в этой области $C < C^*$. Во-вторых, она может пересекать радиус $\theta = \pi/n$, тогда в силу симметрии системы линия L_2 вместе с ранее найденной линией L_1 является границей некоторой области, внутри которой $C > C^*$.

Численным решением системы (2), (3) установлено, что рассматриваемая линия имеет первый вид при $n = 2, 3$ и 4. В этом случае область, которую она ограничивает, назовем областью 2.1. При $n \geq 5$ данная линия имеет второй вид и ограничивает вместе с ранее найденной линией L_1 область 4.2. Причина такой нумерации будет ясна позже из аналогии между траекторными портретами для различных значений n .

Рассмотрим возможные типы движений вихревой системы для $n = 2, 3$ и 4.

Описание вида движения вихрей в каждой области дается на основании вида границы данной области. Граница области всегда соответствует одному значению $C(r, \theta)$. $C(r, \theta)$ – непрерывная функция, следовательно, отступая внутрь области на небольшое расстояние, попадаем на линию C , которая будет в целом повторять очертания границы (хотя граница может иметь углы, а внутри области все траектории гладкие – из вида функции $C(r, \theta)$). Чем дальше в глубь области, тем меньше траектории похожи на вид границы.

Если начальные данные возмущения системы r и θ попали в область 2.1, то при дальнейшем движении системы вихри двух подсистем образуют устойчивые пары. В каждой паре вихри вращаются друг относительно друга, а все пары в целом вращаются относительно общего центра системы. В области 2.1, как и в области 1, $C < C^*$.

Вне этой области $C > C^*$. Движение системы здесь имеет характер "качания", т.е. если направление из центра системы на какой-либо i -й вихрь одной подсистемы в начальный момент находилось между направлениями на j -й и $(j + 1)$ -й вихри другой подсистемы, то при дальнейшем движении i -й вихрь всегда находится между j -м и

$(j + 1)$ -м вихрями, периодически приближаясь то к одному, то к другому. При этом вся вихревая система в целом вращается вокруг своего центра.

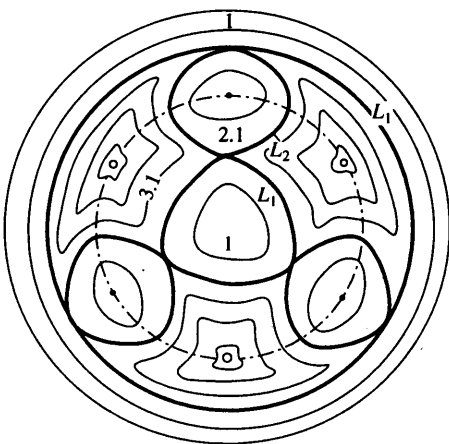
Назовем областью 3.1 область начальных значений r и θ с внешними границами $L_1 L_2 L_1 L_2$ (фиг 2), в которой качание происходит так, что каждая подсистема становится попеременно то внутренней, то внешней.

Численным решением получено, что при $n = 2$ и 3 абсолютный максимум величины C достигается при $r = R = \sqrt{2}/2$ и $\theta = \pi/n$, т.е. в том случае, когда все вихри равномерно расположены на одной окружности. Следовательно, для $n = 2$ и 3 все возможные типы движения исчерпываются описанными.

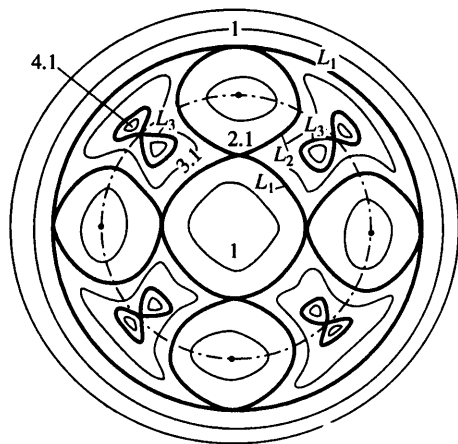
Точки абсолютного максимума в случае $n = 4$ имеют координату r , не равную $\sqrt{2}/2$. Численные расчеты показали, что для $n = 4$ отношение радиуса меньшей окружности к радиусу большей в этой точке равно 0,6759. Следовательно, в этом случае имеются линии $C = \text{const}$, охватывающие точку абсолютного максимума и не пересекающие окружность $r = R = \sqrt{2}/2$. Очевидно, что сепаратриса L_3 , ограничивающая область с таким видом качания, касается окружности $r = R = \sqrt{2}/2$, точкой касания является точка $(\sqrt{2}/2, \pi/n)$. Назовем полученную область начальных возмущений областью 4.1. Таким образом, при $n = 4$ внутри области 3.1 есть область 4.1 и эти области разделены сепаратрисой L_3 . В отличие от области 3.1, если начальные данные попали в область 4.1, то качание будет таким, что вихри, находящиеся в начальный момент на окружности большего радиуса, всегда в процессе движения будут находиться на окружности большего радиуса. При равномерном расположении всех вихрей на одной окружности система находится в равновесии, но это равновесие типа "седло", а в точке абсолютного максимума – равновесие типа "центр".

Численный эксперимент подтверждает линейную устойчивость положения равновесия при равномерном распределении всех вихрей на одной окружности при $n = 2$ и 3 и потерю устойчивости при $n = 4$ [6]. Траекторные портреты для $n = 3$ и 4 изображены на фиг. 2 и 3 соответственно.

При $n \geq 5$ имеются следующие виды движений системы. Проскальзывание, при котором внутренняя подсистема движется быстрее внешней, – область 1, точно такая же, как при $n < 5$. Образование вихревых пар – область 2.2, аналогично области 2.1



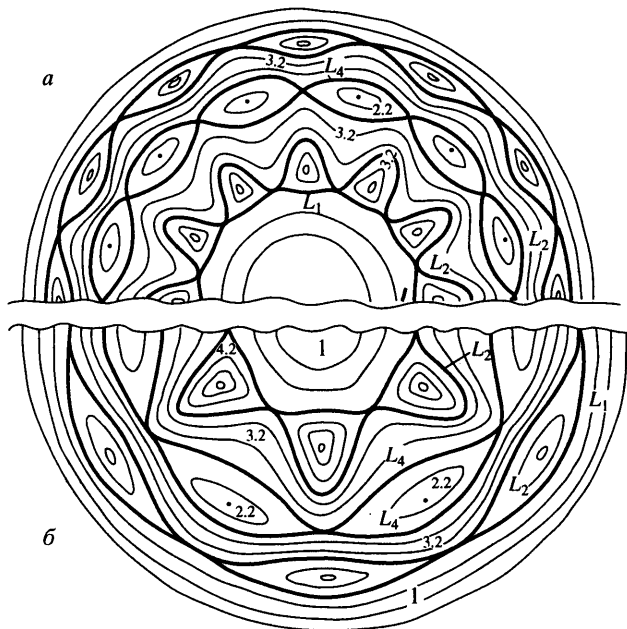
Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Траекторный портрет при $n = 3$; L_1, L_2 – сепаратрисы. Числами обозначены области

Фиг. 3. Траекторный портрет при $n = 4$. Обозначения те же, что на фиг. 2



Фиг. 4. Траекторные портреты при $n = 12$ (а) и $n = 6$ (б).
Обозначения те же, что на фиг. 2

для случая $n < 5$. Проскальзывание, при котором внешняя подсистема движется быстрее внутренней, – область 3.2, для нее нет аналога при $n < 5$. Качание одной подсистемы внутри другой – область 4.2, аналогично области 4.1 для $n = 4$.

Различие движений в областях 1 и 3.2 заключается в том, что в области 1 внутренняя подсистема вихрей вращается быстрее внешней, а в 3.2, наоборот, внешняя подсистема вращается быстрее внутренней. Это не противоречит здравому смыслу, поскольку самоиндуцируемая скорость системы вихрей, расположенных на окружности, тем больше, чем меньше ее радиус, в то же время вихри внешней окружности тормозят вращение вихрей внутренней окружности, а вихри внутренней окружности ускоряют вращение вихрей внешней окружности.

Найдем сепаратрису L_4 , разделяющую области 2.2 и 3.2. В области 3.2 линии $C = \text{const}$ должны охватывать начало координат, а в области 2.2 не должны этого делать. Если линия $C = \text{const}$ пересекает окружность $r = \sqrt{2}/2$, то в силу (2) она является замкнутой линией, ограничивающей область, содержащую точку локализации вихря, к которому привязана система координат ($r = R, \theta = 0$), и, значит, не охватывает начало координат. Из этого следует, что искомой сепаратрисой L_4 является линия $C = C(\sqrt{2}/2, \pi/n)$. От области 4.2 область 3.2 отделена сепаратрисой L_2 .

Область 4.2 ограничена линиями L_1 и L_2 . Если начальные условия попадают в эту область, то движение имеет характер качания того же типа, что и в области 4.1, т.е. вихри, бывшие в начальный момент на внешней окружности, всегда в процессе движения остаются на внешней окружности. Угловые скорости обеих систем в среднем равны: каждый вихрь внутренней системы всегда находится (качается) между двумя соседними вихрями внешней системы. В области 4.2 $C > C^*$ и здесь находится точка абсолютного максимума C . Вне области 4.2 при $n \geq 5$ $C > C^*$.

Траекторные портреты для случаев $n = 6$ и 12 изображены на фиг. 4.

Заключение. Для любого конечного числа вихрей полностью описаны траекторные портреты соответствующей системы. Найденны сепаратрисы, разделяющие об-

ласти с различными типами движения. Полученные траекторные портреты подтверждают существование стационарных вихревых систем на двух концентрических окружностях при любом конечном $n \geq 4$. В дальнейшем интересно исследовать поведение такой стационарной системы при $n \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-01133).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 535 с.
2. Новиков Е.А., Седов Ю.Б. Стохастические свойства системы четырех вихрей // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. № 3. С. 868–876.
3. Савин А.С. Возмущенное движение симметричной вихревой дорожки // ПМТФ. 1986. № 4. С. 36–39.
4. Koiller J., Pinto de Carvalho Sonia, Rodrigues da Silva Ronfido, Goncalves de Oliveira Luis Carlos. On Aref's vortex motions with a symmetry center // Physica. D. 1985. V. 16. № 1. P. 27–61.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
6. Махалдиани Н.В., Маханьков В.Г., Швачка А.Б. Динамика системы вихрей. 1. Устойчивые частные решения: Препринт № P5-12141. Дубна: ОИЯИ, 1979. 5 с.
7. Катъшев Ю.В., Махалдиани Н.В., Маханьков В.Г., Швачка А.Б. Динамика системы вихрей. 2. Линейная теория возмущений: Препринт № P5-12142. Дубна: ОИЯИ, 1979. 5 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.I.1999