

УДК 532.526:533.6.011.72

© 2000 г.      Н.А. ОСТАПЕНКО

## К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ВОЛНОЛЕТОВ, ПОСТРОЕННЫХ НА ПЛОСКИХ УДАРНЫХ ВОЛНАХ

Рассмотрены постановки вариационных задач о несущих формах максимального аэродинамического качества для различных наборов изопериметрических условий. Решена задача с дифференциальной связью, ограничивающей снизу локальный угол наклона передней кромки волнолета и моделирующей либо максимальный тепловой поток на передней кромке, либо вклад нагрузки на переднюю кромку в какую-либо из составляющих аэродинамической силы. Представлены решения задачи об оптимальной форме волнолетов, построенных на плоских ударных волнах, при заданных коэффициенте подъемной силы и удельном объеме, как при отсутствии условий на габариты волнолетов, так и при их наличии.

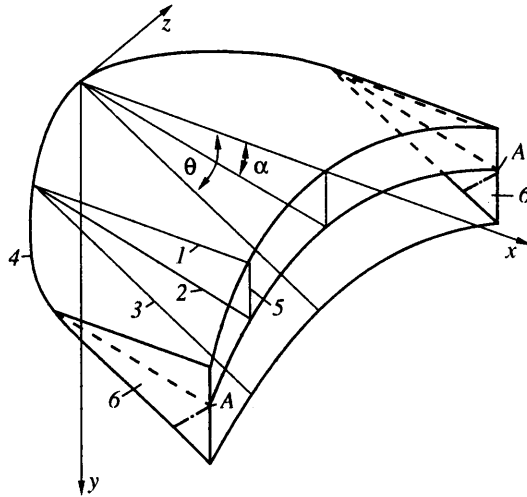
Современные исследования перспективных сверх- и гиперзвуковых летательных аппаратов с высоким аэродинамическим качеством свидетельствуют, что при их профилировании ведущей продолжает оставаться выдвинутая 40 лет назад идея построения несущих форм на поверхностях тока в известных газодинамических решениях (см. [1–8] и др.). Это обусловлено относительной простотой определения аэродинамических нагрузок на построенные в результате решения обратных задач летательные аппараты, получившие название волнолетов.

Однако до настоящего времени не существует определенной концепции построения нижней поверхности волнолета и его формы в плане даже при использовании течений за косыми скачками уплотнения. Такое состояние вопроса связано с фактическим отсутствием решений вариационных задач об оптимальной форме волнолета, обладающего максимальным аэродинамическим качеством при различных наборах изопериметрических условий в рамках апробированных моделей расчета аэродинамических характеристик.

Данные о волнолетах максимального аэродинамического качества получены либо при одном изопериметрическом условии [5], чего явно недостаточно для несущих форм, либо в классе традиционных форм в плане с введением необходимого числа произволов – точек излома контура, определяемых из системы изопериметрических условий, но без учета трения на поверхности [6], либо как результат параметрических расчетов аэродинамических характеристик волнолетов, построенных на плоских волнах, при степенной форме передней кромки [7, 8]. В последнем случае расчеты проведены без учета влияния трения на подъемную силу.

Решение соответствующих вариационных задач не только позволило бы получить ответ на вопрос об оптимальной форме волнолета в зависимости, например, от состояния пограничного слоя, но и определить, что особенно важно, превышение аэродинамического качества оптимального волнолета над его величиной у простейшего волнолета – V-образного крыла.

В работе приведены постановки различных вариационных задач при учете трения на поверхности волнолета в рамках модели [9] и различных наборах изопериметрических условий. Представлены решения задачи при заданных коэффициенте



Фиг. 1. Волнолет, построенный на плоской ударной волне – 3: 1, 2 – верхняя и нижняя поверхности волнолета, 4 – передняя кромка, 5 – донный срез, 6 – боковые шайбы,  $\alpha$ ,  $\theta$  – угол отклонения невозмущенного потока и отвечающий ему угол наклона косога скачка уплотнения

подъемной силы и удельном объеме, имеющей функционал наиболее общего вида из рассмотренных. Изучено влияние на решение вариационной задачи условия для локального угла стреловидности передней кромки волнолета, моделирующего ограничение либо теплового потока на передней кромке, либо вклада нагрузки на переднюю кромку в какую-либо из компонент аэродинамической силы.

Решения построены в отсутствие связей между формами передней и задней кромок волнолета, либо задания специальной формы одной из них. Таким образом, фактически получены сведения об абсолютном оптимальном волнолете максимального аэродинамического качества. Наложение специальных краевых условий на экстремаль, а также задание формы передней, либо задней кромок волнолета может привести только к снижению величины аэродинамического качества по сравнению с его значением у эквивалентного абсолютно оптимального волнолета.

**1. Геометрия волнолета, построенного на плоской ударной волне, и его аэродинамические характеристики.** Рассмотрим в прямоугольной системе координат  $x, y, z$  (фиг. 1) волнолет с плоскостью симметрии  $z = 0$ , образованный тремя цилиндрическими поверхностями. Верхняя поверхность 1 волнолета – поверхность тока невозмущенного потока. Нижняя поверхность 2 – поверхность тока течения за косым скачком уплотнения 3, составляющим угол  $\theta$  с направлением невозмущенного потока. Их общая направляющая – передняя кромка волнолета 4. Угол  $\alpha$  между образующими поверхностями 1 и 2, выходящими из одной точки передней кромки волнолета, – угол отклонения потока в косом скачке уплотнения 3. Третья цилиндрическая поверхность – донный срез волнолета 5 с образующими, перпендикулярными образующим верхней поверхности 1 волнолета в соответствующих плоскостях  $z = \text{const}$ .

В общем случае у волнолета имеются боковые шайбы 6 с передними кромками, расположенными на скачке уплотнения 3. Для простоты будем считать шайбы прямоугольными треугольниками, не "обрезая" их по входящим в точки А характеристикам (штрихпунктирные линии на фиг. 1) однородного потока за косым скачком уплотнения. Такое упрощение не носит принципиального характера и не приведет к качественным изменениям в излагаемых ниже результатах.

Будем считать все линейные размеры отнесенными к некоторому характерному размеру  $L$ . Цилиндрические поверхности  $1$  и  $5$  волнолета опишем соответственно функциями

$$y = f(z), \quad f(0) = 0, \quad x = g(z) \quad (1.1)$$

Введем длину образующей верхней поверхности волнолета:  $\eta(z)$ ,  $\eta(0) = g(0) = \eta_0$ . Поскольку передняя кромка волнолета  $4$  располагается в плоскости скачка уплотнения  $3$ :  $y = x \operatorname{tg} \theta$ , то имеет место соотношение

$$f(z) = \operatorname{tg} \theta [g(z) - \eta(z)] \quad (1.2)$$

Принимая во внимание (1.1), (1.2), выпишем выражения для площади волнолета в плане  $S_{pl}$ , площади его миделевого сечения  $S_M$  и объема  $V$

$$S_{pl} = 2L^2 \int_0^b \eta dz \equiv 2L^2 I_1, \quad S_M = S_{pl} \operatorname{tg} \alpha, \quad V = \operatorname{tg} \alpha L^3 \int_0^b \eta^2 dz \equiv \operatorname{tg} \alpha L^3 I_2 \quad (1.3)$$

Здесь  $b$  – безразмерный полуразмах волнолета.

Локальный коэффициент трения соответственно на верхней  $1$  и нижней  $2$  поверхностях волнолета (фиг. 1) определим выражениями [9]

$$c_{f1} = \frac{A_n}{\sqrt[4]{\operatorname{Re}_\infty} \sqrt[4]{l}} \equiv \frac{B_1}{\sqrt[4]{l}}, \quad l \in [0, \eta(z)] \quad (1.4)$$

$$c_{f2} = \frac{q_1}{q_\infty} \frac{A_n}{\sqrt[4]{\operatorname{Re}_1} \sqrt[4]{l \cos \alpha}} \equiv \frac{B_2}{\sqrt[4]{l \cos \alpha}}, \quad l \in [0, \zeta], \quad \zeta = \frac{\eta(z)}{\cos \alpha} \quad (1.5)$$

$$\operatorname{Re}_1 = \frac{\operatorname{Re}_\infty u_1}{\cos \alpha u_\infty} \left( \frac{\rho_1}{\rho_\infty} \right)^{1+\omega} \left( \frac{p_1}{p_\infty} \right)^{-\omega}, \quad A_2 = 0,664 \left( 0,45 + 0,55 \frac{T_w}{T} + 0,09 \sqrt{\operatorname{Pr}} (\kappa - 1) M^2 \right)^{1/2(\omega-1)}$$

$$A_5 = 0,058 \left( \frac{T_w}{T_r} \right)^{-0,27} (1 + 0,5 \sqrt[3]{\operatorname{Pr}} (\kappa - 1) M^2)^{-0,55}$$

Здесь  $\operatorname{Re}_\infty$  и  $\operatorname{Re}_1$  – числа Рейнольдса, вычисленные соответственно по параметрам невозмущенного потока, длине  $L$  и по параметрам за косым скачком уплотнения.  $q_\infty$ ,  $q_1$  – скоростной напор газа в невозмущенном потоке и за скачком уплотнения;  $l$  – безразмерная длина линии тока в невязком течении, отсчитываемая от передней кромки волнолета  $4$  вдоль его верхней (1.4) и нижней (1.5) образующих;  $n = 2$  или  $5$  в случае ламинарного или турбулентного пограничного слоя.  $\operatorname{Pr}$ ,  $\kappa$  и  $\omega$  – число Прандтля, отношение удельных теплоемкостей газа и показатель степени в зависимости вязкости от температуры;  $M$  – число Маха, принимаемое равным  $M_\infty$  при вычислении  $c_{f1}$  и  $M_1$  при вычислении  $c_{f2}$ ;  $T_w$ ,  $T$  и  $T_r$  – температура стенки, статическая температура в потоке на внешней границе пограничного слоя и температура восстановления, определяемая при ламинарном и турбулентном состояниях пограничного слоя по формулам

$$T_r / T = [1 + \sqrt{\operatorname{Pr}} (\kappa - 1) M^2 / 2], \quad T_r / T = [1 + \sqrt[3]{\operatorname{Pr}} (\kappa - 1) M^2 / 2]$$

С использованием (1.4), (1.5) найдем силы трения, действующие на поверхностях  $1$  и  $2$  волнолета (фиг. 1) в направлении скорости соответствующих потоков

$$\frac{F_{f1}}{q_\infty L^2} = 2 \int_0^b \int_0^\eta c_{f1} \Phi_1 dldz \equiv \frac{2B_1}{(1-m)} I_3, \quad I_3 = \int_0^b \eta^{1-m} \Phi_1 dz, \quad \Phi_1 = \sqrt{1+f'^2} \quad (1.6)$$

$$\frac{F_{f2}}{q_\infty L^2} = 2 \int_0^b \int_0^\zeta c_{f2} \Phi_2 dldz \equiv \frac{2B_2}{(1-m) \cos \alpha} I_4, \quad I_4 = \int_0^b \eta^{1-m} \Phi_2 dz \quad (1.7)$$

$$\Phi_2 = \sqrt{1 + k^2 f'^2}, \quad k = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} < 1, \quad m = \frac{1}{n}$$

Здесь штрих означает дифференцирование функции  $f(z)$  по аргументу.

Принимая во внимание, что на внешней и на внутренней поверхностях боковых шайб волнолета  $b$  (фиг. 1) локальный коэффициент трения определяется соответственно выражениями (1.4) и (1.5), выпишем формулы для сил трения  $F_{f0}$  и  $F_{f1}$ , действующих на указанных сторонах шайб в том же направлении, что и силы  $F_{f1}$  (1.6) и  $F_{f2}$  (1.7)

$$\frac{F_{f0}}{q_\infty L^2} = \frac{2B_1 \operatorname{tg} \alpha}{(1-m)(2-m)} \eta_b^{2-m}, \quad \eta_b = \eta(b) \quad (1.8)$$

$$\frac{F_{f1}}{q_\infty L^2} = \frac{2B_2}{(1-m)(2-m)} \frac{k \operatorname{tg} \theta}{\cos \alpha} \eta_b^{2-m} \quad (1.9)$$

С использованием (1.3), (1.6)–(1.9) соотношения для силы сопротивления  $F_x$  и подъемной силы  $F_y$  волнолета представим в форме

$$\frac{F_x}{2q_\infty L^2} = (c_p + c_b) \operatorname{tg} \alpha I_1 + \frac{1}{(1-m)} [B_1 I_3 + B_2 I_4 + \frac{1}{(2-m)} \operatorname{tg} \theta (B_1 + kB_2) \eta_b^{2-m}] \quad (1.10)$$

$$\frac{F_y}{2q_\infty L^2} = c_p I_1 - \frac{1}{(1-m)} B_2 \operatorname{tg} \alpha \left[ I_4 + \frac{1}{(2-m)} k \operatorname{tg} \theta \eta_b^{2-m} \right] \quad (1.11)$$

Здесь  $c_p = c_p(\alpha, M_\infty, \kappa)$  – коэффициент давления за присоединенным скачком на клине с углом  $\alpha$ , обтекаемым потоком с числом Маха  $M_\infty$ ;  $c_b$  – коэффициент донного давления.

**2. Постановки вариационных задач.** Вариационные задачи, которые сформулированы ниже, относятся к задаче о максимуме аэродинамического качества летательного аппарата (волнолета) с наиболее характерными для несущих форм изопериметрическими условиями.

*Задача 1.* Пусть заданы подъемная сила  $F_y$  (1.11) (сила сопротивления  $F_x$  (1.10)) и объем  $V$  (1.3) волнолета.

Равенство нулю первой вариации аэродинамического качества  $K$  запишем в виде

$$\delta K \equiv -\frac{K}{F_x} \delta F_x = 0 \quad \left( \delta K \equiv \frac{1}{F_x} \delta F_y = 0 \right) \quad (2.1)$$

Так как на множестве допустимых функций, определяющих форму волнолета,  $\delta F_y = 0$  ( $\delta F_x = 0$ ) и  $\delta V = 0$ , то необходимое условие экстремума (2.1) эквивалентно условию

$$-\delta F_x - \lambda_y \delta F_y - \lambda_v \delta V = 0 \quad (\delta F_y + \lambda_x \delta F_x + \lambda_v \delta V = 0) \quad (2.2)$$

Здесь  $\lambda_y$  ( $\lambda_x$ ) и  $\lambda_v$  – неопределенные постоянные множители Лагранжа.

Максимизируемый функционал и его основная функция, согласно (2.2), находятся непосредственно из соотношения

$$-\delta(F_x + \lambda_y F_y + \lambda_v V) = 0 \quad (\delta(F_y + \lambda_x F_x + \lambda_v V) = 0) \quad (2.3)$$

Необходимое условие максимума имеет вид

$$-\delta^2(F_x + \lambda_y F_y + \lambda_v V) \leq 0 \quad (\delta^2(F_y + \lambda_x F_x + \lambda_v V) \leq 0) \quad (2.4)$$

Как следует из (2.3), (2.4), в результате деления соответствующих необходимых условий экстремума на  $\lambda_x$  решение вариационной задачи с заданной силой сопротивления становится решением задачи с заданной подъемной силой.

**Задача 2.** Пусть заданы коэффициент подъемной силы  $C_y = F_y/(q_\infty S_{pl})$  и удельный объем волнолета  $\tau = V/(S_{pl})^{3/2}$ .

Равенство нулю первой вариации аэродинамического качества запишем в виде

$$\delta K \equiv \text{ctg } \alpha \delta \frac{C_y}{C_x} = -\text{ctg } \alpha \frac{K}{C_x} \delta C_x = 0, \quad C_x = \frac{F_x}{q_\infty S_M} \quad (2.5)$$

Угол отклонения потока  $\alpha = \text{const}$  принят в качестве параметра задачи. Поэтому равенство (2.5) с учетом (1.3) может быть переписано в форме

$$F_x \delta S_{pl} - S_{pl} \delta F_x = 0 \quad (2.6)$$

Так как на множестве допустимых функций  $\delta C_y = 0$  и  $\delta \tau = 0$ , то, используя выражения для  $C_y$  и  $\tau$ , получим

$$F_x \delta S_{pl} - S_{pl} \delta F_x + \lambda_c (S_{pl} \delta F_y - F_y \delta S_{pl}) + \lambda_\tau (S_{pl} \delta V - 3/2 V \delta S_{pl}) = 0 \quad (2.7)$$

Здесь  $\lambda_c$  и  $\lambda_\tau$  – неопределенные постоянные множители Лагранжа.

Согласно (2.7), максимизируемый функционал и его основная функция определяются из соотношения

$$\delta [a S_{pl} - (F_x - \lambda_c F_y) + \lambda_\tau V] = 0, \quad a = \frac{(F_x - \lambda_c F_y) - 3/2 \lambda_\tau V}{S_{pl}} \quad (2.8)$$

Здесь  $a$  – неварьируемый коэффициент.

Необходимое условие максимума имеет вид

$$\delta^2 [a S_{pl} - (F_x - \lambda_c F_y) + \lambda_\tau V] \leq 0 \quad (2.9)$$

По аналогии могут быть выписаны необходимые условия экстремума для соответствующих функционалов при других комбинациях изопериметрических условий в задаче на максимум аэродинамического качества волнолета, в том числе при наличии дифференциальных условий в виде неравенств.

**3. Постановка вариационной задачи при наличии ограничения по тепловому потоку на передней кромке. Необходимые условия экстремума.** Целью исследования является установление принципиальных качественных изменений в форме оптимального волнолета при наложении ограничения на величину теплового потока на передней кромке. Определяющие соотношения, полученные ниже, могут быть легко дополнены зависимостями входящих в них величин от газодинамических параметров с использованием результатов работ, специально посвященных расчету тепловых потоков на скользящей передней кромке (например, [10]).

Ограничение теплового потока на передней кромке волнолета подразумевает наличие характерного размера  $r$  – радиуса затупления передней кромки. Так как используемая модель расчета аэродинамических характеристик волнолета базируется на представлении об острой передней кромке, то необходимо выписать оценку, определяющую, при каком соотношении  $r$  и характерного размера задачи формулы для аэродинамических сил можно считать справедливыми.

Будем считать, что величина полного сопротивления волнолета имеет порядок величины его волновой составляющей, т.е., согласно (1.3), (1.10)

$$F_x \sim (c_p + c_b) \text{tg } \alpha S_{pl} q_\infty, \quad S_{pl} \sim 2b\eta_0 L^2 \quad (3.1)$$

Волновое сопротивление затупленной передней кромки волнолета  $F_e$  при больших сверхзвуковых скоростях (по формуле Ньютона) с точностью до несущественного множителя равно

$$F_e \sim 2c_{p0} \sin \beta_e b r L q_\infty, \quad \text{tg}^2 \beta_e \equiv \text{ctg}^2 \varphi_e = \text{tg}^2 \theta (1 + 1/f'^2) \quad (3.2)$$

Здесь  $c_{p0}$  – коэффициент давления в точке торможения невозмущенного сверхзвукового потока за прямым скачком уплотнения,  $\varphi_e$  – локальный угол стреловидности передней кромки, принятый в данной формуле некоторым осредненным по длине кромки, как и соответствующее значение  $f'$ .

Сравнивая  $F_x$  (3.1) и  $F_e$  (3.2), найдем условие, при выполнении которого вкладом сопротивления затупленной передней кромки в полное сопротивление волнолета можно пренебречь

$$\frac{r}{\eta_0 L} \sin \beta_e \ll \frac{(c_p + c_b)}{c_{p0}} \operatorname{tg} \alpha \quad (3.3)$$

Если вклад, равный по порядку величины  $F_e$ , вносится и в подъемную силу волнолета (1.11), то его влияние на  $F_y$  будет пренебрежимо мало при

$$\frac{r}{\eta_0 L} \sin \beta_e \ll \frac{c_p}{c_{p0}} \quad (3.4)$$

При больших сверхзвуковых скоростях условие (3.3) более сильное, чем (3.4). Его выполнения достаточно для правомочности использования модели аэродинамических сил волнолета (1.10), (1.11).

Условие малости затупления передней кромки волнолета может быть еще более усилено, если потребовать, чтобы его вклад в полное сопротивление волнолета по порядку величины был меньше, чем сопротивление сил трения, которое, как правило, составляет меньшую долю полного сопротивления. В отсутствие боковых шайб и с учетом того, что  $I_4/I_1 \sim I_3/I_1 \sim 1$  ((1.3), (1.6), (1.7)), соответствующее условие примет вид

$$\frac{r}{\eta_0 L} \sin \beta_e \ll \frac{(B_1 + B_2)}{(1 - m)c_{p0}}$$

Будем считать, что условие на величину затупления передней кромки волнолета выполнено и соотношения (1.10), (1.11) справедливы.

Если при этом, например, превышено число Маха  $M_l$  невозмущенного потока, при котором реализуется предельно допустимый тепловой поток на передней кромке с нулевой стреловидностью, то необходимо вводить условие, ограничивающее этот тепловой поток. Поскольку тепловой поток на кромке является монотонно убывающей функцией угла стреловидности крыла [10], то, предполагая это свойство имеющим место и в рассматриваемом случае у волнолета, вдоль передней кромки которого меняется угол  $\varphi_e$  (3.2), условие ограниченности теплового потока запишем в форме  $\operatorname{ctg}^2 \varphi_e \leq k_1^2$ ,  $M_\infty > M_l$  или с учетом (3.2) в виде

$$f'^2 \geq k_2^2 \equiv \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{k_1^2 - \operatorname{tg}^2 \theta}, \quad k_1^2 > \operatorname{tg}^2 \theta \quad (3.5)$$

В соответствии с (3.5) ограничимся случаем прямой стреловидности передней кромки волнолета:  $f' \geq k_2 > 0$  ( $z > 0$ ). Введем функцию  $\beta(z)$ , удовлетворяющую дифференциальной связи

$$f' - k_2 - \beta^2 = 0 \quad (3.6)$$

Источником появления дифференциальной связи (3.6) может быть не только ограничение теплового потока на передней кромке волнолета, но и требования, накладываемые на относительную величину влияния затупления передней кромки на аэродинамические характеристики волнолета, например условия типа (3.3) и (3.4), если соотношение  $r/(\eta_0 L)$  определено.

Рассмотрим вариационную задачу 2, имеющую более сложный функционал (2.8).

Принимая во внимание (1.3), (1.10), (1.11) и (3.6), максимизируемый функционал запишем в форме

$$I = \int_0^b F(\eta, f', \lambda_1, \lambda_2, \lambda, \beta) dz - Q(\eta_b, \lambda_1) \quad (3.7)$$

$$F(\eta, f', \lambda_1, \lambda_2, \lambda, \beta) = a_1 \eta + \lambda_2 \eta^2 - \eta^{1-m} R(f') + \lambda(z)(f' - k_2 - \beta^2)$$

$$R(f') = \Phi_1 + \lambda_1 \Phi_2, \quad a_1 = \frac{(1-m)}{B_1} \left[ \frac{a}{q_\infty} - (c_p + c_b) \operatorname{tg} \alpha + \lambda_c c_p \right]$$

$$\lambda_1 = \frac{B_2}{B_1} (1 + \lambda_c \operatorname{tg} \alpha), \quad \lambda_2 = \frac{(1-m) \operatorname{tg} \alpha L}{2 q_\infty B_1} \lambda_\tau$$

$$Q(\eta_b, \lambda_1) = \frac{\operatorname{tg} \theta}{(2-m)} (1 + \lambda_1 k) \eta_b^{2-m}$$

В (3.7)  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – новые неопределенные постоянные множители Лагранжа, связанные по соответствующим формулам с введенными в разд. 2  $\lambda_c$  и  $\lambda_\tau$ ;  $\lambda(z)$  – неопределенный переменный множитель Лагранжа. Неварьируемый коэффициент  $a_1$  в (3.7) с использованием (1.3), (1.10), (1.11) и (2.8) может быть записан в форме

$$a_1 = \{I_3 + \lambda_1 I_4 - 3/2 \lambda_2 I_2 + Q(\eta_b, \lambda_1)\} / I_1 \quad (3.8)$$

Функция  $R(f')$  (3.7) четная, а ее первая и вторая производные имеют вид

$$R_{f'} = f' \left( \frac{1}{\Phi_1} + k^2 \frac{\lambda_1}{\Phi_2} \right), \quad R_{f'f'} = \frac{1}{\Phi_1^3} + k^2 \frac{\lambda_1}{\Phi_2^3} \quad (3.9)$$

Основная функция  $F$  в (3.7) зависит от функций  $\eta(z)$  и  $f(z)$ , описывающих соответственно длину образующих и форму верхней цилиндрической поверхности волнолета. Функции  $\eta(z)$ ,  $f(z)$  и функция  $x = g(z)$ , описывающая форму донного среза волнолета, связаны соотношением (1.2).

Рассмотрим задачу, когда форма задней кромки волнолета в плане  $g(z)$  не задана, т.е. функции  $\eta(z)$  и  $f(z)$ , а также их вариации являются независимыми. Такая постановка задачи естественна, так как любые условия, накладываемые на  $g(z)$  (или задание  $g(z)$ ) и обусловленные какими-либо соображениями, не связанными с "поддержкой" газодинамической модели течения, сужают класс допустимых функций  $\eta(z)$ ,  $f(z)$ . Следовательно, уменьшается аэродинамическое качество соответствующих волнолетов оптимальной формы по сравнению с его величиной у волнолета, имеющего абсолютно оптимальную форму, построенную без дополнительных ограничений при тех же изопериметрических условиях.

Сформулируем вариационную задачу. Среди непрерывных функций  $\eta(z)$ ,  $f(z)$  и  $\beta(z)$ , удовлетворяющих изопериметрическим условиям

$$C_y = \text{const}, \quad \tau = \text{const} \quad (3.10)$$

и дифференциальной связи (3.6), найти те, которые доставляют максимум функционалу  $I$  (3.7).

Уравнения Эйлера для функций  $\eta(z)$  и  $f(z)$ , условия Лежандра и условие трансверсальности в соответствии с видом основной функции  $F$  (3.7) имеют форму

$$F_\eta = 0, \quad \frac{d}{dz}(F_{f'}) = 0, \quad F_{\eta\eta} \leq 0, \quad F_{f'f'} \leq 0 \quad (3.11)$$

$$[(F - f'F_{f'})\delta z + F_{f'}\delta f]_0^b - Q'(\eta_b)\delta\eta_b = 0 \quad (3.12)$$

В (3.12)  $Q'(\eta_b)$  – производная функции  $Q$  по аргументу  $\eta_b$ . В развернутом виде с учетом выражений (3.7), (3.9) соотношения (3.11) запишутся в форме

$$a_1 + 2\lambda_2\eta - (1-m)\eta^{-m}R(f') = 0, \quad \eta^{1-m}R_{f'} - \lambda = \text{const} \quad (3.13)$$

$$2\lambda_2 + m(1-m)\eta^{-(1+m)}R(f') \leq 0, \quad R_{ff'} \geq 0 \quad (3.14)$$

К необходимым условиям экстремума (3.12)–(3.14), обусловленным независимыми функциями  $\eta(z)$  и  $f(z)$ , следует присоединить уравнение Эйлера и условие Лежандра для функции  $\beta$

$$\lambda\beta = 0, \quad \lambda \geq 0 \quad (3.15)$$

В соответствии с видом основной функции (3.7) имеет место первый интеграл уравнений Эйлера

$$F - f'F_{f'} \equiv a_1\eta + \lambda_2\eta^2 - \eta^{1-m} \left( \frac{1}{\Phi_1} + \frac{\lambda_1}{\Phi_2} \right) - \lambda k_2 = C \quad (3.16)$$

Здесь  $C$  – произвольная постоянная.

Первое уравнение (3.15) имеет два решения:  $\lambda \equiv 0$  и  $\beta \equiv 0$ . Функции  $\eta(z)$  и  $f(z)$ , отвечающие решению  $\lambda \equiv 0$ , назовем регулярной дугой экстремали. Второму решению, согласно дифференциальной связи (3.6), отвечает уравнение  $f' = k_2$  – дуга постоянного наклона.

Интеграл уравнения Эйлера для функции  $f$  (3.11) вдоль регулярной дуги и дуги постоянного наклона соответственно запишем в форме

$$\eta^{1-m}R_{f'} = C_1 \quad (3.17)$$

$$\eta^{1-m}R_{f'} - \lambda = C_2 \quad (3.18)$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные.

**4. Форма волнолета максимального аэродинамического качества при заданных  $C_x$ ,  $\tau$  и отсутствии условий на габариты.** Рассмотрим некоторые общие свойства экстремали волнолета.

*Лемма 1.* Передняя кромка оптимального волнолета не имеет точек излома.

Доказательство леммы проведем для двух случаев.

В первом передняя кромка является регулярной дугой экстремали ( $\lambda = 0$ ).

Если предположить, что передняя кромка имеет точки излома, то в них должно выполняться условие Вейерштрасса – Эрдмана

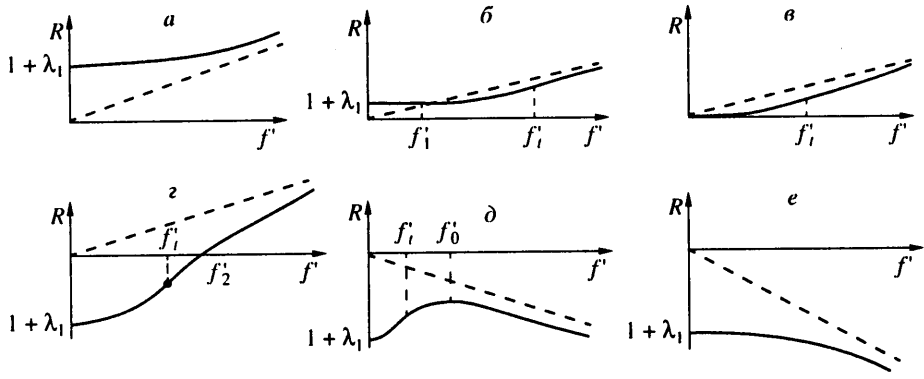
$$\Delta[F - f'F_{f'}]\delta z + \Delta[F_{f'}]\delta f = 0 \quad (4.1)$$

В (4.1)  $\Delta[\dots]$  обозначает разность значений величины, стоящей в квадратных скобках, справа и слева от точки излома. Так как вариации  $\delta z$  и  $\delta f$  произвольны, то из (4.1) следует, что постоянная  $C$  первого интеграла (3.16) одинакова на всех дугах экстремали, стыкующихся в точках излома ( $\Delta[C] = 0$ ). Поскольку в точках излома  $\Delta[\eta] = 0$ , так как наличие разрывов первого рода у формы задней кромки, определяемой линейной комбинацией функций  $\eta(z)$  и  $f(z)$  (1.2), привело бы к появлению на задней кромке волнолета участков взаимного влияния и нарушению модели расчета аэродинамических сил, то из соотношений  $\Delta[C] = 0$  и  $\Delta[F_{f'}] = 0$  с использованием выражения для  $F$  (3.7) найдем

$$\Delta[R - f'R_{f'}] = 0, \quad \Delta[R_{f'}] = 0 \quad (4.2)$$

Рассмотрим график функции  $R(f')$  (3.7) в зависимости от параметров  $\lambda_1$  и  $k$  (1.7). На фиг. 2 качественно изображен график  $R(f')$  для  $f' \geq 0$ , так как функция  $R(f')$  – четная.





Фиг. 2. График функции  $R(f')$  в различных областях изменения параметров  $k$  и  $\lambda_1$ : штриховая линия – асимптота;  $f'_1$  – точка пересечения кривой  $R(f')$  с асимптотой;  $f'_1$ ,  $f'_0$ ,  $f'_2$  – точки перегиба, максимума и нуля функции

При  $\lambda_1 > -k$  (фиг. 2, а) кривая всюду имеет положительную кривизну и асимптоту  $(1 + \lambda_1 k)^{f'}$  в правой полуплоскости (штриховая прямая). При  $-1 < \lambda_1 < -k$  (фиг. 2, б) кривая пересекается со своей асимптотой в точке  $f'_1$  и имеет точку перегиба  $f'_1$

$$f_1'^2 = \frac{(1 - \lambda_1^2)^2}{4\lambda_1(\lambda_1 + k)(1 + \lambda_1 k)}, \quad f_1'^2 = \frac{1 - (\lambda_1 k^2)^{2/3}}{(\lambda_1 k^2)^{2/3} - k^2}$$

При  $\lambda_1 = -1$  (фиг. 2, в) кривая  $R(f')$  проходит через начало координат. При  $-k^{-1} < \lambda_1 < -1$  (фиг. 2, г) кривая пересекает ось абсцисс в точке  $f_2'^2 = (\lambda_1^2 - 1)/(1 - \lambda_1^2 k^2)$ . При  $-k^{-2} < \lambda_1 < -k^{-1}$  (фиг. 2, д) асимптота приобретает отрицательный наклон, а кривая – максимум в точке  $f_0'^2 = [1 - (\lambda_1 k^2)^2]/[(\lambda_1 k^2)^2 - k^2]$ . При  $\lambda_1 < -k^{-2}$  (фиг. 2, е) точки перегиба и максимума исчезают и кривая всюду имеет отрицательную кривизну.

Предположим, что существуют  $f'_+$  и  $f'_-$  – справа и слева от точки излома функции  $R(f')$  (причем  $f'_+ \neq f'_-$ ), удовлетворяющие условиям (4.2). Из (4.2) найдем соотношение

$$R(f'_+) = R(f'_-) + R_{f'}(f'_-)(f'_+ - f'_-) \quad (4.3)$$

геометрический смысл которого с учетом второго условия из (4.2) указывает на необходимость существования общей касательной к кривой  $R(f')$  в точках  $f'_+$  и  $f'_-$ . Согласно условию Лежандра (второе неравенство в (3.14)), в точках касания кривая  $R(f')$  должна иметь положительную кривизну. Однако возможные формы кривой  $R(f')$  (фиг. 2) не допускают существования указанной касательной с соответствующими свойствами кривой  $R(f')$  в точках касания, даже при расширении области изменения  $f'$  на всю действительную ось.

Таким образом, предположение о наличии у регулярной дуги экстремали  $f(z)$  точки излома ( $f'_+ \neq f'_-$ ) неверно. Первое утверждение доказано.

Во втором случае покажем, что регулярная дуга  $f(z)$  и дуга постоянного наклона  $f' = k_2$ , если они существуют в составе экстремали, стыкуются без излома, причем скачок управляющей функции  $\lambda(z)$  в точке сопряжения равен нулю.

Если предположить наличие точки излома у передней кромки оптимального волнолета, в которой стыкуются регулярная дуга и дуга постоянного наклона, то в ней по-прежнему справедливо условие (4.1). Так как вариации  $\delta z$  и  $\delta f$  произвольны, то из (4.1) следует, что постоянная  $C$  в (3.16) одинакова на дугах экстремали, стыкующихся в точке излома, а также одинаковы константы  $C_1$  и  $C_2$  в интегралах (3.17), (3.18).

Используя соотношения (3.16),  $\Delta[C] = 0$  и  $\Delta[F_{f'}] = 0$ , найдем

$$F(k_2) = F(f'_c) + F_{f'}(f'_c)(k_2 - f'_c) \quad (4.4)$$

Здесь  $f'_c$  – производная функции  $f(z)$ , описывающей регулярную дугу передней кромки оптимального волнолета, в точке сопряжения с дугой постоянного наклона.

Поскольку разрывы первого рода в форме задней кромки недопустимы, то в точке излома  $\Delta[\eta] = 0$ . Так как, кроме того, вдоль экстремали  $\lambda(z) (f' - k_2 - \beta^2) = 0$ , то из соотношения (4.4) при  $\eta \neq 0$  (противное не имеет смысла, за исключением, быть может, конечных точек  $z = \pm b$ ) получим равенство

$$R(k_2) = R(f'_c) + R_{f'}(f'_c)(k_2 - f'_c) \quad (4.5)$$

в котором  $f'_c \geq k_2$ . Последнее неравенство в соответствии со вторым условием Лежандра (3.14) исключает существование регулярной дуги при  $k_2^2 > f'_c{}^2$ , где  $f'_c$  – точка перегиба кривой  $R(f')$ , существующая при  $-1/k^2 < \lambda_1 < -k$  (фиг. 2, б – д).

Если  $k_2^2 < f'_c{}^2$  при  $-1/k^2 < \lambda_1 < -k$ , либо  $\lambda_1 > -k$  (фиг. 2, а), то, согласно геометрическому смыслу равенства (4.5), касательная к кривой  $R(f')$  в точке  $f'_c$ , где  $R_{ff'} \geq 0$  (3.14), может прийти на ту же кривую в точке  $k_2$  только в случае  $f'_c = k_2$ . Другими словами, если в составе экстремали имеют место регулярная дуга и дуга постоянного наклона, то они стыкуются без излома, а, значит, передняя кромка – гладкая кривая.

В соответствии с принятым выше условием  $f' \geq k_2 > 0$  полученный результат относится к передней кромке волнолета по одну сторону от его плоскости симметрии. Таким образом, при  $k_2 > 0$  точка излома передней кромки оптимального волнолета будет существовать в точке  $z = 0$ .

Поскольку  $f'_c = k_2$ , а также  $C_1 = C_2$  и  $\Delta[\eta] = 0$ , то из интегралов (3.17), (3.18) следует, что  $\Delta[\lambda] = 0$ , т.е.  $\lambda(z_c) = 0$  ( $z_c$  – точка предполагаемой стыковки дуги постоянного наклона и регулярной дуги). Второе утверждение доказано.

Доказанная лемма верна и при заданной форме задней кромки  $g(z)$ . Несмотря на то, что функции  $f(z)$  и  $\eta(z)$  в этом случае зависимы (1.2), соотношения (3.16), (4.1) – (4.5) и проведенный анализ остаются справедливыми. Различие состоит лишь в том, что отсутствие скачка множителя Лагранжа  $\lambda(z)$  в точке сопряжения регулярной дуги и дуги постоянного наклона следует доказывать с использованием первого интеграла (3.16), а не соотношений (3.17), (3.18), как это было сделано выше.

*Лемма 2.* Длина образующих  $\eta(z)$  верхней цилиндрической поверхности  $l$  (фиг. 1) оптимального волнолета с началами на части передней кромки – дуге краевого экстремума (дуге постоянного наклона) не меньше длины образующей  $\eta_c$ , начинающейся в точке сопряжения регулярной дуги и дуги постоянного наклона, если она существует.

Согласно доказательству леммы  $l$  при независимых функциях  $f(z)$  и  $\eta(z)$  константы  $C_1$  и  $C_2$  в интегралах (3.17) и (3.18) равны и определяются по формуле

$$C_1 = C_2 = \eta_c^{1-m} R_{f'}(k_2) \quad (4.6)$$

С использованием (3.18) и (4.6) найдем выражение для  $\lambda(z)$

$$\lambda(z) = R_{f'}(k_2) (\eta^{1-m} - \eta_c^{1-m}) \quad (4.7)$$

Функция  $\lambda(z)$  должна удовлетворять условию Лежандра (3.15). Так как в области, где осуществляется сопряжение регулярной дуги и дуги постоянного наклона,  $R_{ff'} \geq 0$  (3.14) и, следовательно,  $R_{f'}(k_2) > 0$  (фиг. 2, а – д), согласно (3.15), (4.7), необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $\eta \geq \eta_c$ .

Таким образом, множитель Лагранжа  $\lambda(z)$  управляет формой задней кромки оптимального волнолета, расположенной позади участка передней кромки – дуги краевого экстремума, в случае, когда функции  $f(z)$  и  $\eta(z)$  являются независимыми. Лемма 2 доказана.

*Теорема.* Абсолютно оптимальным волнолетом на плоских ударных волнах при наличии ограничения по тепловому потоку (3.5) на передней кромке и в отсутствие каких-либо условий на форму задней кромки является V-образное крыло без боковых шайб с произвольной формой задней кромки без участков взаимного влияния.

Предположим, что экстремаль  $f(z)$  абсолютно оптимального волнолета состоит только из регулярной дуги. В этом случае, согласно уравнению Эйлера для функции  $\eta(z)$  (3.13) и интегралу уравнения Эйлера для функции  $f(z)$  (3.17), существуют две возможности. Либо экстремалью является пара значений  $\eta = \text{const}$  и  $f' = \text{const}$ , либо  $f' = \text{const}$  и  $\eta(z)$  – произвольная непостоянная функция при  $C_1 = R_{f'} = R = \lambda_2 = a_1 = 0$ . Рассмотрим эти возможности, привлекая условие трансверсальности (3.12).

Поскольку обсуждается форма оптимального волнолета в отсутствие каких-либо ограничений на его габариты, вариации  $\delta b$ ,  $\delta f(b)$  и  $\delta \eta_b$  являются произвольными и из условия (3.12) следует:  $C = C_1 = Q'(\eta_b) = 0$ . В случае  $\eta = \text{const}$ , не рассматривая все выписанные условия, обратимся ко второму из них:  $C_1 = 0$ . Из уравнения (3.17) найдем:  $R_{f'} = 0$ . Это равенство, согласно второму из условий Лежандра (3.14) и фиг. 2, может быть удовлетворено лишь при  $f' = 0$ , что противоречит введенному выше ограничению  $f' \geq k_2 > 0$ .

В случае, когда  $\eta(z)$  – произвольная функция, условие  $C_1 = 0$ , имеющее здесь место независимо от условия трансверсальности, также приводит к равенству  $R_{f'} = 0$  и его решению  $f' = 0$ , не удовлетворяющему условию, ограничивающему тепловой поток на передней кромке. Значит, исходное предположение о том, что экстремаль состоит только из регулярной дуги, – неверно.

Предположим, что экстремаль  $f(z)$  состоит из дуги постоянного наклона и регулярной дуги. Какой бы из дуг ни заканчивалась экстремаль в точке  $z = b$ , условие трансверсальности (3.12) и лемма 1 приводят к соотношениям  $C_1 = C_2 = 0$ . Отбрасывая не имеющее смысла решение уравнения (3.17)  $\eta \equiv 0$ , опять придем к равенству  $R_{f'} = 0$ , его решению  $f' = 0$  и соответствующему противоречию.

Таким образом, остается предположить, что экстремаль  $f(z)$  состоит только из дуги постоянного наклона, и проверить выполнение всех необходимых условий экстремума. В этом случае условие трансверсальности (3.12) приводит к равенствам:  $C = C_2 = Q'(\eta_b) = 0$ .

Первые два из них с использованием (3.6), (3.7), (3.16) и (3.18) приводят к уравнениям

$$a_1 \eta + \lambda_2 \eta^2 - \eta^{1-m} R(k_2) = 0, \quad \lambda(z) = \eta^{1-m} R_{f'}(k_2) \quad (4.8)$$

Третье равенство, согласно (3.7), запишется в виде

$$Q'(\eta_b) \equiv \text{tg} \theta (1 + \lambda_1 k) \eta_b^{1-m} = 0 \quad (4.9)$$

К уравнениям (4.8) необходимо присоединить первое из уравнений (3.13), в котором  $R(f') = R(k_2)$ . Если предположить, что решением системы (3.13), (4.8) является  $\eta \equiv \eta_b \neq 0$ , то с учетом (3.8) указанные уравнения можно записать в виде

$$\lambda_2 \eta_b + 2m \eta_b^{-m} R(k_2) = 0, \quad \lambda_2 \eta_b^2 = 0 \quad (4.10)$$

Из (4.10) в силу сделанного допущения следует, что  $\lambda_2 = R(k_2) = 0$ . Согласно фиг. 2, второе из выписанных равенств будет выполняться при  $k_2 = f'_2$ . В то же время, так как

$\eta_b \neq 0$ , из (4.9) найдем, что  $\lambda_1 = -1/k$ . Однако при этом значении  $\lambda_1$  (лемма 1) наклон дуги краевого экстремума (дуги постоянного наклона) может иметь единственное значение  $k_2 = f'_2 = \infty$ , которое не представляет интереса.

Рассмотрим другое возможное решение системы (3.13) и (4.8):  $\eta(z)$  – произвольная непостоянная функция без точек разрыва. Этот случай может реализоваться только при выполнении условий  $a_1 = \lambda_2 = R(k_2) = 0$ , а также равенства  $\eta_b = 0$ , следующего из соотношения (4.9). Указанные условия будут удовлетворены при

$$\lambda_1 = -\frac{R_1}{R_2}, \quad R_1 = \sqrt{1+k_2^2}, \quad R_2 = \sqrt{1+k^2 k_2^2} \quad (4.11)$$

т.е. при  $-1/k < \lambda_1 < -1$ , что, согласно фиг. 2, допускает произвольное значение угла наклона дуги краевого экстремума  $k_2 > 0$ . При найденном значении  $\lambda_1$  (4.11)  $R_f(k_2) > 0$  (фиг. 2) и, следовательно, согласно (4.8),  $\lambda(z) \geq 0$ , т.е. условие Лежандра (3.15) выполняется. При  $\lambda_2 = R(k_2) = 0$  удовлетворяется и условие Лежандра для функции  $\eta(z)$  (3.14).

Итак, доказано, что экстремаль  $f(z)$  является дугой краевого экстремума:  $f' = k_2$ . Значит, передняя кромка 4 (фиг. 1) абсолютно оптимального волнолета при  $z > 0$  является прямой линией, а его нижняя поверхность 2 – V-образным крылом. Установлено, что  $\eta(z)$  – произвольная непостоянная функция, причем  $\eta(b) = \eta_b = 0$ , что указывает на отсутствие у абсолютно оптимального волнолета боковых шайб. Теорема доказана.

Изопериметрические условия (3.10) для абсолютно оптимального волнолета с учетом (1.3), (1.7), (1.11) после введения новой переменной интегрирования  $v = z/b$ ,  $v \in [0, 1]$ , и функции  $\eta_1(v) = \eta(v)/\eta_0$  запишем в форме

$$C_y = c_p - \frac{\text{tg } \alpha}{(1-m)} B_2 R_2 \eta_0^{-m} \frac{I_{51}}{I_{11}}, \quad \frac{b}{\eta_0} = \frac{\text{tg}^2 \alpha}{8\tau^2} \frac{I_{21}^2}{I_{11}^3} \quad (4.12)$$

$$I_{11} = \int_0^1 \eta_1 dv, \quad I_{21} = \int_0^1 \eta_1^2 dv, \quad I_{51} = \int_0^1 \eta_1^{1-m} dv$$

На фиг. 3 схематически изображена форма абсолютно оптимального волнолета в плане. Отрезок  $OAB_1$  – образ передней кромки волнолета. Штрихпунктирные отрезки прямых  $\eta_0 B$  и  $\eta_0 A$ ,  $BB_1$  – образы акустических характеристик первого и второго семейств сверхзвукового потока за косым скачком уплотнения, выходящих из точек  $(\eta_0, 0)$ ,  $(k_2 b \text{ ctg } \theta, b)$  и совпадающих с поверхностью правой консоли V-образного крыла.

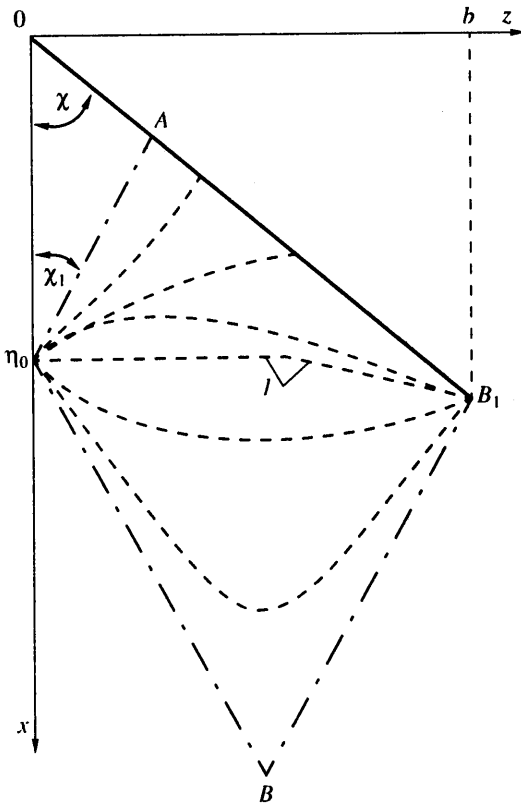
Характеристики задают границы, в которых может располагаться допустимая задняя кромка (штриховые кривые) абсолютно оптимального волнолета, не имеющая участков взаимного влияния, для чего функция  $\eta(z)$  должна удовлетворять условию

$$\text{ctg}^2 \beta_i \cos^2 \alpha R_2^2 - \left( \frac{d\eta}{dz} + \text{ctg}(\theta - \alpha) \cos \alpha k k_2 \right)^2 \geq 0, \quad \text{ctg } \beta_i = \sqrt{M_1^2 - 1} \quad (4.13)$$

Штриховые кривые, оканчивающиеся на отрезке  $AB_1$  (фиг. 3), являются образами допустимых задних кромок волнолетов, имеющих меньший полуразмах  $h$ .

При выборе допустимой кривой  $\eta_1(v)$  необходимо контролировать условие, следующее из неравенства (4.13) с учетом выражения для  $b/\eta_0$  (4.12)

$$\text{ctg}^2 \beta_i \cos^2 \alpha R_2^2 - \left( 8\tau^2 \text{ctg}^2 \alpha \frac{I_{11}^3}{I_{21}^2} \frac{d\eta_1}{dv} + \text{ctg}(\theta - \alpha) \cos \alpha k k_2 \right)^2 \geq 0 \quad (4.14)$$



Фиг. 3. Форма абсолютно оптимального волнолета в плане:  $OB_1$  – прямая передняя кромка; штриховые линии – возможные формы задней кромки волнолета; штрихпунктирные линии – характеристики сверхзвукового потока за косым скачком уплотнения, присоединенным к передней кромке;  $b, \eta_0$  – полуразмах и центральная хорда волнолета

Из соотношений (4.12) следует, что при любых коэффициентах подъемной силы  $C_y < C_p$  и удельном объеме  $\tau$  для произвольной допустимой функции  $\eta_1(\nu)$  (4.14), например из семейства ломаных (фиг. 3, отрезки штриховых прямых  $I$ ), всегда найдутся такие значения параметров  $\eta_0$  и  $b$ , что изопериметрические условия (3.10) будут удовлетворены. Широкие возможности по выбору формы задней кромки оптимального волнолета могут быть использованы для выполнения дополнительных условий конструктивного или газодинамического характера, например для получения заданной балансировки.

Для эволюционности течения около V-образного крыла – нижней поверхности абсолютно оптимального волнолета, представляющего собой расчетный режим обтекания [1, 11], необходимо выполнение неравенства  $\chi > \chi_1$  (фиг. 3). Другими словами, за плоским скачком уплотнения, присоединенным к передним кромкам V-образного крыла, должно иметь место сверхзвуковое течение на сфере, т.е. выполнены условия

$$\operatorname{tg}(\theta - \alpha) > \cos \gamma \operatorname{tg} \beta_i, \quad \operatorname{ctg} \gamma = kk_2 \quad (4.15)$$

Здесь  $\gamma$  – половина угла раскрытия V-образного крыла.

В противном случае, когда течение за скачком уплотнения на кромке дозвуковое на сфере или скачок уплотнения по отношению к потоку, нормальному к передней кромке, принадлежит сильному семейству, малые изменения условий обтекания будут приводить либо к отсоединению ударной волны от передней кромки, либо к реализации около крыла маховской конфигурации ударных волн, при которой имеет место скачкообразное увеличение нормальной силы, действующей на крыло [12–14].

В случаях, когда у оптимального волнолета реализуется обтекание нижней поверхности с указанными выше свойствами возмущенного потока, необходимо пересматривать ограничение на "наклон" его передней кромки, либо – константы изопериметрических условий для того, чтобы условие (4.15) было удовлетворено.

В исследованиях, посвященных построению различных волнолетов, не уделяется внимание анализу возможности "катастрофических" изменений в структуре их обтекания и аэродинамических характеристик при малых вариациях числа Маха и угла атаки. Указанное выше явление будет осуществляться и на отдельных участках криволинейной передней кромки волнолета, где за присоединенным скачком уплотнения в плоскости, перпендикулярной кромке, течение не является сверхзвуковым.

Аэродинамическое качество абсолютно оптимального волнолета определяется по формуле

$$K = \frac{C_y}{c_p} \operatorname{ctg} \alpha \left[ 1 + \frac{c_b}{c_p} + \left( 1 - \frac{C_y}{c_p} \right) \left( 1 + \frac{B_1 R_1}{B_2 R_2} \right) \operatorname{ctg}^2 \alpha \right]^{-1} \quad (4.16)$$

**5. Форма волнолета максимального аэродинамического качества при наличии условий на габариты.** Рассмотрим, какие изменения произойдут в решении вариационной задачи, если накладывать условия на габариты волнолета.

Пусть полуразмах волнолета  $b$  задан.

Согласно условию трансверсальности (3.12) и интегралу уравнения Эйлера для дуги постоянного наклона (3.18), при  $\delta b = 0$  будем иметь:  $C_2 = Q'(\eta_b) = 0$ . Обращаясь к доказательству теоремы, нетрудно установить, что функция  $f(z) = k_2 z$  и в данном случае является экстремалью. В соответствии с приведенными равенствами должны выполняться необходимые условия экстремума: уравнение Эйлера для функции  $\eta(z)$  (3.13) и первое из условий Лежандра (3.14), уравнение (4.8) для управляющей функции  $\lambda(z)$  и соответствующее условие Лежандра (3.15), а также краевое условие (4.9).

Предположим, что  $\eta(z)$  – переменная функция без точек разрыва. Тогда, согласно (3.13), придем к необходимости выполнения трех равенств

$$a_1 = \lambda_2 = R(k_2) = 0 \quad (5.1)$$

первое из которых, принимая во внимание (1.6), (1.7), (3.7), (3.8) и (4.9), удовлетворяется тождественно при выполнении двух других. Третье равенство дает решение (4.11) (фиг. 2, з), при котором  $R_f(k_2) > 0$ . В соответствии с последним неравенством и уравнением (4.8)  $\lambda(z) \geq 0$  и, следовательно, условие Лежандра (3.15) удовлетворяется. Выполняется с учетом равенств (5.1) и условие Лежандра (3.14). Из (4.9) и (4.11) следует, что  $\eta_b = 0$ , т.е. шайбы у оптимального волнолета с заданным размахом отсутствуют.

Установим при заданном  $b$  возможность существования решения  $\eta(z) \equiv \eta_b \neq 0$ . Согласно (4.9), имеем

$$\lambda_1 = -k^{-1}, \quad R(k_2) < 0 \quad (5.2)$$

Не рассматривая все необходимые условия экстремума, заметим только, что, согласно связям (3.7), (3.8) и равенствам (3.13), (4.9),  $\lambda_2 = -2m\eta_b^{-(1+m)}R(k_2)$ . Подставляя найденное значение  $\lambda_2$  в условие Лежандра (3.14), придем к неравенству

$$-m(3+m)\eta_b^{-(1+m)}R(k_2) \leq 0$$

которое противоречиво (5.2). Значит, исходное допущение о возможности существования решения  $\eta(z) \equiv \eta_b \neq 0$  – неверно.

Таким образом, формулировка теоремы остается справедливой и в случае, когда размах волнолета задан. Отличие решений изопериметрических задач со свободным и заданным размахом волнолета состоит в том, что, если в первом случае для любой функции  $\eta_1(v)$ , удовлетворяющей условию (4.14), найдутся соответствующие ей значения параметров  $\eta_0$  и  $b$  (см. фиг. 3), то во втором – указанная функция должна удовлетворять также интегральному равенству, следующему из изопериметрических условий (4.10) при исключении параметра  $\eta_0$ , который затем находится. Другими словами, при заданном  $b$  множество решений сужается.

Как при свободном, так и при заданном размахе волнолета для удовлетворения изопериметрических условий (4.12) имеется возможность вариации угла отклонения потока  $\alpha$ . Аэродинамическое качество оптимальных волнолетов с заданным размахом также определяется по формуле (4.16).

Предположим, что  $\eta_b$  задано, т.е. у волнолета имеются шайбы, а полуразмах  $h$  не задан.

Согласно условию трансверсальности (3.12) и интегралам (3.16), (3.18), при  $\delta\eta_b = 0$  будем иметь:  $C = C_2 = 0$ . Так как и в данном случае оптимальная передняя кромка волнолета является прямой  $f(z) = k_2 z$ , то следует определить решение для задней кромки. В соответствии с равенствами  $C = C_2 = 0$  должны выполняться необходимые условия экстремума: уравнение Эйлера для функции  $\eta(z)$  (3.13) и первое из условий Лежандра (3.14), уравнение (4.8) для управляющей функции  $\lambda(z)$  и соответствующее условие Лежандра (3.15), а также уравнение (4.8), следующее из интеграла (3.16) при  $C = 0$ .

Предположим сначала, что  $\eta(z)$  – переменная функция без точек разрыва. Тогда, согласно указанным выше уравнениям (3.13) и (4.8), придем к необходимости выполнения трех равенств (5.1). Первое и третье из них, принимая во внимание (1.6), (1.7), (3.7), (3.8), (4.11) и  $\eta_b \neq 0$ , могут быть удовлетворены только при  $\lambda_1 = -1/k$  и  $k_2 = \infty$ , что не представляет интереса.

Рассмотрим возможность существования решения  $\eta(z) \equiv \eta_b$ . С использованием соотношений (3.8), (3.13), (4.8) и других необходимых связей найдем

$$\lambda_1 = -\frac{1}{k} \frac{(1+k_3 R_1)}{(1+k_3 R_2/k)} > -\frac{1}{k}, \quad k_3 = \frac{b}{2\eta_0} m(2-m) \operatorname{ctg} \theta, \quad \lambda_2 = 2 \frac{Q}{b\eta_b^2} \quad (5.3)$$

Согласно фиг. 2, при выписанных значениях  $\lambda_1$  (5.3) и любых  $k_2 > 0$  справедливо неравенство  $R_{f'}(k_2) > 0$ , с учетом которого из (4.8) получим  $\lambda(z) > 0$ . Значит, условие Лежандра (3.15) и прочие необходимые соотношения на решении  $\eta(z) \equiv \eta_b$  выполняются.

Таким образом, при наличии боковых шайб и отсутствии условий на размах оптимальной формой волнолета в плане при  $z \geq 0$  является параллелограмм. Функция  $\eta_1(v) \equiv 1$ , неравенство (4.14) превращается в условие (4.15), а изопериметрические условия (3.10) примут вид

$$C_y = c_p - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{(1-m)} B_2 \eta_0^{-m} \left[ R_2 + \frac{k \operatorname{tg} \alpha}{(2-m)} \frac{\eta_0}{b} \right], \quad \frac{b}{\eta_0} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{8\tau^2} \quad (5.4)$$

Так как  $\eta_0 = \eta_b$  задано, то, исключая из первого соотношения (5.4)  $b/\eta_0$ , определяем угол отклонения потока в косом скачке уплотнения  $\alpha$ , а затем из второго соотношения –  $h$ .

Аэродинамическое качество оптимального волнолета с шайбами определяется по формуле

$$K = \frac{C_y}{c_p} \operatorname{ctg} \alpha \left[ 1 + \frac{c_h}{c_p} + \left( 1 - \frac{C_y}{c_p} \right) \left[ 1 + E_1 \frac{B_1}{B_2} \right] \operatorname{ctg}^2 \alpha \right]^{-1} \quad (5.5)$$

$$E_1 = \left[ R_1 + \frac{\operatorname{tg} \theta}{(2-m)} \frac{\eta_0}{b} \right] / \left[ R_2 + \frac{k \operatorname{tg} \theta}{(2-m)} \frac{\eta_0}{b} \right] > 1$$

Пусть  $h$  и  $\eta_b$  заданы. В этом случае должны выполняться уравнение Эйлера для функции  $\eta(z)$  (3.13) и уравнение (4.8) для управляющей функции. Если  $\eta(z)$  – переменная функция, то из (3.13) следуют условия (5.1), которые при  $\eta_b \neq 0$  могут быть удовлетворены, как показано выше, только при  $\lambda_1 = -1/k$  и  $k_2 = \infty$ , что не представляет интереса. Значит, и при рассматриваемых условиях на габариты волнолета  $\eta(z) \equiv \eta_b$ .

Согласно изопериметрическим условиям (5.4), при заданных  $h$  и  $\eta_b$  задача переопределена и, следовательно, параметры  $C_y$  и  $\tau$  не могут быть независимыми. Аэродинамическое качество определяется по формуле (5.5).

Из проведенного анализа задачи следует, что при независимых формах передней и задней кромок волнолета всегда для передней кромки реализуется краевой экстремум в соответствии с дифференциальной связью (3.6):  $f' = k_2$ . Отсюда получаем, что при  $k_2 = 0$  или отсутствии условия, ограничивающего снизу угол наклона передней кромки, абсолютно оптимальным волнолетом является клин без боковых шайб, имеющий произвольную форму задней кромки без участков взаимного влияния (абсолютно оптимальный клин). Аэродинамическое качество такого волнолета  $K_k$  определяется по формуле (4.16) при  $k_2 = 0$ .

**6. О соотношении величин аэродинамического качества эквивалентных абсолютно оптимальных волнолетов.** Ограничение на угол стреловидности передней кромки волнолета (3.6) приводит, как следует из (4.16), к уменьшению аэродинамического качества  $K_v$  абсолютно оптимального волнолета по сравнению с его величиной  $K_k$  при равных значениях  $C_y/c_p$ ,  $c_h/c_p$ ,  $B_1/B_2$  и  $\alpha$ .

Сделанное утверждение носит качественный характер. Сравнение величин аэродинамического качества  $K_v$  и  $K_k$  у абсолютно оптимальных волнолетов при  $k_2 \neq 0$  и  $k_2 = 0$  имеет смысл при совпадении констант изопериметрических условий (3.10), из которых вторая явным образом не входит в соотношение (4.16). Поэтому должны быть установлены условия эквивалентности этих волнолетов и лишь затем определено относительное уменьшение аэродинамического качества у волнолета с нижней поверхностью в форме V-образного крыла:  $\Delta K = 1 - K_v/K_k > 0$ . В дальнейшем индексы  $k, v$  будем приписывать при необходимости и величинам, входящим в определяющие соотношения.

Ограничимся рассмотрением случая, когда нормированная функция  $\eta_1(v)$ , описывающая длину образующих верхней цилиндрической поверхности волнолета (фиг. 1), у обоих волнолетов одинакова. При этом будем предполагать, что условия отсутствия влияния различных частей задней кромки волнолетов выполняются.

Отличие радикала  $R_2$  от единицы в условии  $C_y = \text{const}$  (4.12) будем компенсировать варьированием либо  $\eta_0$  при фиксированном угле  $\alpha_k$ , либо угла  $\alpha$  при фиксированном  $\eta_0$ , определяющем длину корневой хорды волнолета.

В первом случае из (4.12) найдем

$$\left( \frac{\eta_{0v}}{\eta_{0k}} \right)^m = R_2, \quad \frac{b_k}{\eta_{0k}} = \frac{b_v}{\eta_{0v}} \quad (6.1)$$

Согласно соотношениям (6.1), длина корневой хорды оптимального волнолета с нижней поверхностью в форме V-образного крыла больше соответствующей величины при  $k_2 = 0$ , а удлинения эквивалентных волнолетов одинаковы.

С использованием (4.16) в рассматриваемом случае найдем

$$\Delta K_1 = \left( 1 - \frac{C_y}{c_p} \right) \left( \frac{R_1}{R_2} - 1 \right) \frac{B_1}{B_2} \text{ctg}^2 \alpha \left[ 1 + \frac{c_h}{c_p} + \left( 1 - \frac{C_y}{c_p} \right) \left( 1 + \frac{B_1}{B_2} \frac{R_1}{R_2} \right) \text{ctg}^2 \alpha \right]^{-1} \quad (6.2)$$

Здесь все величины определены при  $\alpha = \alpha_k = \alpha_v$ .

Во втором случае представим параметры, входящие в (4.12) и зависящие от угла  $\alpha$ , в виде рядов Тейлора в точке  $\alpha = \alpha_k$

$$\alpha_v = \alpha_k + \Delta\alpha + \dots, \quad \text{tg } \alpha_v = \text{tg } \alpha_k + \frac{\Delta\alpha}{\cos^2 \alpha_k} + \dots \quad (6.3)$$

$$c_{pv} = c_{pk} + c_{pk}^\alpha \Delta\alpha + \dots, \quad k_v = k_k + k_k^\alpha \Delta\alpha + \dots, \quad B_{2v} = B_{2k} + B_{2k}^\alpha \Delta\alpha + \dots$$

Здесь индекс  $\alpha$  сверху означает производную по углу атаки. Подставляя разложения (6.3) в первое изопериметрическое условие (4.12), с использованием соответ-



ствующего условия для волнолета при  $k_2 = 0$  найдем

$$\Delta\alpha = \frac{(1 - C_y / c_{pk})(R_2 - 1)}{(c_{pk}^\alpha / c_{pk}) - (1 - C_y / c_{pk})R_2[k_2^2 k_k k_k^\alpha / R_2^2 + (B_{2k}^\alpha / B_{2k}) + 2 / \sin 2\alpha_k]} \quad (6.4)$$

Здесь и ниже  $R_2 = R_2(k_k)$ . В соответствии с изопериметрическими условиями для волнолета при  $k_2 = 0$  и с учетом того, что  $c_{pk}^\alpha / c_{pk} \sim 1 / \alpha_k$ , из (6.4) получим оценку

$$\Delta\alpha \sim \alpha_k \left(1 - \frac{C_y}{c_{pk}}\right) (R_2 - 1) \sim \alpha_k^2 \frac{B_{2k}}{c_{pk}} (R_2 - 1) < B_{2k} (R_2 - 1) \quad (6.5)$$

Поскольку  $B_{2k}$ , согласно (1.5), – малая величина, то сохраним только линейные по  $\Delta\alpha$  члены при вычислении  $\Delta K_2 = 1 - K_{\downarrow} / K_k$ . Так как  $\Delta\alpha$  входит в  $\Delta K_2$  только в виде произведения  $(c_{pk}^\alpha / c_{pk})\Delta\alpha$  и, значит, в соответствии с оценкой (6.5) и (6.4) имеет при немалых значениях  $k_2$ , вообще говоря, порядок величины  $(1 - C_y / c_{pk})$ , то в выписанном ниже выражении для  $\Delta K_2$  оставлены также только линейные относительно  $(1 - C_y / c_{pk})$  члены

$$\Delta K_2 = \frac{(1 - C_y / c_{pk})}{(1 + c_b / c_{pk})} \left[ \frac{B_1}{B_{2k}} (R_1 - 1) + (R_2 - 1) \right] \text{ctg}^2 \alpha_k \quad (6.6)$$

Сравнивая  $\Delta K_2$  (6.6) с  $\Delta K_1$  (6.2), найдем

$$\frac{\Delta K_2}{\Delta K_1} = 1 + \frac{B_{2k}}{B_1} \left(1 + \frac{B_1}{B_{2k}} \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{(R_2 - 1)}{(R_1 / R_2 - 1)} \quad (6.7)$$

Согласно (6.7), переход от абсолютно оптимального волнолета при  $k_2 = 0$  к эквивалентному волнолету при  $k_2 \neq 0$  приводит в случае фиксированной корневой хорды  $\eta_0$  и вариации угла  $\alpha$  (способ 2) к большему падению аэродинамического качества  $\Delta K_2$ , чем при вариации длины корневой хорды волнолета и фиксированном угле  $\alpha$  (способ 1). Однако при гиперзвуковых скоростях полета, когда  $k \sim \rho_\infty / \rho_1$  и  $(\kappa - 1) \cdot M_\infty^2 \sin^2 \alpha / (\kappa + 1) \sim 1$ , в соответствии с выражением для  $R_2$  в (6.4), второе слагаемое в правой части соотношения (6.7) становится малым, а  $\Delta K_2$  и  $\Delta K_1$  близкими по величине.

При способе 2 согласно второму изопериметрическому условию (3.10) имеем

$$\frac{b_v}{b_k} = \frac{\text{tg}^2 \alpha_v}{\text{tg}^2 \alpha_k}$$

Таким образом, в данном случае, в отличие от способа 1 (6.1) в соответствии с оценкой для  $\Delta\alpha$  (6.5) размахи, а следовательно, и площади в плане у обоих волнолетов близки.

**Заключение.** Сформулированы вариационные задачи о несущих формах максимального аэродинамического качества при различных наборах изопериметрических условий, являющихся нелинейными функционалами. Выписаны основные необходимые условия экстремума и определена структура максимизируемых функционалов. Решены вариационные задачи об оптимальной форме волнолета, построенного на плоских ударных волнах, с заданными коэффициентом подъемной силы и удельным объемом, как при отсутствии условий на габариты волнолета, так и при их наличии. Функции, описывающие форму передней и задней кромок волнолета, не заданы, связи между ними отсутствуют. При наличии дифференциального неравенства для формы передней кромки, моделирующего ограничение либо теплового потока на передней кромке, либо вклада нагрузки на переднюю кромку в одну из составляющих аэро-

динамической силы, доказано, что нижней поверхностью абсолютно оптимального волнолета является V-образное крыло. Концевые шайбы у абсолютно оптимального волнолета отсутствуют, форма задней кромки произвольна, но не содержит участков взаимного влияния. Получены соотношения, позволяющие рассчитать снижение аэродинамического качества при переходе от абсолютно оптимального волнолета в отсутствие ограничения на форму передней кромки к эквивалентному волнолету с нижней поверхностью в форме V-образного крыла.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 97-01-00099, 00-01-00234).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nonweiler T.* Aerodynamic problems of manned space vehicles // *J. Roy. Aeron. Soc.* 1959. V. 63. № 585. P. 521–528.
2. *Jones J.G.* A method for designing lifting configurations for high supersonic speeds using the flow fields of non-lifting cones // *Aeronaut. Res. Council.* 1963. № 24846.
3. *Kuchemann D.* Hypersonic aircraft and their aerodynamics problems // *Progr. Aeronaut. Sci. L.: Pergamon Press*, 1965. V. 6. P. 271–353.
4. *Майкапар Г.И.* Тела, образованные поверхностями тока конических течений // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1966. № 1. С. 126–127.
5. *Boucutt K.G., Anderson I.D., Capriotti D.* Viscous optimized hypersonic waveriders // *AIAA Paper.* 1987. № 0272. 18 p.
6. *Майкапар Г.И.* Замечания к выбору формы волнолета // *Изв. РАН. МЖГ.* 1996. № 3. С. 126–131.
7. *Келдыш В.В.* Оптимальные формы несущих тел, обтекаемых с плоским скачком уплотнения // *Изв. РАН. МЖГ.* 1996. № 4. С. 131–141.
8. *Starkey R.P., Lewis M.J.* A simple analytical model for parametric studies of hypersonic waveriders // *A Collection of Technical Papers. AIAA 8<sup>th</sup> Int. Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conf. Norfolk, Virginia / April 27–30, 1998.* P. 594–604.
9. *Остапенко Н.А.* Аэродинамическое сопротивление пространственных тел со звездобразным поперечным сечением при сверхзвуковых скоростях и проблемы его расчета // *Изв. РАН. МЖГ.* 1993. № 1. С. 57–69.
10. *Брыкина И.Г., Гершбейн Э.А., Пейгин С.В.* Ламинарный пограничный слой на стреловидных крыльях бесконечного размаха, обтекаемых под углом атаки // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1980. № 3. С. 27–39.
11. *Майкапар Г.И.* О волновом сопротивлении неосесимметричных тел в сверхзвуковом потоке // *ПММ.* 1959. Т. 23. Вып. 2. С. 376–378.
12. *Остапенко Н.А.* Режимы сверхзвукового обтекания V-образных крыльев // *Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН.* 1998. Т. 223. С. 238–247.
13. *Остапенко Н.А.* О всплывании точки Ферри на наветренной стороне V-образных крыльев // *Докл. АН СССР.* 1986. Т. 287. № 2. С. 295–298.
14. *Зубин М.А., Остапенко Н.А.* О структуре течения около наветренной стороны V-образных крыльев с присоединенной ударной волной на передних кромках // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1986. № 1. С. 122–131.

Москва  
Институт механики МГУ  
E-mail: ostap@inmech.msu.su

Поступила в редакцию  
1.VI.1999