

УДК 532.527.013.4

© 2000 г. В.Ф. КОПЬЕВ, С.А. ЧЕРНЫШЕВ

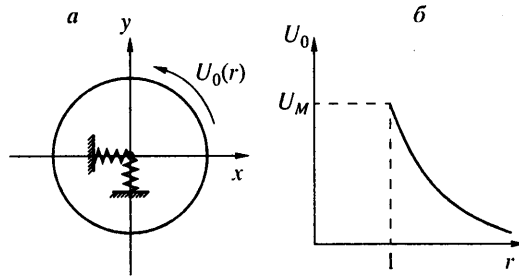
НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА В ЦИРКУЛЯЦИОННОМ ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрена задача об устойчивости кругового цилиндра в циркуляционном потоке при условии, что цилиндр может совершать как свободные колебания (свободный цилиндр), так и колебания в присутствии вынуждающей силы (цилиндр на пружине). Показано, что при наличии завихренности в потоке такая простая система может оказаться неустойчивой. Рассмотрены частные случаи распределений завихренности, позволяющих получить точное аналитическое решение. Проанализирован случай слабой монотонно убывающей завихренности произвольного вида при произвольном соотношении между плотностью цилиндра и жидкости. Оказалось, что неустойчивость может возникать только для цилиндра, плотность которого больше плотности жидкости. Построена приближенная процедура решения этой задачи, основанная на рассмотрении энергетического баланса в системе, позволяющая получить выражение для инкрементов и объяснить физический механизм реализующей неустойчивости, которая связана с возможностью передачи энергии от возмущений в критическом слое к колебаниям цилиндра.

Описание движения твердого тела в идеальной жидкости представляет собой хорошо известную задачу в гидродинамике. Она представляет интерес как с точки зрения вычисления моментов и сил, действующих на движущееся тело, так и в контексте исследования проблемы устойчивости такого движения. Задача о движении произвольного тела в потенциальном потоке подробно исследовалась, начиная от работ Кельвина и Тэта [1, 2]. В то же время, как отмечено в [2], эта задача становится исключительно сложной в случае произвольного завихренного потока и, вообще говоря, допускает общее решение лишь в случае равномерно вращающейся жидкости. Из результатов в этом направлении отметим работы [3, 4] об устойчивости движения сферы в неоднородном потоке идеальной жидкости и [5] об устойчивости коаксиальных цилиндров с равномерно вращающейся жидкостью между ними. Отметим также новый подход к задаче исследования устойчивости системы тело + жидкость, развиваемый в [6] и основанный на обобщении теорем Арнольда на случай движения произвольного твердого тела в завихренном потоке. Такой подход позволил сформулировать общие критерии устойчивости течения при весьма широких предположениях, однако прямое использование этих критериев в случае конкретного течения весьма затруднительно.

На возможность неустойчивости колебаний цилиндра в циркуляционном потоке с переменной завихренностью впервые обращено внимание в [7], где получено дисперсионное соотношение и найдено выражение для инкремента в случае тяжелого цилиндра. Механизм такой неустойчивости имеет весьма общий характер и может реализовываться в различных течениях, когда в качестве осциллятора рассматриваются не колебания цилиндра, а, например, колебания границы вихревого кольца [8]. Аналогичный механизм имеет майлсовская неустойчивость ветровых волн на поверхности тяжелой жидкости [9, 10].

1. Постановка задачи и вывод дисперсионного соотношения. Рассмотрим двумерную колебательную систему, состоящую из цилиндра, способного совершать колеба-



Фиг. 1. Цилиндр в циркуляционном потоке, способный совершать самостоятельные колебания в плоскости xy (а), угловая скорость (б)

тельные движения за счет упругой связи, и обтекающего его циркуляционного потока идеальной несжимаемой жидкости единичной плотности (фиг. 1). Круговой цилиндр, имеющий единичный радиус и массу M , способен смещаться в плоскости x, y , возвращающая сила характеризуется жесткостью пружины χ . В цилиндрической системе координат среднее течение имеет поля угловой скорости $U_0(r)$ и завихренности $\Omega_0(r)$. Предполагается, что $U_0(r)$ и $\Omega_0(r) = 2U_0 + rU_0'$ – монотонно убывающие положительные функции. Задача решается в линейном приближении по амплитуде возмущений, вызванных колеблющимся цилиндром.

Как известно [11], плоское круговое течение с монотонно убывающим профилем завихренности устойчиво по отношению к двумерным возмущениям. Также устойчивы и колебания осциллятора при отсутствии циркуляционного течения жидкости. Вместе с тем, как будет показано, совместные колебания этой системы в широком диапазоне параметров, характеризующих систему, оказываются неустойчивыми.

Для вычисления возмущений, создаваемых в потоке колеблющимся цилиндром, воспользуемся уравнениями для поля смещения [12]. В несжимаемой жидкости поле смещения ϵ бездивергентно и связано с возмущением завихренности соотношениями $\Omega = \nabla \times (\epsilon \times \Omega_0)$, $\nabla \epsilon = 0$. Эволюция поля смещения описывается уравнением

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \times (\epsilon \times V_0) - \nu = 0 \quad (1.1)$$

При этом возмущение скорости выражается через поле смещения соотношением

$$\nu = \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times (\epsilon \times \Omega_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

Применяя к уравнению (1.1) операцию ротора и используя условие бездивергентности поля смещения, для возмущений вида $\exp(-i\omega t + im\phi)$ получим следующее уравнение для r -компоненты поля ϵ :

$$\frac{d^2 \epsilon^r}{dr^2} + \left(\frac{3}{r} + \frac{2mU_0'}{mU_0 - \omega} \right) \frac{d\epsilon^r}{dr} + \frac{1-m^2}{r^2} \epsilon^r = 0 \quad (1.2)$$

с условиями непротекания на границе колеблющегося цилиндра и убывания возмущений на бесконечности:

$$r = 1: \quad \epsilon^r = \xi_0, \quad r = \infty: \quad \epsilon^r = 0$$

Уравнение (1.2) – аналог известного уравнения Рэлея для потоков с круговыми линиями тока, записываемого обычно для функции тока A [11]

$$\frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} + \frac{m\Omega_0'}{r(mU_0 - \omega)} \right) A = 0 \quad (1.3)$$

Оба уравнения имеют особенность в критическом слое $r = r_c$, где $U_0(r_c) = \omega/m$. Уравнения (1.2) и (1.3) переходят друг в друга с учетом связи

$$v^r = \frac{imA}{r} = (-i\omega + imU_0)\epsilon^r, \quad v^\varphi = -\frac{\partial A}{\partial r} = (-i\omega + imU_0)\epsilon^\varphi - rU_0'\epsilon^r$$

которая следует из определения функции тока и уравнения (1.1).

Преимущество использования поля ϵ для описания возмущений проявляется для гармоник $m = \pm 1$. В этом случае последнее слагаемое в уравнении (1.2) обращается в нуль, что позволяет сразу выписать общее решение

$$\epsilon^r(r) = C_1 + C_2 I(r), \quad I(r) = \int_r^\infty \frac{dr}{r^3(mU_0 - \omega)^2} \quad (1.4)$$

Возможность получения общего решения в случае $m = \pm 1$ показана в [11]. Первое слагаемое в (1.4) соответствует решению вида

$$\epsilon^r(r, \varphi) = C_1 \exp(\pm i\varphi), \quad \epsilon^\varphi(r, \varphi) = \pm i \frac{C_1}{r} \exp(\pm i\varphi)$$

и представляет собой простой сдвиг течения как целого. Именно наличие среди решений этого элементарного возмущения позволяет получить в аналитическом виде общее решение задачи о возмущениях с $m = \pm 1$ в течении с произвольным профилем угловой скорости $U_0(r)$.

Рассмотрим далее случай $m = 1$, которому при $\omega > 0$ соответствует вращение цилиндра по потоку (против часовой стрелки, фиг. 1). Константы C_1 и C_2 в решении (1.4) найдем из граничных условий. Условие убывания возмущений на бесконечности дает $C_1 = 0$. Константа C_2 находится из условия непротекания на границе цилиндра: $C_2 = \xi_0/I_0(\omega)$, где $I_0(\omega)$ – значение функции $I(r, \omega)$ при $r = 1$. Таким образом, возмущения, создаваемые в потоке колеблющимся цилиндром, имеют вид

$$\epsilon^i(r, \varphi, t) = \epsilon^i(r) \exp(-i\omega t + i\varphi), \quad \epsilon^r = \frac{I(r, \omega)}{I_0(\omega)} \xi_0 \quad (1.5)$$

Для получения уравнения колебаний системы найдем возмущение давления p_b на границе колеблющегося цилиндра. Используя систему уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости, выразим возмущение давления через поле смещения

$$p = (\omega^2 - U_0^2)r\epsilon^r + (U_0 - \omega)^2 r^2 \frac{d\epsilon^r}{dr} \quad (1.6)$$

Суммарное давление в каждой фиксированной точке пространства будет $P_0 + p$, где P_0 – стационарное поле давления в исходном положении, p – возмущение давления в потоке (1.6). На движущейся поверхности цилиндра в линейном приближении получим $p_b = \xi_0 dP_0/dr + p$, где dP_0/dr и p взяты на невозмущенной границе цилиндра $r = 1$. Используя точное соотношение $dP_0/dr = rU_0^2$ и уравнение (1.6), получим

$$p_b = \left[\omega^2 - \frac{1}{I_0(\omega)} \right] \xi_0 \quad (1.7)$$

Возвращающая сила складывается из силы пружины и силы давления, которая находится интегрированием (1.7) по границе цилиндра. Следовательно, баланс сил, действующих на цилиндр, выражается соотношением $(-M\omega^2 + \chi)\xi_0 = -\pi p_b$. Отсюда и из (1.7) получим дисперсионное соотношение

$$D(\omega) = \omega_0^2 - \omega^2 + \gamma \left(\omega^2 - \frac{1}{I_0(\omega)} \right) = 0 \quad (1.8)$$

$$I_0(\omega) = \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^3 [U_0(r) - \omega]^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{\chi}{M} \quad (1.9)$$

где $\gamma = \pi/M$ – отношение массы вытесненной жидкости к массе цилиндра. Подынтегральное выражение в (1.9) имеет особенность в точке $r = r_c$, где $U_0(r_c) = \omega$.

В частном случае потенциального течения угловая скорость имеет вид $U_0(r) = U_M/r^2$ и интеграл (1.9) легко вычисляется

$$I_0 = [2\omega(\omega - U_M)]^{-1} \quad (1.10)$$

Тогда из дисперсионного соотношения (1.8) получим

$$\omega_{1,2} = \frac{\gamma U_M}{1 + \gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma U_M}{1 + \gamma}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{1 + \gamma}} \quad (1.11)$$

Следовательно, в случае потенциального потока рассматриваемая колебательная система обладает двумя действительными собственными частотами $\omega_{1,2}$ при любых параметрах системы. В случае, если жидкость покоится, из (1.11) получим

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \gamma}}$$

Этот результат соответствует колебаниям осциллятора с учетом присоединенной массы жидкости. Наконец, случай $\gamma = 0$ соответствует невесомой жидкости, которая, очевидно, не влияет на частоту колебаний свободного осциллятора ω_0 .

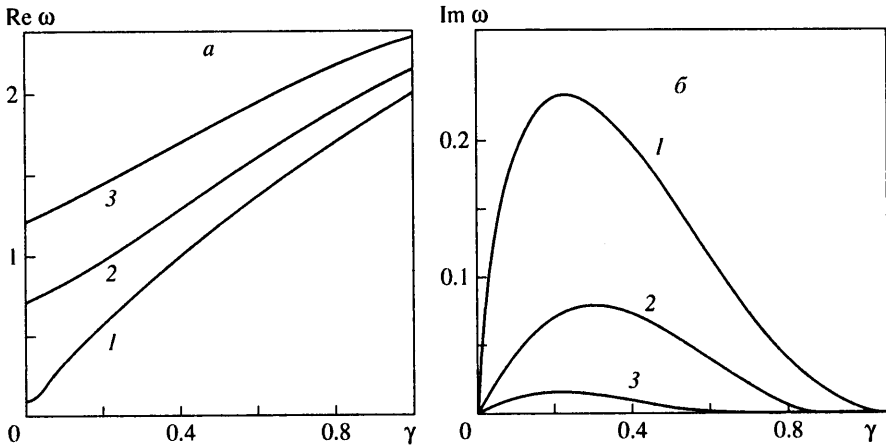
Если возвращающая сила пружины отсутствует ($\omega_0 \rightarrow 0$), то частота ω_2 в (1.11) тождественно обращается в нуль. Такое движение соответствует простому сдвигу всей системы как целого. Другая собственная частота $\omega_1 = 2\gamma U_M/(1 + \gamma)$ отлична от нуля и соответствует вращению цилиндра по потоку. Таким образом, даже при отсутствии возвращающей силы цилиндр остается осциллятором, способным совершать нейтральные колебания около положения равновесия. При $\gamma = 1$ это движение вписано в основной поток и тривиально в том смысле, что внешний поток при вращении цилиндра остается невозмущенным. При отличии плотности цилиндра от плотности жидкости скорость цилиндра будет отличаться от скорости потока. При этом легкий цилиндр ($\gamma > 1$) движется быстрее потока, так как $\omega_1 > U_M$, а тяжелый цилиндр отстает от потока, так как $\omega_1 < U_M$. В [3, 4] показано, что в произвольном неоднородном потенциальном потоке положение равновесия сферы неустойчиво. С учетом результатов [13] то же утверждение справедливо и для цилиндра без циркуляции. Однако из (1.11) следует, что при наличии циркуляции положение равновесия цилиндра в неоднородном потенциальном потоке может оказаться устойчивым.

2. Точные решения. Рассмотрим поле угловой скорости вида $U_0 = \Gamma/r^2 + \Omega_M/r$. Это течение складывается из двух составляющих – потенциальной (первый член) и завихренной с монотонно убывающей завихренностью вида $\Omega_0 = \Omega_M/r$, где Ω_M – величина завихренности на границе цилиндра. В этом случае, вычисляя интеграл (1.9), получим

$$I_0 = \frac{2\Gamma + \Omega_M}{4Q^2(\omega - \Gamma - \Omega_M)} + \frac{\Omega_M}{8Q^3} \ln \frac{P - Q}{P + Q} \quad (2.1)$$

$$P = \omega - \Omega_M/2, \quad Q = \sqrt{\Gamma\omega + \Omega_M^2/4}$$

Логарифмическая функция в комплексной плоскости ω имеет разрез на отрезке $0 < \omega < U_M$, где $U_M = \Gamma + \Omega_M$. Для выбора ветви логарифмической функции использовано то, что $I_0(\omega)$ – положительная действительная величина при $\omega > U_M$. Подставляя (2.1) в равенство (1.8), получим трансцендентное уравнение, определяющее собственные час-



Фиг. 2. Изменение действительной (а) и мнимой (б) части собственной частоты в зависимости от отношения плотностей жидкости и цилиндра γ при различных значениях частоты осциллятора ω_0 : 1 - $\omega_0 = 0,1$; 2 - $\omega_0 = 0,7$; 3 - $\omega_0 = 1,2$

тоты системы. Далее ограничимся исследованием того, как влияет циркуляционный поток на две собственные частоты осциллятора $\pm\omega_0$ в зависимости от параметров γ и ω_0 .

При $\gamma = 0$ (тяжелый цилиндр) жидкость не влияет на колебания осциллятора и система имеет два собственных колебания с частотами $\omega_{1,2} = \pm\omega_0$. При увеличении γ (увеличении плотности жидкости) собственная частота ω_2 остается действительной, а собственная частота ω_1 ведет себя по-разному в зависимости от величины ω_0 . Если $\omega_0 < U_M$, то при $0 < \gamma < \gamma_0$, где $\gamma_0 = 1 - \omega_0^2 / U_M^2$, эта собственная частота расщепляется на две комплексно-сопряженные частоты, одна из которых соответствует неустойчивым (фиг. 2), а другая - затухающим колебаниям; при $\gamma = \gamma_0$ эти частоты становятся действительными и сливаются в одну собственную частоту $\omega_1 = U_M$; при $\gamma > \gamma_0$ эта частота является действительной и возрастает от $\omega_1 = U_M$ до $\omega_1 = \omega_\infty$, где ω_∞ есть решение уравнения $\omega_\infty^2 I(\omega_\infty) = 1$. В случае $\omega_0 > U_M$, собственная частота ω_1 , так же как и ω_2 , остается действительной при всех значениях γ , т.е. рассматриваемые колебания остаются устойчивыми.

Таким образом, при $\gamma < 1$ существует диапазон частот ω_0 , при которых возникает неустойчивость. При приближении γ к единице этот диапазон сужается, а при $\gamma \geq 1$ неустойчивость исчезает.

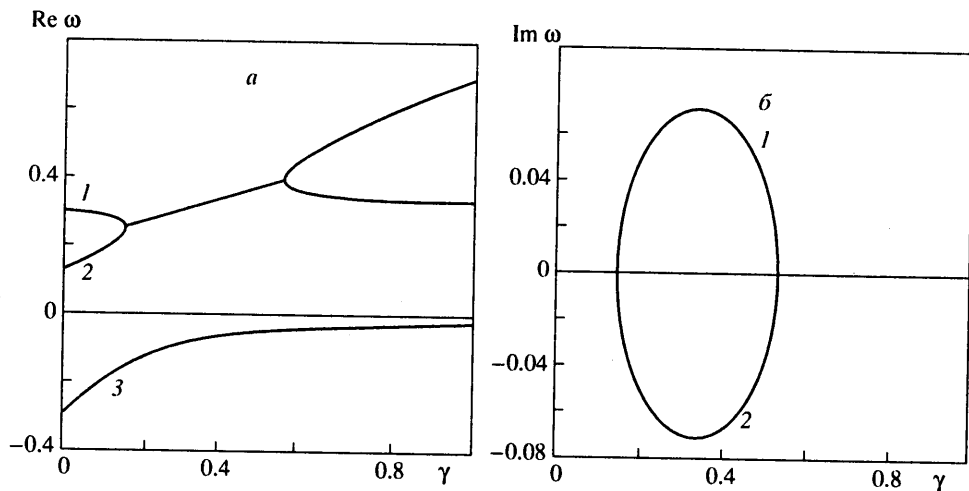
Рассмотрим течение с угловой скоростью вида $U_0 = \Omega_0/2$ при $1 < r < R$ и $U_0 = \Omega_0 R^2/2r^2$ при $r > R$. Это течение имеет постоянную завихренность Ω_0 при $1 < r < R$ и потенциально при $r > R$. В этом случае интеграл (1.9) имеет вид

$$I_0 = \frac{R^2 \omega - \Omega_0 / 2}{2\omega R^2 (\Omega_0 / 2 - \omega)^2} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (1.8), получим дисперсионное уравнение

$$\omega_0^2 - \omega^2 + \gamma \left[\omega^2 - \frac{2\omega R^2 (\Omega_0 / 2 - \omega)^2}{R^2 \omega - \Omega_0 / 2} \right] = 0$$

Это уравнение имеет три корня, определяющих собственные частоты системы. В случае $\gamma \rightarrow 0$ собственные частоты имеют вид $\omega_{1,2} = \pm\omega_0$, $\omega_3 = \Omega_0/2R^2$. Первые две частоты соответствуют колебаниям осциллятора без учета жидкости, а третья частота - колебаниям границы вихревого слоя при неподвижном цилиндре. Поскольку



Фиг. 3. Пример изменения действительной (а) и мнимой (б) части собственной частоты в зависимости от отношения плотностей жидкости и цилиндра γ для случая $R_2 = 2$, $\Omega_0 = 1$ при значении частоты осциллятора $\omega_0 = 0,3$

дисперсионное соотношение сводится к кубическому уравнению (при $\omega_0 = 0$ – к квадратному), то задача может быть легко исследована при любых значениях параметров. При увеличении γ собственные частоты изменяются и система может стать неустойчивой. Эволюция собственных частот при изменении γ для случая $R_2 = 2$, $\Omega_0 = 1$, $\omega_0 = 0,3$ представлена на фиг. 3. Видно, что для этих параметров существует область значений γ , в которой система неустойчива.

Эта неустойчивость оказывается возможной в связи с тем, что система обладает возмущениями как с положительной, так и с отрицательной энергией. Действительно, при $\gamma \rightarrow 0$ колебания с частотами $\omega_{1,2}$ сводятся к колебаниям осциллятора, энергия которых при единичной амплитуде смещения цилиндра равна $E = M\omega_0^2$, а колебания с частотой ω_3 представляют собой колебания вихревого слоя, энергия которых может быть легко вычислена (см., например, [14]) и при единичной амплитуде смещения границы вихревого слоя равна $E = -\pi\Omega_0^2/4$, т.е. при $\gamma \rightarrow 0$ система обладает колебаниями с энергией разного знака. При увеличении величины γ собственные колебания представляют собой совместные колебания цилиндра и вихревого слоя, энергия которых может оказаться равной нулю. Система при этом становится неустойчивой.

Очевидно, что если на поверхности вихревого слоя поместить массивное кольцо, то эта новая система также должна быть неустойчивой, во всяком случае при не очень большой массе кольца. При этом, естественно, в задаче появятся новые параметры, определяющие границы области неустойчивости. Такая система детально рассмотрена в [5], где показано, что неустойчивость действительно имеет место.

3. Случай слабой завихренности. Рассмотрим интеграл (1.9) в предположении, что обтекающий поток слабозавихрен ($\Omega_M \ll U_M$). Отметим, что при действительных частотах $\omega > U_M$ интеграл является положительной функцией. При действительных $0 < \omega < U_M$ подынтегральное выражение имеет особенность, в связи с чем $I_0(\omega)$ является многозначной функцией на комплексной плоскости ω и имеет разрез на отрезке $0 < \omega < U_M$. С помощью интегрирования по частям можно получить цепочку равенств

$$I_0 = \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^3(U_0 - \omega)^2} = -\int_1^{\infty} \frac{1}{U'r^3} \left(\frac{U_0}{\omega(U_0 - \omega)} \right)' dr =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{U_0' r^3} \frac{U_0}{\omega(U_0 - \omega)} \Big|_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \frac{1}{\omega(U_0 - \omega)} \frac{U_0 \Omega_0'}{U_0'^2 r^4} dr = \\
&= \frac{1}{2\omega(\omega - U_M)(1 - \Omega_M/2U_M)} - \int_0^{U_M} \frac{f(z)}{z - \omega} dz, \quad f(z) = \frac{U_0 \Omega_0'}{\omega U_0'^3 r^4}, \quad z = U_0(r)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по r . Для преобразования использовались точные соотношения $\Omega_0 = 2U_0 + rU_0'$, $\Omega_0' = (U_0' r^3)' / r^2$. Поскольку завихренность и ее производная предполагаются малыми, то можно пренебречь величиной $\Omega_M/2U_M$ в первом члене последнего равенства, а также, казалось бы, вторым членом. Однако, отбрасывая второй член, следует соблюдать осторожность, поскольку интеграл типа Коши [13] может принимать не только действительные, но и комплексные значения. Наличие даже малой мнимой добавки может качественно изменить всю картину течения (вызвать неустойчивость).

Рассмотрим второй член в (3.1). Как известно, интеграл типа Коши имеет разрыв вдоль контура интегрирования (здесь это отрезок действительной оси от 0 до U_M), определяемый формулами Сохоцкого. Следуя [15], выделим под интегралом особенность и проинтегрируем

$$\int_0^{U_M} \frac{f(z) dz}{z - \omega} = \int_0^{U_M} \frac{f(\omega)}{z - \omega} dz + \int_0^{U_M} \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega} dz = f(\omega) \ln \frac{\omega - U_M}{\omega} + \int_0^{U_M} \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega} dz$$

В последнем равенстве интеграл определяет регулярную функцию, действительную и конечную для всех действительных значений ω , а первый член – многозначную функцию, регулярная ветвь которой может быть выбрана с помощью аналитического продолжения в соответствии с условием, что при действительных $\omega > U_M$ интеграл

$\int_0^{U_M} dz / (\omega - z)$ не особый и является действительной положительной величиной. На

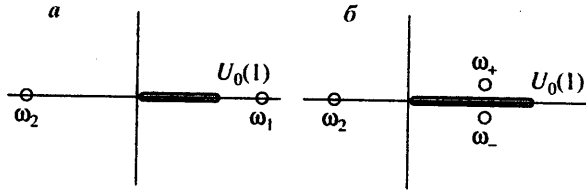
разрезах от 0 до U_M разрывной является только мнимая часть, равная на верхнем берегу разреза величине $+i\pi f(\omega)$, поскольку при аналитическом продолжении интеграла при переходе от больших значений ω к значению на разрезе точка U_M обходит сверху и логарифм получает приращение аргумента $+i\pi$, а на нижнем берегу – величине $-i\pi f(\omega)$, поскольку точка U_M обходит снизу.

Теперь воспользуемся условием малости завихренности и ее производных. Оставляя в реальной и мнимой частях I_0 только главные по малой завихренности члены, получим, что на действительной оси ω

$$I_0 = \frac{1}{2\omega(\omega - U_M)} \pm i\pi f(\omega) + O\left(\frac{\Omega_M}{U_M}\right), \quad f(\omega) = \frac{\Omega_0'}{r^4 (U_0')^3} \Big|_{r=r_c(\omega)} \tag{3.2}$$

где координата критического слоя r_c определяется из соотношения $U_0(r_c) = \omega$, знаки "±" соответствует верхнему и нижнему берегам разреза $0 < \omega < U_M$. Появление чисто мнимой части в дисперсионном соотношении, связанной с убывающей завихренностью, показывает, что частота колебаний в интервале от 0 до U_M не может оставаться действительной в отличие от случая потенциального обтекания (1.10). Сравнивая выражение (2.1) для завихренности произвольной величины с (3.2), видим, что (2.1) переходит в (3.2) при $\Omega_M/\Gamma \ll 1$.

Поскольку в рассматриваемом случае мнимая добавка к I_0 мала, то мала будет и мнимая добавка к частоте, т.е. $\omega = \omega_R + i\delta$, $\delta/\omega_R \ll 1$. Ограничиваясь главными членами, получим систему для нахождения действительной ω_R и мнимой δ частей собст-



Фиг. 4. Поведение собственной частоты в зависимости от величины действительной части: *a* – действительная часть лежит вне разреза (устойчивость); *б* – действительная часть одной из частот попадает на разрез (расщепление собственной частоты на неустойчивую и затухающую моды)

венной частоты (мнимая часть появляется при $0 < \omega_R < U_M$)

$$(\gamma + 1)\omega_R^2 - 2\omega_R\gamma U_M - \omega_0^2 = 0 \quad (3.3)$$

$$(\gamma + 1)\left(\omega_R - \frac{\gamma U_M}{\gamma + 1}\right)\delta = \pm 2\pi f(\omega_R)\omega_R^2(\omega_R - U_M)^2 \quad (3.4)$$

Во втором уравнении для нарастающих колебаний надо брать знак плюс, а для убывающих – минус. Уравнение для действительной части приводит к двум корням вида (1.11), соответствующим обтеканию потенциальным потоком, один из которых всегда положительный, а другой – отрицательный (или нулевой для свободного цилиндра). Корень ω_2 не представляет интереса, поскольку для него не возникает мнимой части в (3.1) и такое колебание всегда устойчиво. Учет малой завихренности может лишь несколько смещать эту частоту вдоль действительной оси. Рассмотрим собственную частоту с положительной действительной частью

$$\omega_R^{(1)} = \frac{\gamma U_M}{1 + \gamma} + \sqrt{\left(\frac{\gamma U_M}{1 + \gamma}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{1 + \gamma}} \quad (3.5)$$

Если параметры осциллятора таковы, что $0 < \omega_R^{(1)} < U_M$, то для вычисления мнимой части используем (3.4). При этом знак плюс, соответствующий верхнему берегу разреза, надо брать для растущих колебаний ($\omega + i0$), а знак минус – для затухающих ($\omega - i0$) (фиг. 4). Решения существуют, если эти знаки соответствуют знаку δ , определяемому из уравнения (3.4). В рассматриваемом случае $\omega_R - \gamma U_M / (\gamma + 1) > 0$, $f(\omega_R) > 0$, т.е. знак инкремента (декремента) δ , получаемый из (3.4), согласуется с предположением о знаке правой части. В результате получим

$$\delta = \pm \frac{2\pi f(\omega_R)\omega_R^2(\omega_R - U_M)^2}{\sqrt{\omega_0^2(1 + \gamma) + \gamma^2 U_M}} \quad (3.6)$$

Таким образом, собственная частота ω_1 расщепляется на пару комплексно-сопряженных частот, одна из которых соответствует неустойчивому колебанию, а другая – затухающему (фиг. 4).

Заметим, что если бы знаки левой и правой частей в (3.4) различались (например, в случаях $\gamma < 0$ или $\Omega'_0(r_c) > 0$), это означало бы, что непрерывных решений уравнения (1.2), убывающих на бесконечности, не существует. Такая ситуация имеет место в задаче о колебаниях вихря Кельвина в слабозавихренном потоке. Появление убывающей завихренности в среднем течении вне ядра приводит к уходу собственных частот с верхнего (причинного) листа плоскости ω под разрез [16].

Пренебрегая в среднем течении различием между потенциальным потоком и слабозавихренным из (3.6), получим

$$\delta = -\frac{\gamma \pi r_0 \Omega'_0(r_0)(\omega_R - U_M)^2}{4U_M[(1 + \gamma)\omega_R - \gamma U_M]}, \quad r_0 = \text{Re}(r_c) \quad (3.7)$$

где величина r_0 в главном приближении определяется соотношением $\omega_R = U_M / r_0^2$.

Заметим, что описанная неустойчивость не может реализовываться для течений с $\gamma > 1$. Действительно, для возникновения неустойчивости необходимо, чтобы величина ω_R , определяемая (3.5), была меньше значения угловой скорости на границе цилиндра U_M . Только в этом случае в интеграле (3.1) возникают мнимые добавки. Это условие появления неустойчивости $\omega_R < U_M$ с использованием (3.5) легко переписывается в виде $\omega_0^2 / U_M < 1 - \gamma$, что при $\gamma > 1$ невозможно, так как $U_M > 0$. Если $\gamma < 1$, то всегда существует диапазон параметров осциллятора, при которых течение будет неустойчиво. Этот результат полностью согласуется с численным анализом первого случая, рассмотренного в разд. 2.

Формула (3.7) справедлива не только для цилиндра на пружине, но и для свободного цилиндра ($\omega_0 = 0$). В этом случае легкий цилиндр остается устойчивым, поскольку его движение опережает скорость вращения жидкости на границе (а следовательно, и во всем потоке), и критический слой не возникает (см. обсуждение в конце разд. 1). Этот результат получен в [6] как частный случай общего подхода с использованием вариационного метода Арнольда. В то же время тяжелый цилиндр отстает от вращающейся на границе жидкости и, следовательно, всегда создает критический слой (в отличие от цилиндра на пружине, собственная частота которого определяется не только свойствами потока, но и жесткостью пружины). Это позволяет усилить утверждение [6] об устойчивости легкого цилиндра ($\gamma > 1$) утверждением о неустойчивости тяжелого цилиндра ($\gamma < 1$) в потоке со слабой монотонно убывающей завихренностью.

4. Энергетический подход в случае слабой завихренности. Исследуем полученный выше эффект потери устойчивости осциллятора в циркуляционном потоке с точки зрения баланса энергии в системе. В случае слабозавихренного течения ($\Omega_0 \ll U_0$) энергетический метод позволяет сравнительно простым способом найти мнимые добавки к собственным частотам. Кроме того, энергетический метод одинаково хорошо применим как для колебаний с $m = 1$, так и для произвольного m , когда решение вида (1.4) построить не удастся.

Рассмотрим возмущения вида $\exp(-i\omega t + im\varphi)$ с произвольным номером гармоники m . В случае слабой завихренности для описания возмущений с произвольным m удобнее использовать уравнение не для поля смещения ϵ , а для функции тока A (1.3), поскольку в этом уравнении влияние малой завихренности локализовано в последнем члене, который мал почти везде, кроме окрестности особой точки. В этом случае общее решение можно искать методами возмущений (см. Приложение). Это решение может быть представлено в виде

$$A = A_0(r)(1 + \alpha g(r))$$

$$A_0(r) = \left(U_M - \frac{\omega}{m} \right) \xi_0 r^{-m}, \quad g(r) = (r - r_c) \ln(r - r_c) + g_1(r), \quad \alpha = \frac{\Omega'_0(r_c)}{r_c U'_0(r_c)} \quad (4.1)$$

где $A_0(r)$ – решение задачи о колебаниях цилиндра в потенциальном потоке, $g_1(r)$ – непрерывно дифференцируемая на действительной оси и ограниченная при $r \rightarrow \infty$ функция, регулярная особая точка $r = r_c$ определяется условием $U_0(r_c) = \omega/m$. Выражение (4.1) показывает, что решение остается непрерывным в окрестности особой точки.

Наличие логарифмического члена в $A(r)$ обуславливает скачок мнимой части φ -компоненты скорости на критическом слое. В потенциальном течении этот скачок

отсутствует, а для завихренного течения, как будет показано ниже, он приводит к появлению потока энергии из окрестности критического слоя, в результате чего система теряет устойчивость. Найдем величину скачка $\text{Im } v^\varphi$.

Для слабозавихренного течения ($\alpha \ll 1$) частоты собственных колебаний мало отличаются от собственных частот осциллятора в потенциальном потоке ω_u , т.е. $\omega = \omega_u + O(\alpha)$. Так, для колебаний с $m = 1$ частоты ω_u определяются соотношением (1.11). Для комплексной частоты особая точка r_c также является комплексной. При $\alpha \ll 1$ особенность находится вблизи действительной оси в точке

$$r_c = r_0 + i \frac{\delta}{m U'_0(r_0)} + O(\alpha^2), \quad \delta = \text{Im } \omega = O(\alpha), \quad r_0 = \text{Re } r_c \quad (4.2)$$

где линия тока $r = r_0$ соответствует критическому слою в течении. Рассмотрим окрестность критического слоя $r_0 - \Delta < r < r_0 + \Delta$, где $\alpha \ll \Delta \ll 1$. Поскольку сдвиг особой точки r_c в комплексную область, определяемый соотношением (4.2), много меньше Δ , то на этом интервале функция $\ln(r - r_c)$ получает приращение $\pm i\pi$ в зависимости от того, где расположена особая точка – в верхней или нижней полуплоскости. С учетом того что $U'_0 < 0$, для нарастающих колебаний особенность лежит в нижней полуплоскости, а для убывающих – в верхней. В соответствии с этим знак минус выбирается при $\delta > 0$, а знак плюс – при $\delta < 0$. Используя (4.1) и выражения, связывающие поле скорости с функцией тока, получим

$$\text{Im } v^\varphi |_{r=r_0+\Delta} - \text{Im } v^\varphi |_{r=r_0-\Delta} = \pm \frac{\pi \alpha r_0}{m} |v'_0(r_0)| + O(\alpha \Delta) \quad (4.3)$$

где $v'_0 = imA_0 / r$ и $v^\varphi_0 = -A'_0$ – компоненты скорости, вычисленные для случая потенциального потока, знаки плюс и минус соответствуют случаям $\delta > 0$ и $\delta < 0$.

Рассмотрим теперь баланс энергии между областью $|r - r_0| < \Delta$ и остальным течением. Величина потока энергии через произвольную линию $r = \text{const}$ является квадратичной величиной по амплитуде возмущений и равна [17]

$$J = \int_0^{2\pi} \text{Re}(p + rU_0 v^\varphi) \text{Re}(v^r) r d\varphi = \frac{\pi r^2}{m} \text{Re}(\omega v^{r*} v^\varphi)$$

В этом выражении положительным выбрано направление внешней нормали. Поток энергии из окрестности критического слоя определяется разницей $\Delta J = J|_{r=r_0+\Delta} - J|_{r=r_0-\Delta}$. Для собственных колебаний в потенциальном течении $\Delta J = 0$, поскольку частота колебаний системы ω_u и компонента поля скорости v^φ_0 – действительны, а компонента v^r_0 – чисто мнимая. В случае завихренного течения поток энергии ΔJ отличен от нуля и определяется в главном приближении скачком $\text{Im } v^\varphi$ (4.3)

$$\Delta J = \pm \frac{\pi^2 \alpha \omega_u r_0^3}{m^2} |v'_0(r_0)|^2 + O(\alpha^2) \quad (4.4)$$

Таким образом, величина скачка ΔJ для слабозавихренного течения может быть выражена через r -компоненту скорости v^r_0 , вычисленную для случая потенциального потока, которая находится из решения более простой задачи с $\alpha = 0$. Влияние завихренности в критическом слое на колебания системы определяется только величиной параметра α .

Рассмотрим окрестность критического слоя, как отдельную подсистему, которая является источником или стоком энергии в зависимости от знака потока энергии ΔJ . Тогда оставшаяся область течения является другой подсистемой с изменяющейся

энергией E . Очевидно, что величины ΔJ и E связаны уравнением энергетического баланса $\Delta J = dE/dt$.

Вне окрестности критического слоя форма возмущений и их энергия в главном приближении определяются решением с $\alpha = 0$. Поскольку энергия потенциальных возмущений около колеблющегося цилиндра определяется только амплитудой колебаний, то медленное изменение энергии возмущений E в слабозавихренном течении может происходить только за счет изменения амплитуды $\epsilon(t) = \epsilon(0) \exp(\delta t)$. Энергия E квадратично зависит от амплитуды колебаний, поэтому уравнение баланса энергии приведет к следующему выражению для инкремента (декремента) колебаний:

$$\delta = \frac{\Delta J}{2E} \quad (4.5)$$

Таким образом, рассмотрение энергетического баланса в системе позволяет определить сдвиг δ собственных частот в комплексную плоскость, не решая полную задачу о возмущениях в завихренном потоке, а используя только решение задачи о возмущениях в потенциальном циркуляционном течении, которое определяет поток энергии ΔJ в соответствии с (4.4) и энергию E . Преимущества такого подхода особенно важны в задачах об устойчивости течений с более сложной структурой поля завихренности (например, вихревое кольцо).

Обратим внимание, что знак ΔJ определяется в (4.4) в зависимости от знака δ . В свою очередь знак δ в соответствии с (4.5) определяется соотношением знаков ΔJ и E . Это обстоятельство может приводить к двум существенно различным ситуациям (см. замечание после (3.6)).

В случае $E > 0$ уравнения (4.4) и (4.5) имеют два решения: с $\delta > 0$, $\Delta J > 0$ и $\delta < 0$, $\Delta J < 0$. Это означает, что при $E > 0$ появление критического слоя приводит к расщеплению собственной частоты на пару комплексно-сопряженных. Собственная частота с $\delta > 0$ соответствует неустойчивым колебаниям. Механизм этой неустойчивости аналогичен механизму неустойчивости Майлса для ветровых волн на воде [9, 10].

В случае $E < 0$ соотношение (4.5) несовместно с выражением (4.4) для потока энергии J ни для положительных, ни для отрицательных δ . Это означает, что собственные частоты дискретного спектра не находятся на физическом листе римановой поверхности функции $D(\omega)$ (1.8), а переходят на нефизический лист через разрез $0 < \omega < U_M$.

Используя результаты [4, 13], получим, что для собственных колебаний с $m = 1$ (вращение центра цилиндра вокруг положения равновесия) энергия E имеет вид

$$E = \frac{M}{2} [(\gamma + 1)\omega_{1,2}^2 + \omega_0^2] \xi_0^2$$

где $\omega_{1,2}$ – собственные частоты, определяемые из уравнения (1.11). Поскольку $E > 0$, система неустойчива. Неустойчивым становится колебание с частотой ω_1 , поскольку именно у него имеется критический слой. Из (4.4) и (4.5) в главном приближении получим

$$\delta = -\frac{\pi\gamma\omega_1(\omega_1 - U_M)^2 r_0 \Omega'_0(r_0)}{2U_M[(\gamma + 1)\omega_1^2 + \omega_0^2]} \quad (4.6)$$

С учетом (3.4) эта формула полностью совпадает с (3.6). Таким образом, предложенный энергетический метод позволяет не только понять механизм неустойчивости, но и получить точное выражение для инкремента.

Заключение. В работе рассмотрены два механизма неустойчивости кругового цилиндра в циркуляционном потоке. Первый механизм возникает при наличии монотонно убывающей завихренности в циркуляционном потоке около осциллятора и условно может быть отнесен к случаю взаимодействия нуля и разреза в дисперсионном

соотношении. Неустойчивость такого типа часто встречается в физике плазмы, а в гидродинамике аналогом такой неустойчивости может служить неустойчивость Майлса ветровых волн на воде и рассмотренная в работе неустойчивость колебаний цилиндра в потоке с убывающей завихренностью. В циркуляционном потоке физический механизм реализующей неустойчивости цилиндра легко понять на примере случая слабой завихренности. Если завихренность мала, нестационарные возмущения почти везде близки к возмущениям, имеющимся в случае потенциального обтекания, за исключением малой окрестности критического слоя. В окрестности критического слоя φ -компонента скорости резко меняется даже при малой завихренности среднего течения (тем сильнее, чем меньше комплексная добавка к частоте). Такая структура возмущенного течения позволяет локализовать в пространстве малую область, из которой черпается энергия. При этом для нарастающих колебаний (случай неустойчивости) поток энергии из окрестности критического слоя всегда положителен. Это означает, что неустойчивость указанного типа должна реализовываться всякий раз, когда колеблющийся осциллятор обладает положительной энергией и эти колебания сопровождаются появлением критических слоев. Только одновременное выполнение обоих условий приводит к неустойчивости.

Действительно, колеблющийся цилиндр может быть неустойчив, только если его масса больше массы вытесненной жидкости (тяжелый цилиндр). Легкий цилиндр не может иметь собственную частоту, при которой возникает критический слой, и для него неустойчивость отсутствует. Другим примером может служить вихрь Ранкина, в потенциальный поток вокруг которого внесена малая монотонно убывающая завихренность. В этом случае в качестве осцилляторов могут рассматриваться кельвиновские колебания границы вихря. Наличие завихренности в окружающем вихрь потоке хотя и приводит к появлению критических слоев, однако неустойчивости не вызывает, поскольку кельвиновские колебания являются колебаниями с отрицательной энергией [14]. Важным примером, в котором реализуются оба условия, является вихревое кольцо, в котором могут существовать моды с положительной энергией [8], одновременно обладающие критическим слоем.

Второй механизм неустойчивости возникает при наличии скачка завихренности, когда вихревой слой обладает собственными нейтральными колебаниями. В этом случае колебания вихревого слоя имеют отрицательную энергию, а колебания цилиндра – положительную. Если при некоторых параметрах задачи частоты колебаний, имеющие энергии разного знака, сливаются, то возникает неустойчивость. Механизм такой неустойчивости часто встречается в различных физических задачах (см., например, [18, § 6.4]) и условно может быть отнесен к случаю взаимодействия двух нулей в дисперсионном соотношении. Аналогом такой неустойчивости в гидродинамике является неустойчивость течения Куэтта между двумя массивными цилиндрами или ее более простая версия, рассмотренная в разд. 2.

Авторы выражают признательность С.Я. Герценштейну, Ю.Б. Лифшицу, А.Г. Петрову и В.М. Чернявскому за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00199).

ПРИЛОЖЕНИЕ

На полубесконечном интервале $1 < r < \infty$ рассмотрим уравнение

$$A'' + \frac{1}{r} A' - \frac{m^2}{r^2} A + \frac{\varepsilon g(r)}{r - r_c} A = 0, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (\text{П.1})$$

с граничными условиями

$$r = 1: A = 1, \quad r \rightarrow \infty: A \rightarrow 0$$

Здесь $g(r)$ – непрерывная функция, убывающая на бесконечности как $1/r^{2+\alpha}$, $\alpha > 0$, $r_c = r_0 + i\delta$, функция $g(r)$ может быть аналитически продолжена с действительной оси в точку r_c .

Покажем, что решение задачи (П.1) имеет вид

$$A = A_0(r)(1 + \epsilon f(r)) \quad (\text{П.2})$$

где $A_0(r) = 1/r^m$ решение уравнения (П.1) для случая $\epsilon = 0$, удовлетворяющее тем же граничным условиям, функция $f(r)$ на действительной оси всюду ограничена, а вблизи особой точки непрерывна и имеет вид

$$f(r) = g(r_c)(r - r_c) \ln(r - r_c)[1 + O(\epsilon)] + a(r) \quad (\text{П.3})$$

где $a(r)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Подставляя (П.2) в (П.1), получим

$$f'' - \frac{(2m-1)}{r} f' = -\frac{g(r)}{r-r_c} - \frac{\epsilon f}{r-r_c}$$

с граничными условиями

$$r = 1: f=0, \quad r \rightarrow \infty: r^{-m}f(r) \rightarrow 0$$

Будем искать функцию f в виде

$$f(r) = f_0(r) + \epsilon f_1(r) + \dots \quad (\text{П.4})$$

Тогда для нахождения функций $f_i(r)$ получим рекуррентную систему уравнений вида

$$\begin{aligned} f_0'' - \frac{(2m-1)}{r} f_0' &= -\frac{g(r)}{r-r_0} \\ f_1'' - \frac{2m-1}{r} f_1' &= -\frac{f_0 g}{r-r_0} \\ f_2'' - \frac{2m-1}{r} f_2' &= -\frac{f_1 g}{r-r_0}, \dots \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

где каждая функция удовлетворяет условиям

$$r = 1: f_i = 0, \quad r \rightarrow \infty: f_i r^{-m} \rightarrow 0$$

Решение каждого уравнения системы (П.5) может быть выписано точно. Рассмотрим первое уравнение. Легко проверить, что решение, удовлетворяющее граничному условию при $r = 1$, имеет вид

$$f_0(r) = \frac{1}{2m} \int_1^{\infty} \frac{g(r') dr'}{r'^{2m-1}(r'-r_c)} - \frac{r^{2m}}{2m} \int_r^{\infty} \frac{g(r') dr'}{r'^{2m-1}(r'-r_c)} - \frac{1}{2m} \int_1^r \frac{g(r') r' dr'}{r'-r_c} \quad (\text{П.6})$$

Прежде всего необходимо установить, удовлетворяет ли выписанное решение условию на бесконечности, далее необходимо определить поведение решения при конечных r , имея в виду возможность стремления $\delta \rightarrow 0$.

Покажем, что функция $f_0(r)$ ограничена при $r \rightarrow \infty$, и найдем ее вид вблизи особой точки r_c . Функция $f_0(r)$ состоит из трех слагаемых: J_1 , J_2 и J_3 . Рассмотрим сначала второе слагаемое J_2 в (П.6). При больших r , оставляя под интегралом только главный член, получаем $J_2 \sim 1/r^{1+\alpha}$, т.е. на бесконечности этот член мал. При конечных r разобьем область интегрирования от r до ∞ на два интеграла: от r до R , где R – конечная величина, заведомо больше r_0 , и от R до ∞ ; первый интеграл при этом регуляризуем, выделив явно особенность в r_c . Имеем

$$\begin{aligned} J_2 &= -\frac{g(r_c)}{2m} \frac{r^{2m}}{r_c^{2m-1}} \int_r^R \frac{dr'}{r'-r_c} - \frac{r^{2m}}{2m} \int_r^R \frac{G(r', r_c)}{r'-r_c} dr' - \frac{r^{2m}}{2m} \int_R^{\infty} \frac{g(r')}{r'^{2m-1}(r'-r_c)} dr' = \\ &= \frac{r_c}{2m} g(r_c) \left(\frac{r}{r_c} \right)^{2m} \ln(r - r_c) + a_1(r), \quad G = \frac{g(r')}{r'^{2m-1}} - \frac{g(r_c)}{r_c^{2m-1}} \end{aligned}$$

где $a_1(r)$ – непрерывно дифференцируемая функция в том числе и при $\delta \rightarrow 0$.

Рассмотрим третье слагаемое J_3 в (П.6). Представим его в виде

$$J_3 = -\frac{1}{2m} \int_1^r \frac{g(r')r'dr'}{r'-r_c} = -\frac{1}{2m} g(r_c)r_c \ln \frac{r-r_c}{r} \Big|_1^r - \frac{1}{2m} \int_1^r F(r')dr' \quad (\text{П.7})$$

$$F(r) = \frac{g(r)r - g(r_c)r_c}{r - r_c} + \frac{g(r_c)r_c}{r}$$

где $F(r)$ – непрерывная функция (в том числе и при $\delta \rightarrow 0$), не имеющая особенностей на пути интегрирования и убывающая на бесконечности как $1/r^2$. Интеграл от нее определяет непрерывно дифференцируемую функцию, ограниченную при всех $r \in [1, \infty)$. Первый член при $r \rightarrow \infty$ обращается в нуль на верхнем пределе и конечен при $r = 1$. Таким образом, слагаемое J_3 на бесконечности ограничено. При конечных r , используя (П.7), получим

$$J_3 = -\frac{1}{2m} g(r_c)r_c \ln(r - r_c) + a_2(r)$$

где $a_2(r)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Рассмотрим первое слагаемое J_1 в (П.6), являющееся интегралом типа Коши для бесконечного промежутка. Этот интеграл имеет конечный предел в том числе и на контуре интегрирования ($\delta \rightarrow 0$). Это легко установить непосредственно, воспользовавшись разложением типа (П.7) и устремив верхний предел к ∞ .

Суммируя результаты для J_1, J_2 и J_3 , получим, что функция $f_0(r)$ ограничена и непрерывна при всех $r \in [1, \infty)$, а вблизи любой конечной точки действительной оси может быть представлена в виде

$$f_0(r) = (1/2m)[(r/r_c)^{2m} - 1]g(r_c)r_c \ln(r - r_c) + a_3(r)$$

Используя разложение

$$\left(\frac{r}{r_c}\right)^{2m} = 1 + 2m \frac{r - r_c}{r_c} + \dots$$

получим окончательно

$$f_0(r) = g(r_c)(r - r_c) \ln(r - r_c) + a'_3(r) \quad (\text{П.8})$$

где a_3 и a'_3 – непрерывно дифференцируемые функции. Такое представление показывает, что $f_0(r)$ остается непрерывной и при $\delta \rightarrow 0$, однако первая производная в этом случае имеет логарифмическую особенность и решение испытывает скачок в мнимой части при переходе через точку $r = r_0$.

Подставляя f_0 в следующее уравнение системы (П.5), получим в правой части функцию $f_0 g$. Эта функция непрерывна в r_c , а ее поведение на бесконечности определяется функцией g , как и в первом уравнении. Некоторое отличие второго уравнения (и последующих) проявляется в точке $r = r_c$, поскольку функция $f_0 g / (r - r_c)$ помимо степенной имеет интегрируемую особенность вида $g(r_c)g(r) \ln(r - r_c)$, связанную с первым членом в (П.8). Однако это слагаемое дает непрерывно дифференцируемый вклад в решение f_1 вида $g^2(r_c)(r - r_c)^2 \ln(r - r_c)$, а суммарное решение будет

$$f_1(r) = a'_3(r_c)(r - r_c) \ln(r - r_c) + a_4(r)$$

где a_4 – непрерывно дифференцируемая функция. Очевидно, аналогичный результат получится для всех последующих f_i . Суммируя все результаты, получим (П.3).

Таким образом, процедура разложения (П.4) представляет собой равномерно пригодное разложение исходного уравнения (П.1), допускающее получение решения с любой точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kelvin, Tait P.G. Treatise on natural philosophy. Cambridge: Univ. Press, 1912. Pt. 1. 508 p.
2. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
3. Петров А.Г. Доказательство неустойчивости положения равновесия шара в потенциальном неоднородном потоке // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 6. С. 769–772.
4. Петров А.Г. Неустойчивость положения равновесия тяжелого шара в стационарном потенциальном неоднородном потоке // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 481–488.
5. Чернявский В.М., Штемлер Ю.М. Об устойчивости течения Куэтта между незакрепленными цилиндрами с учетом самогравитации // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 110–119.
6. Vladimirov V.A., Ilin K.I. On the stability of rigid body in rotational flow of an ideal incompressible fluid // Bull. Hong Kong Math. Soc. 1996. 1. P. 103–131.
7. Чернышев С.А. Неустойчивость упругого цилиндра в циркуляционном потоке // Колебания упругих конструкций с жидкостью: 7-й симпоз. Новосибирск: СибНИА, 1992. С. 179–186.
8. Копьев В.Ф., Чернышев С.А. Длинноволновая неустойчивость вихревого кольца // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 72–78.
9. Miles J.W. On the generation of surface waves by shear flows // J. Fluid Mech. 1957. V. 3. Pt. 2. P. 185–204.
10. Степанянец Ю.А., Фабрикант А.Л. Распространение волн в сдвиговых потоках. М.: Наука, 1996. 240 с.
11. Владимиров В.А. Устойчивость течения типа смерча // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1978. Вып. 37. С. 50–62.
12. Drazin P.G., Reid W.H. Hydrodynamic Stability. Cambridge: Univ. Press, 1981. 525 p.
13. Петров А.Г. Устойчивость цилиндрических вихрей // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1981. Вып. 53. С. 103–116.
14. Копьев В.Ф., Леонтьев Е.А. Акустическая неустойчивость плоских вихревых течений с круговыми линиями тока // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 475–480.
15. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
16. Данилов С.Д. Об акустической неустойчивости течений с круговыми линиями тока // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 6. С. 1059–1065.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
18. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.XII.1999