

УДК 533.697.4

© 2000 г. А.Н. КРАЙКО, Н.И. ТИЛЛЯЕВА

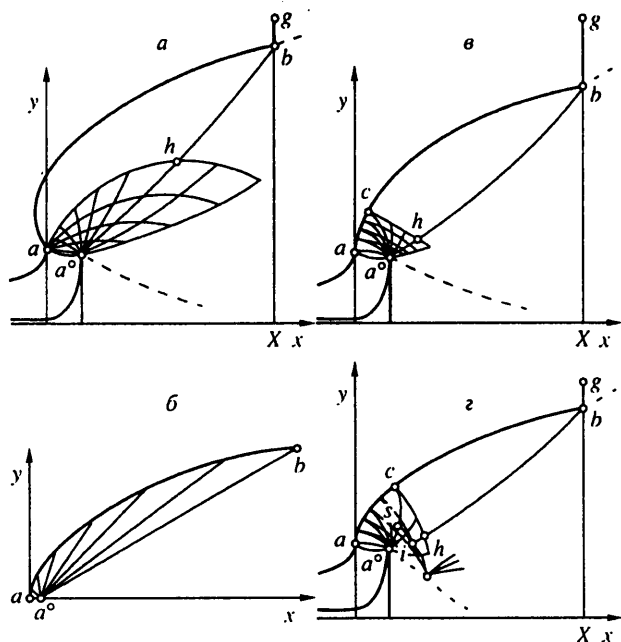
ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОФИЛИРОВАНИЕ КОНТУРА СВЕРХЗВУКОВОЙ ЧАСТИ ТАРЕЛЬЧАТОГО СОПЛА

В рамках идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа решена задача оптимального профилирования контура сверхзвуковой части тарельчатого сопла. При заданных равномерном звуковом потоке в радиальном критическом сечении сопла, ограничениях на его габариты и внешнем давлении ("противодавлении") построенные контуры реализуют максимум тяги. Начальные звуковые участки оптимальных контуров профилируются из условия обеспечения на них равного единице числа Маха. Изменяя длину начального звукового участка, можно строить сопла разных размеров. Возможности созданных программ демонстрируют примеры тарельчатых сопел, оптимальных при работе в пустоте. Показано, что малые потери тяги получаются при умеренных размерах сопел. В рассчитанных примерах при одинаковых длинах и расходах газа оптимальные тарельчатые сопла обеспечивают большую тягу, чем оптимальные осесимметричные и кольцевые сопла с осевым звуковым потоком.

Тарельчатые сопла, как и их плоский аналог, который профилировался в [1], а также плоские и осесимметричные конфигурации с центральным телом с "прикрытой обечайкой" [2–6], будучи авторегулируемыми, представляются перспективными для тех приложений, в которых ракетный двигатель работает в широком диапазоне противодавлений. Если тем не менее такой двигатель большую часть топлива расходует на больших высотах, то актуальной становится задача оптимального профилирования его сопла при низком или даже нулевом противодавлении.

С позиций постановки и решения задач оптимального профилирования тарельчатое сопло нетрадиционно в двух отношениях. Во-первых, в отличие от классического сопла Лавала образующая одной из его стенок (стенки "тарели") заканчивается в минимальном сечении. Получающаяся в результате этого кромка обтекает с возникновением пучка волн разрежения. Во-вторых, звуковой поток в минимальном сечении тарельчатого сопла растекается от оси симметрии под углами, близкими к прямому. Чтобы тарельчатое сопло имело высокую тягу, направление газа на "выходе" из него должно быть близким к осевому. Здесь под "выходом" понимается S^+ -характеристика, соединяющая с концевой точкой обтекаемого сверхзвуковым потоком контура кромку тарели, которая ограничивает справа до- и трансзвуковой поток. При реальных весьма жестко ограниченных габаритах необходимость поворота потока от минимального сечения к сечению выхода на углы порядка 90° приводит к нетрадиционному типу оптимальных контуров. Впервые такие контуры были построены для плоского аналога тарельчатого сопла в [1]. Там сначала были предложены контуры, начальный (примыкающий к минимальному сечению) участок которых образован звуковой линией тока, а затем с помощью общего метода множителей Лагранжа [7] было доказано, что они действительно являются оптимальными.

Ниже по тому же принципу строятся сверхзвуковые контуры тарельчатых сопел. Поток в начальном ("критическом") их сечении задавался радиальным, т.е. строго направленным от оси симметрии и для упрощения расчетов близким к звуковому (с числом Маха $M_0 = 1,002$). Такие начальные данные, конечно, не соответствуют заве-



Фиг. 1. Возможные схемы оптимальных тарельчатых сопел

домо сильно неравномерному до- и трансзвуковому потоку в предполагаемых конструкциях тарельчатых сопел. Тем не менее на данном этапе подобные упрощения в силу отсутствия информации о возможных конструктивных решениях представляются оправданными. В рамках сделанных упрощений при достаточно жестких габаритных ограничениях развитый метод профилирования позволяет строить контуры, реализующие тягу, близкую к идеальной.

1. Схема построения оптимального контура тарельчатого сопла. Рассмотрение способов профилирования тарельчатых сопел начнем со схемы, которую назовем "классической". Меридиональное сечение тарельчатого сопла такой схемы представлено на фиг. 1, *a*, на которой xu – цилиндрические координаты с началом отсчета, совмещенным с плоскостью левой границы минимального сечения сопла, aa° – звуковая линия, другие тонкие линии – C^+ - и C^- -характеристики, жирные кривые – образующие сопла, а штриховые – границы сверхзвуковой струи. Образующие дозвуковой части сопла заданы. Нижняя из них заканчивается в точке a° . Донное давление p_+ , действующее на внешнюю сторону тарели, предполагается настолько малым, что в конечную точку b обтекаемого сверхзвуковым потоком искомого участка контура сопла приходит одна из C^+ -характеристик $a^\circ b$ пучка волн разрежения, возникающего при обтекании кромки тарели. При достаточно малом внешнем противодавлении p^+ и не очень больших длинах сопла это предположение обычно выполняется. Так как верхняя, приходящая в точку a образующая дозвуковой части сопла задана, а ее сверхзвуковое продолжение должно строиться по результатам решения вариационной задачи, то в общем случае в точке a заданный (вверх по течению от a) и искомый (вниз по течению от a) участки контура стыкуются с изломом. В классической схеме принимается, что этот излом, как и при оптимальном профилировании классического сопла Лавалья, обтекается с возникновением пучка волн разрежения. Именно такой возможности отвечает фиг. 1, *a*.

На оптимизируемую образующую ag накладываются габаритные ограничения, в первую очередь на ее продольный размер: $x \leq X$, где X – заданная максимально

допустимая длина сопла. Из-за этого ограничения ag может содержать торец bg , на котором $x \equiv X$. Торец сверхзвуковым потоком не обтекается, а действующее на него давление далее считается равным противодавлению p^+ . Ограничение поперечного (радиального) размера сопла вводится заданием максимально допустимой ординаты (радиуса) Y . По этой причине $y_b \leq Y$. Здесь и далее нижние буквенные индексы, как правило, метят величины в соответствующих точках.

С точностью до несущественных при решении вариационной задачи положительных множителя и слагаемого, включающего, например, x -компоненту потока импульса через aa° , зависящая от формы оптимизируемого участка контура часть χ тяги R тарельчатого сопла равна (p – давление)

$$\chi = \int_a^b p y dy - \frac{1}{2} p^+ y_b^2 \quad (1.1)$$

В формулу (1.1) следовало бы добавить пропорциональную p_+ силу, которая действует на внешнюю образующую тарели и через p_+ также зависит от формы контура ag . Однако ввиду малости соответствующего вклада в χ указанная зависимость не учитывается.

Пусть поток на входе в до- и транзвуковую части сопла незакручен и однороден по полным параметрам. Его критическая скорость a_*° и плотность ρ_*° возьмем за масштабы скоростей (в том числе – скорости звука) и плотности, а произведение $\rho_*^\circ (a_*^\circ)^2$ – за масштаб давления. В качестве масштаба длины возьмем l° – протяженность по оси x минимального сечения сопла. Здесь и далее индекс градус приписан размерным величинам. В соответствии с выбором масштаба длины и начала отсчета x на фиг. 1 $x_{a^\circ} = 1$.

При реализации в качестве оптимальной классической схемы фиг. 1, a необходимые условия максимума χ наиболее просто получаются методом неопределенного контрольного контура [7] и формулируются на отрезке hb C^+ -характеристики $a^\circ b$ и в точке b . Получающиеся в результате условия, определяющие оптимальные C^+ -характеристику hb и координаты точки b , имеют вид

$$\rho V^2 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \vartheta = \text{const}, \quad W \equiv \left(4 - \frac{\kappa + 1}{M^2 - 1} M^4 \right) \sin \vartheta + \sqrt{M^2 - 1} \cos \vartheta \geq 0 \quad (1.2)$$

$$(p - p^+ - \rho V^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \operatorname{tg} \alpha)_b \geq 0, \quad \sin^2 \vartheta_b \geq 0 \quad (1.3)$$

Здесь ρ – плотность, V – модуль вектора скорости \mathbf{V} , ϑ – угол \mathbf{V} с осью x и α – угол Маха: $\sin \alpha = 1/M$, $M = V/a$ и a – скорость звука. Неравенство из (1.2) записано для совершенного газа с показателем адиабаты κ . Первое условие из (1.3) при равенстве определяет $y_b < y_g = Y$, а при знаке " $>$ " выполняется, если $y_b = y_g = Y$, т.е. при отсутствии торца. Если $\vartheta_b \neq 0$, то при выполнении второго неравенства из (1.3) $x_b = X$. В противном случае равенство $\vartheta_b = 0$ определяет $x_b < X$. Согласно первому равенству из (1.2), при этом $\vartheta \equiv 0$ на hb , где в случае однородного по параметрам торможения и незакрученного потока одновременно постоянны все параметры газа.

Для любого обтекаемого с образованием пучка волн разрежения излома в точке a выбор точки b на замыкающей C^- -характеристике этого пучка однозначно определяет некоторую "экстремальную" C^+ -характеристику hb , а затем из решения задачи Гурса с данными на ah и hb – образующую ab . Построение hb и решение задачи Гурса, как и расчет области взаимодействия пучков волн разрежения, осуществляется с использованием условий изоэнергетичности и изэнтропичности

$$2h(p, \rho) + V^2 = 2H_0, \quad s(p, \rho) = S_0 \quad (1.4)$$

уравнения для приращения функции тока ψ

$$d\psi = k\rho V (\cos \vartheta dy - \sin \vartheta dx) \quad (1.5)$$

и дифференциальных соотношений

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\vartheta \pm \alpha), \quad d\vartheta \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\rho V^2} dp \pm \frac{\sin \vartheta \sin \alpha}{y} [\sin(\vartheta \pm \alpha) dy + \cos(\vartheta \pm \alpha) dx] = 0 \quad (1.6)$$

выполняющихся при верхних (нижних) знаках на $C^+(C^-)$ -характеристиках.

В (1.4) – (1.6) h и s – удельные энтальпия и энтропия – известные функции p и ρ , H_0 и S_0 – константы (H_0 – полная энтальпия), а k – нормирующий множитель. Последний выбирается так, чтобы при $\psi = 0$ на кромке тарели $\psi = 1$ на ab . В соответствии с этим и следующим из (1.5) постоянством ψ на линиях тока при решении задачи Гурса образующая ab строится как линия тока с $\psi = 1$.

Для незакрученного, изоэнергетического и изэнтропического течения в дополнение к первому равенству из (1.2) на отрезке hb выполняется соотношение [7]

$$V \cos(\vartheta - \alpha) / \cos \alpha = \operatorname{const} \quad (1.7)$$

Данная, на первый взгляд "лишняя", связь в действительности не противоречит условию совместности из (1.6) для C^+ -характеристики, являясь в силу первого равенства из (1.2) его интегралом.

Для совершенного газа с учетом принятого способа обезразмеривания выражения для $h(p, \rho)$ и H_0 и условие постоянства энтропии из (1.4) принимают вид

$$h(p, \rho) = \kappa p / [(\kappa - 1)\rho], \quad 2H_0 = (\kappa + 1)/(\kappa - 1), \quad p / \rho^\kappa = 1 / \kappa.$$

После построения hb и ab первое условие из (1.3) позволяет найти те противодействия p^+ , для которых построенные hb и ab действительно оптимальны. Для этого упомянутое равенство перепишем в форме (для совершенного газа)

$$p^+ \leq p_b \left(1 - \frac{\kappa M^2}{2\sqrt{M^2 - 1}} \sin 2\vartheta \right)_b \quad (1.8)$$

При $M_b > 1$ минимальная величина множителя перед $\sin 2\vartheta$ равна κ . Для тарельчатых сопел умеренной длины в классической конфигурации, изображенной на фиг. 1, a , сверхзвуковой поток, разворачиваясь при обтекании излома в точке a до угла с осью x , большего 90° , не может повернуться в обратном направлении до угла, близкого к нулевому. Поэтому в подобных случаях правая часть (1.8) отрицательна. Следовательно, при не очень больших X контуры тарельчатых сопел классической схемы неоптимальны ни для каких реальных (неотрицательных) противодействий. При фиксированном X угол ϑ_b уменьшается с уменьшением излома в точке a . Однако даже в предельном случае гладкого сопряжения заданного контура дозвуковой части и контура ab противодействия, определяемые из (1.8), оказываются отрицательными в широком диапазоне длин X . В этом отношении показателен пример рассмотренного в [1] плоского аналога тарельчатого сопла. Согласно [1, 7], при отсутствии излома в точке a для прямой звуковой линии однопараметрическое семейство экстремальных контуров получается укорочением "сопла Прандтля – Майера". Его контур (фиг. 1, b) образован выходящей из точки a линией тока центрированной волны разрежения с прямолинейными C^+ -характеристиками, на последней из которых ($s \alpha^\circ \equiv h$): $\vartheta \equiv \vartheta_b = 0$, а $p \equiv p_b > 0$. Согласно (1.3) и (1.8), в этом случае $p^+ = p_b > 0$. Поскольку в таком сопле звуковой поток поворачивается на 90° , его габариты оказываются очень большими. Так, для $\kappa = 1,4$ при $x_a = 0$, $x_{a^\circ} = 1$ и $y_a = y_{a^\circ} = 0$ координаты концевой точки равны: $x_b = 625$, $y_b = 92$. Экстремальные сопла, получаю-

щиеся укорочением данного сопла до $X < 200$, были бы оптимальны только для отрицательных r^+ .

Отсутствие в рамках классической схемы оптимального решения даже для весьма умеренных габаритных ограничений прежде всего наводит на мысль о допущении в точке a отрицательных углов излома с поворотом потока к оси симметрии. Такое "решение проблемы", однако, неприемлемо. В действительности при постановке задачи "оптимального профилирования сверхзвуковой части сопла" неявно предполагается, что течение в минимальном сечении, фиксирующее, в частности, расход газа, определяется заданной формой канала вверх по потоку от точек a и a° . Это условие выполняется при положительных и нарушается при отрицательных углах излома в точке a . При отрицательных изломах точка a становится точкой торможения, а выходящая с кромки тарели (из точки a°) звуковая линия приходит на верхнюю (профилируемую) стенку сопла правее излома. Вследствие этого расход газа, протекающего через сопло, станет заведомо меньше первоначально ожидаемого.

Вместо упомянутого выше неявного предположения в исходной постановке задачи фигурирует почти эквивалентная ему формулировка о профилировании только сверхзвуковой части контура сопла. Слово "почти" употреблено здесь по той причине, что в строго эквивалентной постановке словосочетание "сверхзвуковая часть" следует заменить на "часть с числом Маха $M \geq 1$ ". Как показано в [1], такое, казалось бы, несущественное уточнение – допущение на ab равенства $M = 1$ позволяет за счет введения начального звукового участка ac (фиг. 1, θ), не изменяя течения в критическом сечении сопла, строить оптимальные контуры при реальных, достаточно жестких ограничениях на их габариты.

При различии течений в оптимальных тарельчатых соплах классической (фиг. 1, a) и "нетрадиционной" (фиг. 1, θ) схем их профилирование различается лишь расчетом потоков с $M \geq 1$ в "начальных областях". В случае фиг. 1, a – это область, покрытая S^- -характеристиками пучка волн разрежения с фокусом в точке a . В случае фиг. 1, θ начальная область тоже покрыта S^- -характеристиками, но здесь они идут от звуковой линии тока ac . Эти S^- -характеристики, будучи отражением S^+ -характеристик пучка волн разрежения с фокусом в точке a° , формируют волну сжатия. В общем случае это ведет к появлению всякого скачка того же семейства, что и S^- -характеристики волн сжатия. Пусть в рассчитываемой начальной области скачок не возник (фиг. 1, θ), а если возник, то пусть в точке i пересечения скачка с S^+ -характеристикой $a^\circ b$ он располагается внутри волн сжатия из S^- -характеристик (фиг. 1, z , двойная линия – скачок, s – точка его зарождения). Тогда на оптимальной S^+ -характеристике hb и в точке b должны выполняться те же условия оптимальности (1.2) и (1.3), что и для классической схемы. Наличие скачка не меняет и записанных в форме (1.6) дифференциальных связей на S^+ -характеристиках, выражения (1.5) для приращения ψ и условия изоэнергетичности потока из (1.4). В то же время условие изэнтропичности из (1.4) и интеграл (1.7) теперь справедливы лишь при $\psi_s \leq \psi \leq 1$. При $\psi_i \leq \psi \leq \psi_s$ условие изэнтропичности заменяется условием сохранения энтропии (или "энтропийной функции" p/ρ^κ) на линии тока $s(p, \rho) = S(\psi)$ с функцией $S(\psi)$, которая определяется и запоминается при построении скачка.

Возникновение ситуации с точкой зарождения скачка s (фиг. 1, z) левее S^+ -характеристики $a^\circ b$ зависит от формы дозвуковой части сопла и определяемых ею распределений параметров вблизи звуковой линии, от типа профилируемого сопла и т.п. В примерах, рассчитанных в [1], скачки такого типа не наблюдались. Конечно, обнаружение всяких скачков всегда можно отнести к недостаточно высокой "разрешающей способности" применявшегося алгоритма метода характеристик, малой мощности характеристической сетки и т.п. С другой стороны, на первом этапе построения оптимальных контуров нетрадиционной схемы даже и при появлении

слабых скачков, а вблизи точки зарождения они действительно слабые, можно вести счет, пренебрегая ими, например, с помощью соответствующего разреживания характеристической сетки.

В предполагаемых изделиях с тарельчатыми соплами форма их дозвуковых частей будет определяться типом камеры сгорания, ее расположением и другими особенностями конструкции. При отсутствии информации подобного рода естественно, как и в [1], начать с простейшей (хотя и нереализуемой) прямой звуковой линии – отрезка прямой, параллельной оси симметрии. В таком случае при выбранных начале отсчета x и линейном масштабе $x_a = 0$, $x_{a^{\circ}} = 1$, а геометрия минимального сечения определяется единственной величиной $y_{a^{\circ}} = y_a = y_0$. На такой звуковой линии поток равномерный и радиальный: $\rho_0 \equiv V_0 \equiv M_0 \equiv 1$, $p_0 \equiv 1/k$ и $\vartheta_0 \equiv \pi/2$.

При радиальном равномерном звуковом или сверхзвуковом ($M_0 \geq 1$) потоке в цилиндрическом ($y \equiv y_0$) начальном сечении из-за радиального расширения газ ускоряется, а течение остается радиальным с параметрами, зависящими только от y , в опирающемся на aa° равнобедренном "начальном характеристическом треугольнике" [8]. Криволинейные боковые стороны этого треугольника образуют C^- и C^+ -характеристики, выходящие из точек a и a° . Внутри начального треугольника $u\rho V = y_0\rho_0 V_0$. Отсюда, привлекая интегралы (1.4), найдем

$$y = y_0 F(M) / F(M_0), \quad F(M) = [2 + (\kappa - 1)M^2]^{\beta} / M, \quad \beta = (\kappa + 1) / [2(\kappa - 1)] \quad (1.9)$$

Далее, как и в [8], получим, что на C^+ - и C^- -характеристиках этого треугольника

$$x = x_0 \mp \frac{2y_0}{F(M_0)} \int_{M_0}^M \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M^2} [2 + (\kappa - 1)M^2]^{\beta - 1} dM \quad (1.10)$$

Здесь верхний (нижний) знак отвечает C^+ (C^-)-характеристикам, а x_0 – абсцисса выхода характеристики с прямой $y = y_0$, причем $0 \leq x_0 \leq 1$. В начальном характеристическом треугольнике формулы (1.9) и (1.10) дают параметрическое представление характеристик в меридиональной плоскости. Выходящая из точки a° C^+ -характеристика ограничивает снизу и слева пучок волн разрежения с фокусом в этой точке. Аналогично C^- -характеристика, выходящая из точки a , ограничивает снизу и справа волну сжатия, возникающую при обтекании начального звукового участка ac профилируемой образующей сопла (если образовавшийся в волне сжатия скачок не вышел на указанную границу).

Таким образом, в осесимметричном случае даже при $M_0 = 1$ характеристики пучка волн разрежения, уходя вверх от прямой звуковой линии, не попадают в конечную окрестность точки a на противоположной стенке сопла. Согласно (1.9) и (1.10), размер этой окрестности уменьшается с ростом y_0 , становясь нулевым только при $y_0 \rightarrow \infty$, т.е. при переходе к течению с прямой звуковой линией в плоском сопле. Отмеченное различие течений вблизи горизонтальной прямой звуковой линии в осесимметричном и плоском случаях связано с влиянием в первом из них радиального расширения потока. Такого же эффекта следует ожидать и при отличном от строго радиального звуковом потоке, по крайней мере если указанное отличие невелико. Можно показать, что из-за противоположного эффекта радиального сжатия равномерный звуковой поток к оси симметрии, заданный на отрезке горизонтальной прямой, нельзя продолжить на меньшие y даже в сколь угодно малой окрестности кромки.

2. Примеры оптимальных контуров. В рамках подхода и схемы решения, описанных в разд. 1, было выполнено оптимальное профилирование контуров тарельчатых сопел, различавшихся радиусом "звуковой" поверхности y_0 и габаритами, которые считались совпадающими с координатами точки b , т.е. $X = x_b$ и $Y = y_b$. Расчеты проводились для совершенного газа с $\kappa = 1,4$ при нулевом противодавлении ($p^+ = 0$). Для упрощения вычислений скорость радиального потока в начальном сечении была взята слегка большей скорости звука ($M_0 = 1,002$).

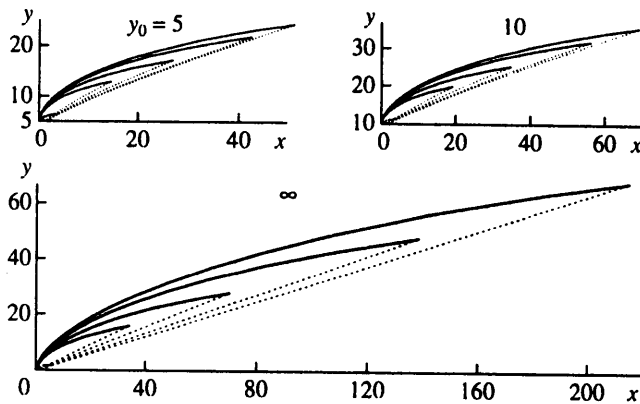
Таблица 1

y_0	τ	$x_b = X$	$y_b = Y$	F/F_0	R	R/R_{id}	ΔG	ΔL
5	1,00	14,6	13,0	14,3	2,230	0,981	0,8	0,7
5	0,75	27,0	17,2	27,2	2,285	0,989	0,3	0,2
5	0,50	42,5	21,9	45,6	2,319	0,993	0,3	0,3
5	0,25	51,1	24,4	57,2	2,330	0,993	0,3	0,2
7	1,00	16,9	16,0	14,8	2,234	0,981	0,9	0,8
7	0,75	30,8	20,8	27,3	2,286	0,989	0,15	0,07
7	0,50	49,2	26,4	46,1	2,319	0,992	0,05	0,04
7	0,25	60,2	29,5	58,5	2,332	0,993	0,07	0,03
10	1,00	19,3	20,1	15,1	2,238	0,979	1,1	1,1
10	0,75	34,9	25,4	27,3	2,287	0,988	0,13	0,07
10	0,50	56,4	31,9	46,0	2,319	0,992	0,02	0,06
10	0,25	69,5	35,6	58,3	2,332	0,993	0,02	0,08
20	1,00	23,9	31,6	15,5	2,243	0,975	1,2	1,1
20	0,75	43,1	38,6	27,2	2,289	0,985	0,10	0,06
20	0,50	71,5	47,2	45,7	2,321	0,990	0,01	0,04
20	0,25	91,6	52,7	59,5	2,334	0,992	0,01	0,01
∞	1,00	33,7	16,1	16,1	2,251	0,992	1,0	1,0
∞	0,75	70,1	28,1	28,1	2,296	0,995	0,00	0,08
∞	0,50	139	48,1	48,1	2,328	0,996	0,01	0,01
∞	0,25	216	68,0	68,0	2,345	0,997	0,01	0,01

При выборе значений y_0 принимались во внимание следующие соображения. Пусть дозвуковой поток из камеры сгорания подводится к минимальному сечению сопла вдоль его оси с одной стороны. Если y_{in} – радиус подводящего канала, то при выбранном способе обезразмеривания условие сохранения расхода в нем и в звуковом минимальном сечении дает: $y_{in}^2(\rho V)_{in} = 2y_0$. Поскольку $y_{in} < y_0$, то из приведенного равенства следует $y_0 > 2/(\rho V)_{in}$, т.е. y_0 при заведомо дозвуковом потоке в подводящем канале, когда $(\rho V)_{in} < 1$, должно заметно превышать 2. С учетом необходимости одновременно с разгоном осуществлять плавный поворот потока на угол порядка 90° значения $y_0 = 3$ и даже 4 слишком малы.

В табл. 1, где τ – длина звукового участка ac , представлены геометрические и тяговые характеристики оптимальных тарельчатых сопел. Линейные геометрические характеристики отнесены к продольному размеру r^0 минимального сечения сопла. Последние четыре контура ($y_0 = \infty$) представляют оптимальные образующие плоского аналога тарельчатого сопла. В отличие от остальных контуров их x_b и y_b даны в декартовой системе координат, в которой, как и на фиг. 1, б, $y_{a^0} = y_a = x_a = 0$, а $x_{a^0} = 1$.

При определении "кольцевой" степени расширения (F/F_0) площадь "кольцевого" выходного сечения сопла $F = \pi(y_b^2 - y_0^2)$ относится к площади его минимального сечения $F_0 = 2\pi y_0$. Как будет видно далее, определение степени расширения по кольцевой, а не по полной площади выхода (πY^2) удобнее при анализе результатов. Полная степень расширения получается добавлением к "кольцевой" $y_0/2$. Удельная тяга R , получающаяся делением тяги на $G^0 a_0^2$, где G^0 – расход протекающего через сопло газа, определена без добавки силы, действующей на внешнюю (донную) часть тарели. Эта добавка зависит от величины донного давления p_+ , которое отлично от нуля даже при полете в пустоте, где $p^+ = 0$. Идеальная удельная тяга R_{id} вычислялась для сопел Лавала той же полной (а не "кольцевой") степени расширения $Y^2/(2y_0)$ с равномерным и параллельным оси симметрии потоком на выходе. Отношение R/R_{id} характеризует геометрическое совершенство сопла при фиксированной полной степени расширения. Другая идеальная удельная тяга R^{id} , отвечающая расширению до $Y = \infty$ и $p = 0$, равна максимальной скорости истечения. При выбранных масштабе скорости и показателе адиабаты $R^{id} = \sqrt{(\kappa + 1)/(\kappa - 1)} = \sqrt{6} \approx 2,4495$. В зависимости от величины X построенные сопла не добирают до этого "сверх-



Фиг. 2. Контуры (сплошные кривые) оптимальных тарельчатых сопел для разных длин и y_0 . Пунктир – C^+ -характеристики $a^{\circ}b$ и C^- -характеристики ch (см. фиг. 1), y отсчитывается от y_0

идеального" уровня от 4,5 до 9%. Однако для каждой длины X степень расширения Y не может превысить оптимального значения, найденного из решения вариационной задачи и может быть увеличена только с увеличением X . Это подтверждает и сравнение вариантов сопел разной длины.

Величины ΔG и ΔI дают погрешности в процентах от расхода G и тяги R выполнения интегральных законов сохранения расхода и x -компоненты количества движения I по замкнутому контуру $aa^{\circ}ba$, составленному из прямой "звуковой" линии aa° , C^+ -характеристики $a^{\circ}b$ и образующей ab .

При расчете максимальное число точек на C^- -характеристике $N = 400$, однако висячий скачок, который мог возникнуть в волне сжатия, "не ловился". Вместо этого применялась упомянутая в предыдущем разделе процедура разреживания характеристической сетки с выбрасыванием точек пересечения одноименных характеристик. В вариантах с ΔG и ΔI порядка 1% это и явилось причиной указанных погрешностей. Отсутствие в использованном численном алгоритме процедуры аккуратного построения висячего скачка в волне сжатия сказывается на точности определения p в основном в малой окрестности концевой точки b контура ab и на проходящей в b замыкающей C^+ -характеристике. Так как при приближении к точке b давление p и угол ϑ уменьшаются, то указанная окрестность вносит малый вклад в тягу R , определяемую интегралом по ab из (1.1). Поэтому сравнительно большие ΔG и ΔI , сигнализируя о возникновении висячего скачка в волне сжатия, что само по себе весьма интересно, связаны с погрешностями счета не R , а расхода и потока количества движения через отрезок ib (фиг. 1, 2) замыкающей C^+ -характеристики.

При построении контуров, параметры которых собраны в табл. 1, вместо максимально допустимой длины сопла X задавалась длина τ образующей ac звукового участка, а X находилось в процессе оптимального профилирования. Такой переход от "прямой" к "обратной" постановке вариационной задачи, первоначально сделанный по соображениям удобства проведения расчетов, выявил ряд интересных закономерностей. Эти закономерности видны при сравнении характеристик сопел из табл. 1 с разными y_0 , но одинаковыми τ . Как и следовало ожидать, для фиксированного y_0 чем меньше τ , тем больше габариты сопел, оптимальных при работе в вакууме (при $p^+ = 0$). Например, для $y_0 = 5$ и 10 при уменьшении τ от 1 до 0,25 длина сопла X увеличивается примерно в 3,5, а $\Delta Y = Y - y_0$ – в 2,5 раза. Для плоского аналога тарельчатого сопла ($y_0 = \infty$) X и ΔY возрастают соответственно в 6,4 и в 4,3 раза. При фиксированном τ продольный и поперечный размеры сопла достаточно заметно увеличиваются и с ростом y_0 . В противоположность этому тяга R слабо меняется при изменении y_0 и значительно сильнее – при изменении τ . То же свойство присуще степени расширения F/F_0 , определенной по кольцевой, а не по полной площади выхода, и отношению R/R_{id} . Если R_{id} определять по "кольцевой" степени расширения, то при $\tau = \text{const}$ отношения R/R_{id} будут изменяться еще меньше. Поскольку тяга R оптимальных сопел определена без учета действующей на внешность тарели положи-

Таблица 2

$X^L = X$	y_0	y_0^L	y_b	y_b^L	F/F_0	F^L/F_0	R	R^L	ΔR
51,1	5	3,2	24,4	19,1	57,2	36,5	2,330	2,297	1,4
60,2	7	3,7	29,5	22,6	58,5	36,3	2,332	2,297	1,5
69,5	10	4,5	35,6	26,3	58,3	34,6	2,332	2,294	1,7
91,6	20	6,3	52,7	35,4	59,5	31,4	2,334	2,287	2,1
106	30	7,7	67,3	41,7	60,5	29,0	2,336	2,282	2,4
13,2	4	2,8	11,3	7,5	13,9	7,1	2,228	2,140	4,1
15,9	6	3,5	14,5	9,1	14,6	6,9	2,232	2,136	4,5
17,8	8	4,0	17,4	10,3	15,0	6,7	2,236	2,132	4,9
19,3	10	4,5	20,1	11,3	15,1	6,4	2,238	2,126	5,3
23,6	20	6,3	31,9	14,8	15,5	5,4	2,243	2,100	6,8
27,1	40	8,9	53,5	18,7	15,7	4,4	2,246	2,062	8,9

Таблица 3

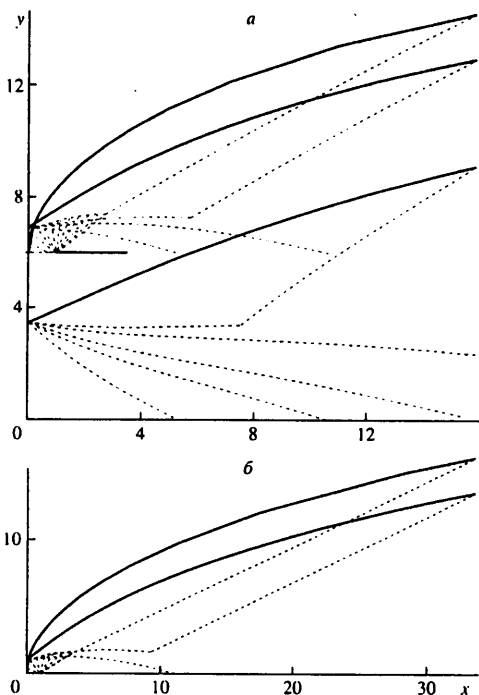
$X^{an} = X$	y_0	y_0^{an}	y_b	y_b^{an}	F/F_0	F^{an}/F_0	R	R^{an}	ΔR
51,1	5	5,9	24,4	21,7	57,2	44,5	2,330	2,312	0,8
60,2	7	7,9	29,5	26,4	58,5	46,4	2,332	2,315	0,7
69,5	10	11	35,6	32,2	58,3	46,9	2,332	2,316	0,7
91,6	20	21	52,7	48,7	59,5	49,4	2,334	2,320	0,6
119	40	41	81,0	76,3	62,0	52,8	2,337	2,325	0,5
216	∞	∞	68,0	61,7	68,0	61,7	2,345	2,336	0,4
24,5	4	4,9	15,2	13,4	27,0	20,4	2,285	2,260	1,1
29,0	6	6,9	19,1	17,0	27,3	21,0	2,286	2,264	1,0
32,3	8	8,9	22,4	20,1	27,4	21,3	2,287	2,266	0,9
34,9	10	11	25,4	23,0	27,3	21,5	2,287	2,267	0,9
43,1	20	21	38,6	35,8	27,3	22,1	2,289	2,271	0,8
51,1	40	41	61,6	58,5	27,4	22,8	2,291	2,275	0,7
70,1	∞	∞	28,1	24,5	28,1	24,5	2,296	2,283	0,6

тельной добавки, то действительные величины R и R/R_{id} несколько больше, чем приведенные и без того весьма высокие их значения.

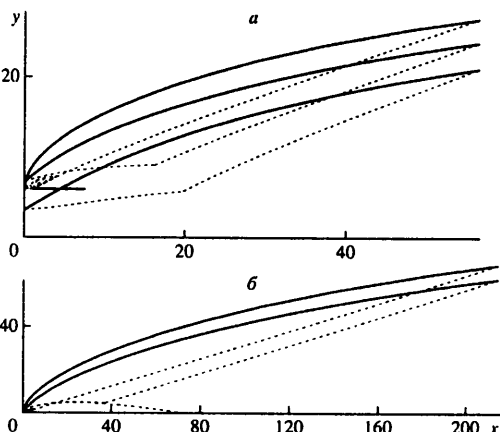
Образующие 12 оптимальных сопел, отвечающие $y_0 = 5, 10$ и ∞ и четырем τ из табл. 1, приведены на фиг. 2 (y отсчитывается от y_0).

Сравним геометрические параметры и тяги оптимально спроектированных тарельчатых сопел с аналогичными характеристиками также оптимально спроектированных сопел Лавалья и кольцевых сопел с осевым и равномерным потоком в минимальном сечении. Будем сравнивать сопла одинаковой длины с одинаковым расходом газа. Поток в начальном ("минимальном") сечении сравниваемых сопел, как и в начальном сечении тарельчатых сопел, сверхзвуковой с $M_0 = 1,002$.

Результаты сравнения тарельчатых сопел и сопел Лавалья представлены в табл. 2. Длинные тарельчатые сопла из первых пяти ее строк построены для $\tau = 0,25$, более короткие – для $\tau = 1$. Величинам, относящимся к соплам Лавалья, приписан верхний индекс L , а $\Delta R = R/R^L - 1$ – выигрыш (в процентах) по тяге тарельчатых сопел по сравнению с соплами Лавалья. При равных длинах ($X^L = X$) и расходах оптимальные сопла Лавалья заметно уступают по тяге оптимально спроектированным тарельчатым соплам. Превосходство тарельчатых сопел по тяге увеличивается с ростом y_0 и с уменьшением X . Это понятно, ибо с ростом y_0 в силу условия равенства расходов радиус y_0^L минимального сечения сопла Лавалья растет пропорционально $\sqrt{y_0}$. Из-за этого в калибрах входа его длина с ростом y_0 уменьшается. В противоположность этому "откалиброванная" длина тарельчатого сопла, "калибром" которого служит ширина его кольцевого входа, остается неизменной. Данный эффект проявляется тем сильнее, чем меньше X .



Фиг. 3.



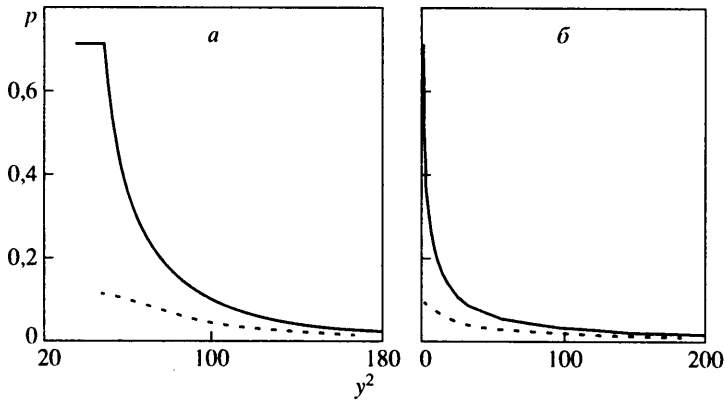
Фиг. 4

Фиг. 3. Сравнение оптимальных контуров (сплошные линии) тарельчатых ($\tau = 1$) и кольцевых сопел и сопел Лавала ($a - y_0 = 6, b - y_0 = \infty$, пунктир – "закрывающие" C^+ - и C^- -характеристики)

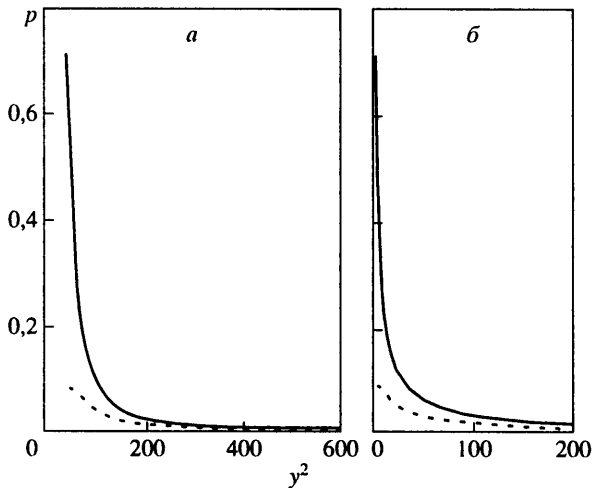
Фиг. 4. Сравнение оптимальных контуров тарельчатых и кольцевых сопел и сопел Лавала ($\tau = 0,25$; остальное, как на фиг. 3)

Результаты сравнения тарельчатых и кольцевых сопел с цилиндрической нижней образующей ($y = y_0$) и расширяющейся верхней представлены в табл. 3 (ΔR в последнем столбце определено аналогично табл. 2). Параметрам кольцевых сопел присвоен индекс ап. Длинные тарельчатые сопла из первых 6 ее строк построены для $\tau = 0,25$, более короткие – для $\tau = 0,75$. Кольцевые сопла также оказались хуже тарельчатых. На первый взгляд это кажется удивительным, тем более что их "откалиброванная" длина из-за того же условия равенства расходов хоть и слегка, но превышает откалиброванную длину тарельчатых сопел. Точное равенство "калибров" и откалиброванных длин имеет место только для плоских сопел ($y_0 = \infty$). Преимущество тарельчатых сопел не связано с погрешностями счета, даже если их, вопреки сказанному ранее, целиком отнести к погрешностям вычисления R . Действительно, неравенство $R > R^{an}$ устойчиво выполняется и для тех коротких сопел, для которых ΔG и ΔI – величины порядка процента, и для остальных, среди которых есть сопла с ΔG и ΔI , не превышающими 0,01% при превышении R над R^{an} в 0,4% и более. Как показано ниже, неравенство $R > R^{an}$ есть следствие большей степени расширения тарельчатых сопел, а это – результат более высоких значений $p = p(y^2)$ вдоль их контуров по сравнению с кольцевыми соплами с осевым входом. При осевом входе меньшие F/F_0 имеют и такие кольцевые сопла, у которых расширяются не одна, а обе стенки. Для $y_0 \leq 10$ справедливость данного утверждения следует из данных табл. 3. Действительно, для фиксированных длин при расширяющейся нижней стенке из-за более низкого p в концевой точке верхнего контура ее y_b^{an} будет меньше величин, приведенных в табл. 3. Добавка же к F^{an}/F_0 , обусловленная расширением нижней стенки к оси симметрии, не превышает $y_0/2$.

Контуров четырех оптимальных тарельчатых сопел ($y_0 = 6$ и $\infty, \tau = 1$ и $0,25$), сравниваемых с ними кольцевых, а также осесимметричных и плоских сопел Лавала изображены на фиг. 3 ($\tau = 1$) и 4 ($\tau = 0,25$). Наряду с контурами сопел и цилиндрических нижних стенок кольцевых (сплошные кривые; при $0 \leq x \leq 1$ прямолинейные цилиндрические образующие не нарисованы)



Фиг. 5. Распределения давления по оптимальным образующим тарельчатых ($\tau = 1$, сплошные кривые) и кольцевых (штрихи) сопел ($a - y_0 = 6$, $b - y_0 = \infty$)



Фиг. 6. Распределения давления по оптимальным образующим тарельчатых и кольцевых сопел ($\tau = 0,25$; остальное, как на фиг. 5)

штрихами даны замыкающие S^- -характеристики начальных пучков волн разрежения или идущих от звуковых линий тока волн сжатия и S^+ -характеристики пучков волн разрежения, возникающих при обтекании кромки тарели. Последние заканчиваются S^+ -характеристиками, которые приходят в конечные точки построенных контуров. Согласно сказанному выше и табл. 2 и 3, степени расширения тарельчатых сопел и их плоского аналога, изображенных на фиг. 3 и 4, больше, чем у конфигураций с осевым входом.

Фигуры 5 ($\tau = 1$) и 6 ($\tau = 0,25$) для тех же $y_0 = 6$ и ∞ , что и фиг. 3 и 4, дают распределения давления $p = p(y^2)$ вдоль контуров тарельчатых и кольцевых сопел с осевым входом ($a, y_0 = 6$) и их плоских аналогов ($b, y_0 = \infty$). Существенно большие давления, действующие на стенку тарельчатых сопел, естественны, так как у них интеграл сил давления по сверхзвуковому (точнее, не по дозвуковому) контуру дает почти всю (при радиальном потоке в минимальном сечении – всю) тягу сопла. В противоположность этому у сопел с радиальным потоком в минимальном сечении такой же интеграл составляет, как правило, меньшую добавку ΔR к импульсу I_* потока в критическом сечении. Так, для $\kappa = 1,4$ импульс $I_* = 1,714$, а при идеальном расширении до нулевого давления, т.е. в сопле с бесконечной степенью расширения, $\Delta R = 0,735$. Для $\kappa = 1,2$ аналогичные величины равны 1,833 и 1,483. Таким образом, при заранее ожидаемом более высоком уровне давления на стенке тарельчатого сопла не очевидно то, что оно выше по всему контуру, причем при большей степени расширения. При правильном профилировании это и

обеспечивает преимущество по тяге тарельчатых сопел над кольцевыми с осевым входом. Обнаруженное преимущество, однако, не единственно, ибо важным их достоинством является авторегулируемость – свойство, которым не обладают ни сопла Лавала, ни кольцевые сопла с осевым входом. При этом на расчетном режиме при разумных в конструктивном отношении длинах и $y_0 \leq 10-20$ благодаря оптимальному профилированию потери тяги удастся сделать не превышающими 1%.

При полете в атмосфере $p^+ > 0$. В таких случаях степень расширения оптимально спрофилированного для соответствующих условий полета тарельчатого сопла будет меньше, чем при полете в пустоте. Если к тому же выходное сечение тарельчатого сопла определяет радиальные размеры летательного аппарата, то выходной радиус сопла y_b находится из условия оптимального сопряжения контура ab с внешними обводами аппарата. При полете со сверхзвуковой скоростью при получении указанного условия для давления p_{b+} в концевой точке внешних обводов b_+ можно воспользоваться формулой Ньютона $p_{b+} = p_\infty + \rho_\infty V_\infty^2 (\sin \vartheta_{b+})^2$. Здесь индекс ∞ приписан параметрам набегающего потока, а ϑ_{b+} – угол касательной к внешнему контуру с осью x , причем $\vartheta_{b+} \leq \vartheta_b$. Согласно [9, 10], при решении вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики формулу Ньютона можно применять, начиная с небольших звуковых скоростей.

Воспользовавшись формулой Ньютона, аналогично [7, 9] можно показать, что оптимальная степень расширения тарельчатого сопла определится условием

$$p_\infty [1 + \kappa M_\infty^2 (2 + \cos 2\vartheta_{b+}) (\sin \vartheta_{b+})^2] = p_b \left(1 - \frac{\kappa M^2}{2\sqrt{M^2 - 1}} \sin 2\vartheta \right) \quad (2.1)$$

В случаях, в которых хвостовые радиальные габариты аппарата определяются радиусом выходного сечения сопла, формула (2.1) справедлива и при совпадении концевых точек контуров сопла и внешних обводов ($y_{b+} = y_b$), и тогда, когда задан "технологический" торец фиксированной высоты Δ , т.е. $y_{b+} = y_b + \Delta$.

Заключение. Согласно выполненным расчетам, тарельчатые сопла умеренных размеров, оптимально спрофилированные для равномерного звукового радиального потока, имеют потери тяги, не превышающие 1%, и превосходят оптимально спрофилированные сопла Лавала и кольцевые сопла с таким же равномерным, но осевым потоком в критическом сечении. Вопрос об учете неравномерности потока в минимальном сечении при профилировании сверхзвуковых частей сопел с осевым входом и о ее влиянии на их тягу исследован. Так, согласно [11, 12], учет умеренной неравномерности потока в минимальном сечении не оказывает практически никакого влияния на оптимальное профилирование их сверхзвуковых частей. С другой стороны, как показано в [13–15], такая неравномерность может быть фактором, увеличивающим тягу сопел с осевым входом. Вопрос о влиянии неравномерности потока в минимальном сечении на профилирование тарельчатых сопел и их тягу требует специального исследования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 96-01-01825, 99-01-01211 и 96-15-96156).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крайко А.Н., Теляковский А.С., Тилляева Н.И. Профилирование оптимального контура сверхзвукового сопла при значительном повороте потока // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 10. С. 1444–1460.
2. Пирумов У.Г., Росляков Г.С. Газовая динамика сопел. М.: Наука, 1990. 364 с.
3. Rommel T., Hagemann G., Schley C.-A., Krulle G., Manski D. Plug nozzle flowfield analysis // J. Propulsion and Power. 1997. V. 13. № 5. P. 629–634.

4. *Hagemann G., Immich H., Nguyen T.V., Dumnov G.E.* Advanced rocket nozzles // J. Propulsion and Power. 1998. V. 14. № 5. P. 620–634.
5. *Baftalovskii S.V., Kraiko A.N., Tillyayeva N.I.* Optimal design of self-controlled spike nozzles and their thrust determination at start // AIAA 9th Intern. Space and Hypersonic Systems and Technologies Conf. Norfolk, 1999. AIAA 99-4955. 11 p.
6. *Бафталовский С.В., Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* Профилирование авторегулируемых сопел с центральным телом, оптимальных при работе в пустоте, и определение их тяги на старте с Земли // Избранные труды XXII научных чтений по космонавтике. М.: Изд-во "Война и мир", 1999. С. 116–129.
7. *Крайко А.Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
8. *Крайко А.Н., Шеломовский В.В.* Профилирование осесимметричных и плоских сопел, реализующих радиальный сверхзвуковой поток // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 1. С. 118–124.
9. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е.* О роли ограничения на длину при построении тел минимального сопротивления // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 822–837.
10. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е.* О построении симметричных профилей, оптимальных в сверх- и гиперзвуковом потоке при произвольных изопериметрических условиях // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 931–946.
11. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* Об учете неравномерности потока в минимальном сечении при оптимальном профилировании расширяющейся части сопла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 184–186.
12. *Стернин Л.Е.* О применимости некоторых упрощающих допущений при профилировании оптимальных ракетных сопел // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 2. С. 170–174.
13. *Крайко А.Н., Соколов В.Е.* Об удельном импульсе потока в минимальном сечении сопла Лаваля и в выходном сечении сужающегося сопла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 1. С. 186–188.
14. *Щербаков С.А.* О тяге сужающегося сопла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 6. С. 181–183.
15. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И., Щербаков С.А.* Сравнение интегральных характеристик и формы профилированных контуров сопел Лаваля с "плавным" и с "внезапным" сужениями // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 129–137.

Москва

Поступила в редакцию
25.X.1999