

УДК 533.6.011.34

© 2000 г. В.В. ГУЛЯЕВ, М.И. НИШТ, В.М. ПОПОВ

## ЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АЭРОДИНАМИКИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕСУЩИХ СИСТЕМ В НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Рассмотрен комплекс линейных математических моделей процессов неустановившегося обтекания пространственных несущих систем дозвуковым потоком сжимаемого газа, позволяющих находить аэродинамические передаточные функции во всей их области определения по числам Маха, Струхала и декремента. Сформулированы соответствующие краевые задачи для уравнений Лапласа и Гельмгольца и способ их сведения к системам сингулярных интегральных уравнений. Рассмотрены вопросы построения и математического обоснования метода численного решения указанных систем, являющегося развитием метода дискретных особенностей применительно к исследуемому классу задач. Приведены примеры расчетов.

Формы большинства современных и перспективных летательных аппаратов таковы, что на основных эксплуатационных режимах полета их аэродинамические характеристики могут с достаточной для практических приложений точностью определяться на основе тех или иных линейризованных подходов к моделированию процессов обтекания, а сами летательные аппараты схематизироваться набором тонких несущих поверхностей в общем случае пространственной конфигурации. Это обстоятельство обуславливает интерес к построению и развитию различных линейных математических моделей нестационарной аэродинамики пространственных несущих систем [1, 2] и их широкое использование в рамках всевозможных комплексных проблем, таких, как аэроупругость, аэроавтоупругость, аналитическое конструирование систем автоматического управления, оптимизация облика летательного аппарата и др. [3]. Линейные нестационарные аэродинамические характеристики летательного аппарата могут быть представлены двумя способами: с одной стороны – в виде переходных функций, и с другой – в виде аэродинамических передаточных функций (коэффициентов аэродинамических производных). В соответствии с этим возможны и два типа математических моделей линейной нестационарной аэродинамики. Модели, существующие в настоящее время [1, 2], позволяют определять аэродинамические переходные функции и коэффициенты аэродинамических производных при дозвуковых скоростях в частном случае весьма малых чисел Струхала и нулевого декремента. Непосредственное определение аэродинамических передаточных функций путем решения соответствующих краевых задач является до сих пор нерешенной проблемой, требующей проведения фундаментальных теоретических исследований.

**1. Постановка задачи.** Задача расчета обтекания системы несущих поверхностей неустановившимся дозвуковым потоком сжимаемого газа решается при следующих предположениях. Среда считается идеальной, ее движение баротропным и потенциальным всюду, кроме несущих поверхностей и их следа, массовые силы отсутствуют. Обтекание считается плавным, безотрывным и не сопровождается возникновением кризисных явлений (отрывы потока, местные скачки уплотнения и т.п.). Возмущения предполагаются малыми, что позволяет линейризовать задачу, пренебре-

гая квадратичными членами в интеграле Коши – Лагранжа и считая скорость распространения возмущений постоянной.

Рассматривается движение системы тонких несущих поверхностей в безграничной, покоящейся на бесконечности среде со средней дозвуковой скоростью  $u_0$ , направленной вдоль оси  $O\xi$  связанной системы координат. Движение сопровождается малыми изменениями кинематических параметров, к числу которых относятся углы атаки и скольжения, безразмерные скорости крена, рыскания и тангажа, а также безразмерные параметры, характеризующие масштабы деформаций несущих поверхностей и атмосферных порывов известного вида.

При сделанных предположениях задача сводится к отысканию потенциала возмущенных скоростей, удовлетворяющего волновому уравнению [1, 2], условиям непротекания на несущих поверхностях, Чаплыгина – Жуковского на их задних кромках, непрерывности давления на вихревой пелене и затухания возмущений на бесконечности.

Считая, что кинематические параметры бесконечно долго изменяются по закону  $q(\tau) = \text{Re}[q^* \exp(p\tau)]$ , можно показать [4], что задача отыскания передаточной функции возмущенного потенциала  $\varphi(r, p) = \varphi_r(r, \lambda^*, p^*) + i\varphi_i(r, \lambda^*, p^*)$  может быть сведена к краевой для функции  $\psi$ , связанной с  $\varphi$  соотношением

$$\varphi(r, p) = k^{-2} \psi(r, p) \exp(-\omega^* \xi), \quad \omega^* = \chi + i\omega = M_\infty^2 k^{-2} p, \quad k^2 = 1 - M_\infty^2$$

где  $q^* = q_r + iq_i$  – комплексная амплитуда любого из указанных кинематических параметров,  $p = \lambda^* + ip^*$  – комплексная частота,  $\lambda^* > 0$  – декремент затухания,  $p^* > 0$  – число Струхалея (величина  $p^*$  – безразмерная частота, связанная с числом Струхалея соотношением  $p^* = 2\pi Sh$ , однако в силу их совпадения с точностью до множителя сохраним за ней это название),  $\tau$  – безразмерное время,  $r = i\xi + j\eta + k\zeta$  – радиус-вектор точки в связанной системе координат  $O\xi\eta\zeta$ ;  $i, j, k$  – орты осей указанной декартовой системы координат.

Использование преобразования Прандтля – Глауэрта приводит задачу отыскания функции  $\psi$  к решению уравнения Гельмгольца с комплексным волновым числом

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_M^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta_M^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta_M^2} + v^2 \psi = \Delta \psi + v^2 \psi = 0 \quad (1.1)$$

$$v = v_r + iv_i, \quad v_r = M_\infty k^{-2} p^*, \quad v_i = -M_\infty k^{-2} \lambda^*$$

Граничные условия задаются на преобразованных несущих поверхностях

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial n_M} = H_q \exp(\chi \xi_M) \cos(\omega \xi_M), \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial n_M} = H_q \exp(\chi \xi_M) \sin(\omega \xi_M) \quad (1.2)$$

где  $H_q$  – функции точек несущих поверхностей, соответствующие тому или иному из кинематических параметров (в задачах о воздействии порывов в условии (1.2) вместо константы  $\omega^*$  входит величина  $\sigma^* = \varepsilon + i\sigma$ , где  $\varepsilon = \lambda^*/k^2$ ,  $\sigma = p^*/k^2$ ). На вихревой пелене величина разрыва функции  $\psi$  должна удовлетворять соотношению

$$\Delta \psi = \Delta \psi^* \exp(\sigma^* \xi'_M) \quad (1.3)$$

где  $\xi'_M = \xi_M - \xi_M^*$ ,  $\xi_M$  и  $\xi_M^*$  – координаты произвольной точки вихревой пелены и точки на кромке несущей поверхности, откуда эта пелена сходит. Кроме того, функция  $\psi$  должна удовлетворять условиям Чаплыгина – Жуковского и затухания возмущений на бесконечном удалении от несущих поверхностей и следа за ними.

Поставленная краевая задача сформулирована для случая, когда  $M_\infty \neq 0$ ,  $\lambda^* \neq 0$  и  $p^* \neq 0$ .

№ задачи	$M_\infty$	$p^*$	$\lambda^*$	Параметры задачи	Тип уравнения
1	$M_\infty = 0$	$p^* = 0$	$\lambda^* = 0$	$v_r = v_i = \chi = \omega = \varepsilon = \sigma = 0$	$\Delta\psi = 0$
2	$M_\infty = 0$	$p^* = 0$	$\lambda^* \neq 0$	$v_r = v_i = \chi = \omega = \sigma = 0, \varepsilon = \lambda^*$	$\Delta\psi = 0$
3	$M_\infty = 0$	$p^* \neq 0$	$\lambda^* = 0$	$v_r = v_i = \chi = \omega = \varepsilon = 0, \sigma = p^*$	$\Delta\psi = 0$
4	$M_\infty = 0$	$p^* \neq 0$	$\lambda^* \neq 0$	$v_r = v_i = \chi = \omega = 0, \varepsilon = \lambda^*, \sigma = p^*$	$\Delta\psi = 0$
5	$M_\infty \neq 0$	$p^* = 0$	$\lambda^* = 0$	$v_r = v_i = \chi = \omega = \varepsilon = \sigma = 0$	$\Delta\psi = 0$
6	$M_\infty \neq 0$	$p^* = 0$	$\lambda^* \neq 0$	$v_r = \omega = \sigma = 0,$ $\chi = -v_i M_\infty = \varepsilon M_\infty^2 = M_\infty^2 \lambda^* / k^2$	$\Delta\psi_r - v_i^2 \psi_r = 0,$ $\Delta\psi^{\dot{q}} - v_i^2 \psi^{\dot{q}} = 2 \frac{M_\infty^2}{k^4} \psi_r$
7	$M_\infty \neq 0$	$p^* \neq 0$	$\lambda^* = 0$	$v_r = \chi = \varepsilon = 0,$ $\omega = v_r M_\infty = \sigma M_\infty^2 = M_\infty^2 p^* / k^2$	$\Delta\psi + v_r^2 \psi = 0$
8	$M_\infty \neq 0$	$p^* \neq 0$	$\lambda^* \neq 0$	$\omega = v_r M_\infty = \sigma M_\infty^2 = M_\infty^2 p^* / k^2,$ $\chi = -v_i M_\infty = \varepsilon M_\infty^2 = M_\infty^2 \lambda^* / k^2$	$\Delta\psi + v^2 \psi = 0,$ $v = v_r + iv_i$

В таблице приведены уравнения и значения параметров задачи в различных предельных случаях. Граничные условия при этом можно получить из соотношений (1.2) и (1.3). Поскольку число определяющих параметров равно трем и каждый из них может быть либо равен нулю, либо отличен от нуля, то число различных вариантов задач равно восьми. Заметим, что при  $p^* \rightarrow 0$  мнимая часть функции  $\psi$   $\psi_i \equiv 0$ , поэтому указанный случай является особым и нужно исследовать функцию  $\psi^{\dot{q}} = \psi_i / p^*$  – производную по кинематическому параметру "с точкой", а соответствующие уравнения получать с помощью предельного перехода. При этом оказывается, что действительная часть  $\psi_r$  может быть определена независимо от мнимой  $\psi_i$ , а  $\psi^{\dot{q}}$  – после нахождения  $\psi_r$ . Равенство нулю числа Маха и декремента к вырождению задачи не приводит, поэтому соответствующие этим пределам уравнения и условия получаются из (1.1) – (1.3) простой подстановкой нулевых значений соответствующих параметров.

Из указанных восьми типов краевых задач для двух были разработаны эффективные численные методы решения (задачи 1 и 5) [1, 2] и для одной построен метод решения применительно к монопланам крыльям (задача 3) [5].

Все задачи, относящиеся к движению в несжимаемой жидкости ( $1 - 4 - M_\infty = 0$ ), сводятся к решению уравнения Лапласа. К этому же уравнению приводит и задача о движении в сжимаемом газе при  $p^* \rightarrow 0$  и  $\lambda^* = 0$  (задача 5). Для задач 5–8  $M_\infty \neq 0$ . Остальные задачи о движении в сжимаемом газе сводятся к решению уравнения Гельмгольца: с мнимым волновым числом (задача 6) (при этом задача для производных по кинематическим параметрам "с точкой" приводится к неоднородному уравнению), с действительным волновым числом (задача 7) и с комплексным волновым числом (задача 8).

Если в результате решения краевой задачи определена функция  $\psi$ , то распределенные нагрузки, действующие в той или иной точке на несущей поверхности, могут быть определены с помощью интеграла Коши – Лагранжа. При  $p^* \neq 0$  для передаточной функции перепада давлений на тонкой несущей поверхности можно получить

$$\Delta p = \frac{2}{k^2} \exp(-\omega^* \xi_M) \left[ \sigma^* \Delta\psi - \frac{\partial \Delta\psi}{\partial \xi_M} \right]$$

В случае  $p^* \rightarrow 0$

$$\Delta p_r = \frac{2}{k^2} \exp(-\chi \xi_M) \left[ \varepsilon \Delta \Psi_r - \frac{\partial \Delta \Psi_r}{\partial \xi_M} \right]$$

$$\Delta p^q = \frac{2}{k^2} \exp(-\chi \xi_M) \left[ \frac{1}{k^2} \Delta \Psi_r + \varepsilon \Delta \Psi^q - \frac{\partial \Delta \Psi^q}{\partial \xi_M} - \left( \varepsilon \Delta \Psi_r - \frac{\partial \Delta \Psi_r}{\partial \xi_M} \right) \frac{M_\infty^2}{k^2} \xi_M \right]$$

Интегрированием распределенной нагрузки можно определить передаточные функции любых суммарных аэродинамических характеристик системы несущих поверхностей и ее элементов.

**2. Интегральные уравнения.** Исходя из вида фундаментального решения уравнения (1.1)

$$\delta(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\rho}) = \exp(-ivr)r^{-1}, \quad r = |\mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\rho}|$$

и соответствующей формулы Грина, решение краевой задачи можно построить, разместив на несущих поверхностях  $S_M$  и пелене  $\Sigma_M$  двойной слой интенсивности  $g(\boldsymbol{\rho})$  ( $g(\boldsymbol{\rho}) = g_r(\boldsymbol{\rho}) + ig_i(\boldsymbol{\rho})$ ,  $\boldsymbol{\rho} \in S_M \cup \Sigma_M$ ) [6]. Искомая функция  $\psi(\mathbf{r}_0)$  должна иметь непрерывную нормальную производную при переходе через тонкие, достаточно гладкие поверхности  $S_M$  и  $\Sigma_M$  в точках непрерывности нормали  $\mathbf{n}(\boldsymbol{\rho})$ .

Подстановка искомого решения  $\psi(\mathbf{r}_0)$  в виде потенциала двойного слоя интенсивности  $g(\boldsymbol{\rho})$  в граничное условие непротекания (1.2) приводит к интегральному уравнению относительно функции  $g(\boldsymbol{\rho})$ ,  $\boldsymbol{\rho} \in S_M$

$$\int_{S_M} g(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\partial}{\partial n_\rho} \left( \frac{e^{-iv|\mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\rho}|} \right) dS_\rho + \int_{\Sigma_M} g_\Sigma(\boldsymbol{\rho}_\Sigma) \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\partial}{\partial n_\rho} \left( \frac{e^{-iv|\mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\rho}_\Sigma|}}{|\mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\rho}_\Sigma|} \right) d\Sigma_\rho = 4\pi H_q e^{i\omega \xi_M(\mathbf{r}_0)} \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{r}_0 \in S_M$ ,  $g_\Sigma(\boldsymbol{\rho}_\Sigma)$ ,  $\boldsymbol{\rho}_\Sigma \in \Sigma_M$  — интенсивность двойного слоя на пелене, которая в соответствии с граничным условием (1.3) не является искомой величиной, а определяется величиной  $g(\boldsymbol{\rho})$ ,  $\boldsymbol{\rho} \in L$ , где  $L = S_M \cap \Sigma_M$  есть линия схода вихревых пелен,  $\xi_M(\mathbf{r}_0) = \xi_{M0}$  — координата  $\xi_M$  точки на поверхности  $S_M$  с радиус-вектором  $\mathbf{r}_0$ .

Обозначая  $|\mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\rho}|$  и  $|\mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\rho}_\Sigma|$  через  $r$ , а  $(\mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\rho})$  и  $(\mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\rho}_\Sigma)$  через  $\mathbf{r}$ , опуская аргументы функций и индексы величин, выполняя дифференцирование под знаками интегралов и разделяя действительные и мнимые части, из (2.1) можно получить систему интегральных уравнений

$$\int_S g_r e^{re} ds - \int_S g_i e^{im} ds + \int_L g_r^* dl \int_{\xi^*}^{\infty} f^{re} d\xi - \int_L g_i^* dl \int_{\xi^*}^{\infty} f^{im} d\xi = 4\pi H_q e^{i\omega \xi_0} \cos \omega \xi_0$$

$$\int_S g_r e^{im} ds + \int_S g_i e^{re} ds + \int_L g_r^* dl \int_{\xi^*}^{\infty} f^{im} d\xi + \int_L g_i^* dl \int_{\xi^*}^{\infty} f^{re} d\xi = 4\pi H_q e^{i\omega \xi_0} \sin \omega \xi_0 \quad (2.2)$$

$$f^{re} = e^{e\xi'} (e^{re} \cos \sigma \xi' - e^{im} \sin \sigma \xi'), \quad f^{im} = e^{e\xi'} (e^{im} \cos \sigma \xi' + e^{re} \sin \sigma \xi')$$

$$e^{re} = e^{v_i r} (c^{re} \cos v_r r + c^{im} \sin v_r r), \quad e^{im} = e^{v_i r} (c^{im} \cos v_r r - c^{re} \sin v_r r)$$

$$c^{re} = (1 - v_i r)w + (v_r^2 - v_i^2)(\mathbf{r}\mathbf{n}_0)\vartheta, \quad c^{im} = v_r r w + 2v_r v_i (\mathbf{r}\mathbf{n}_0)\vartheta$$

$$w = \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right), \quad \vartheta = \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right)$$

Функция  $\psi(\mathbf{r}_0)$ , определенная как потенциал двойного слоя с интенсивностью  $g(\rho)$ , являющейся решением системы интегральных уравнений (2.2), удовлетворяет уравнению (1.1) и всем условиям сформулированной краевой задачи и, значит, есть ее решение.

Полагая в (2.2) равными нулю число Маха и (или) декремент, можно получить системы интегральных уравнений, определяющих решение задачи обтекания системы несущих поверхностей во всех возможных случаях при конечных  $p^*$ .

В случае малых чисел  $p^*$  вместо функции  $g$ , следует искать производную интенсивности двойного слоя по кинематическому параметру с точкой –  $g^{\dot{q}}$ . Чтобы получить соответствующую данному случаю систему интегральных уравнений, следует разложить подынтегральные функции и правые части уравнений (2.2) в ряды Тейлора по числу  $p^*$  в окрестности  $p^* = 0$  и, ограничиваясь членами порядка малости не выше первого, подставить полученные соотношения в уравнения (2.2), а затем выполнить предельный переход  $p^* \rightarrow 0$ .

Указанные преобразования приводят к системе

$$\int_S g_r e_0^{re} ds + \int_L g_r^* dl \int_{\xi^*}^{\infty} f_0^{re} d\xi = 4\pi H_q e^{\chi \xi_0} \quad (2.3)$$

$$\int_S g^{\dot{q}} e_0^{re} ds + \int_L g^{\dot{q}*} dl \int_{\xi^*}^{\infty} f_0^{re} d\xi = 4\pi H_q e^{\chi \xi_0} \frac{M_\infty^2}{k^2} \xi_0 - \frac{M_\infty}{k^2} \int_S g_r e_0^{im} ds - \int_L g_r^* dl \int_{\xi^*}^{\infty} f_0^{im} d\xi$$

$$e_0^{re} = e^{v_i r} [(1 - v_i r)w - v_i^2 (\mathbf{r}\mathbf{n}_0) \vartheta], \quad e_0^{im} = e^{v_i r} v_i [r^2 w + (2 + v_i r)(\mathbf{r}\mathbf{n}_0) \vartheta]$$

$$f_0^{re} = e^{\varepsilon \xi'} e_0^{re}, \quad f_0^{im} = e^{\varepsilon \xi'} \left( \frac{M_\infty}{k^2} e_0^{im} + \frac{\xi'}{k^2} e_0^{re} \right)$$

Система интегральных уравнений (2.3) определяет решение поставленной задачи при  $M_\infty \neq 0$ ,  $\lambda^* \neq 0$  и  $p^* \rightarrow 0$ .

В рассматриваемом случае действительная часть  $\psi_r$  функции  $\psi(\mathbf{r}_0)$ , определенная как потенциал двойного слоя интенсивности  $g_r(\rho)$ , удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца с мнимым волновым числом. Зависимость  $g^{\dot{q}}$  от  $g_r$  при этом обусловлена как структурой уравнения, которому удовлетворяет функция  $\psi^{\dot{q}}(\mathbf{r}_0)$  – неоднородного уравнения Гельмгольца с мнимым волновым числом и правой частью, зависящей от функции  $\psi_r(\mathbf{r}_0)$  (второе слагаемое правой части второго уравнения (2.3)), так и условиями на вихревой пелене (третье слагаемое правой части второго уравнения той же системы).

При нулевом декременте ( $\lambda^* = 0$ )  $g_r$  и  $g^{\dot{q}}$  задают потенциалы, удовлетворяющие уравнению Лапласа, зависимость  $g^{\dot{q}}$  от  $g_r$  в этом случае определяется условиями на вихревой пелене. При  $\lambda^* = 0$   $g_r = g^q$  и первое уравнение системы (2.3) по существу является уравнением задачи об обтекании несущей системы стационарным потоком сжимаемого газа.

Важной особенностью решаемой задачи при малых числах  $p^*$  является то, что при любых значениях  $M_\infty$  и  $\lambda^*$  функции  $g_r$  могут быть найдены независимо от производных  $g^{\dot{q}}$ , а последние в свою очередь могут быть определены как решения тех же уравнений, но с другими правыми частями, куда входят слагаемые, зависящие от решения задачи для  $g_r$ .

Все полученные в настоящей работе интегральные уравнения содержат интегралы, ядра которых имеют сильные особенности и поэтому относятся к классу сильно сингулярных (гиперсингулярных) интегральных уравнений первого рода [7].

Анализ интегральных уравнений показывает, что при всем многообразии задач определения аэродинамических передаточных функций системы несущих поверхностей при дозвуковых скоростях фактически различными с точки зрения решения оказываются задачи, соответствующие случаям весьма малых и конечных чисел  $p^*$ . Оказывается, что при  $p^* \neq 0$  действительные и мнимые части интенсивности двойного слоя находятся совместно, а при  $p^* \rightarrow 0$  возможно сначала независимо определить  $g_r$ , а затем, используя решение для действительных частей, вычислить коэффициенты аэродинамических производных интенсивности двойного слоя по кинематическим параметрам с точками.

**3. Численный метод.** Существо метода численного решения интегральных уравнений и их систем заключается в замене входящих в уравнения интегралов их представлениями с помощью тех или иных квадратурных формул. Требуя выполнения аппроксимированных таким образом уравнений в конечном числе контрольных точек, можно редуцировать интегральные уравнения к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений искомой функции в этих точках. Эффективность численного алгоритма определяется, с одной стороны, свойствами решаемого интегрального уравнения, с другой – выбором квадратурных формул и расположением точек коллокации.

Пусть преобразованная в соответствии с правилом Прандтля – Глауэрта система несущих поверхностей  $S_M$  разбита на  $N$  непересекающихся областей (панелей) традиционным для метода дискретных вихрей с замкнутыми вихревыми рамками [8] способом так, что

$$S = \bigcup_{j=1}^N S_j, \quad S_j \cap S_k = \partial S_j \cap \partial S_k, \quad j \neq k$$

Для удобства записи квадратурных формул и систем линейных алгебраических уравнений численного метода из  $N$  панелей выделяются те, которые непосредственно примыкают к линии схода вихревых пелен  $L$ . Если их число равно  $m$ , то остальных панелей –  $n$ , так что  $N = n + m$ . Все параметры, относящиеся к указанным  $m$  панелям, имеют индекс "\*". Каждой панели разбиения поверхностей  $S_M$  и  $\Sigma_M$  ставится в соответствие контрольная точка, которая размещается, например, в центре масс контура панели.

Полубесконечная поверхность вихревой пелены заменяется ее начальным участком конечной длины, поскольку подынтегральные функции быстро убывают по мере движения вдоль пелены.

Считая, что  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_i$ , где  $i$  – номер некоторой контрольной точки, интегралы из (2.2) представим квадратурными формулами вида (с учетом обозначений –  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ ,  $\Gamma_j = g_j = g(\mathbf{r}_j)$ )

$$\int_S g e^{-i\mathbf{v}\mathbf{r}} \left[ (1 + i\mathbf{v}\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n_i} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) + v^2 (\mathbf{r}\mathbf{n}_i) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dS \approx \sum_{j=1}^N \Gamma_j e^{-i\mathbf{v}\mathbf{r}_{ij}} [(1 + i\mathbf{v}\mathbf{r}_{ij}) W_{ij} + v^2 (\mathbf{r}_{ij}\mathbf{n}_i) \Theta_{ij}] \quad (3.1)$$

$$\int_L g^* dl \int_{\xi^*}^{\infty} e^{\sigma^* \xi'} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{r}} \left[ (1 + i\mathbf{v}\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n_i} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) + v^2 (\mathbf{r}\mathbf{n}_i) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\xi \approx \sum_{j=1}^m \Gamma_j^* \sum_{k=1}^{n_j} e^{\sigma^* \xi'_{jk}} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{r}_{jk}} [(1 + i\mathbf{v}\mathbf{r}_{jk}) W_{jk} + v^2 (\mathbf{r}_{jk}\mathbf{n}_i) \Theta_{jk}] \quad (3.2)$$

В формуле (3.2)  $j$  – номер панели, примыкающей к линии  $L$ ;  $\mathbf{r}_j^*$  – радиус-вектор контрольной точки этой панели; индексы  $j$  и  $k$ , используемые совместно, идентифицируют  $k$ -ю панель  $j$ -й полосы пелены,  $\mathbf{r}_{jk}$  – радиус-вектор соответствующей ей конт-

рольной точки

$$\xi'_{jk} = (\mathbf{r}_{jk} - \mathbf{r}_j^*)_{\xi}, \quad \mathbf{r}_{ijk} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{jk}, \quad \Gamma_j^* = \mathbf{g}_j^* = \mathbf{g}(\mathbf{r}_j^*)$$

$$W_{ij} = \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_i} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS_j, \quad \Theta_{ij} = \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS_j$$

Функции  $\Theta$  и  $W$  являются соответственно потенциалом двойного слоя постоянной интенсивности для уравнения Лапласа и его нормальной производной. При  $i = j$  интегралы, определяющие  $W$  и  $\Theta$ , являются сингулярными. Первый из них в этом случае понимается в смысле его конечной части по Адамару, а второй – в смысле его главного значения по Коши.

Подстановка представлений интегралов квадратурными формулами (3.1) и (3.2) в уравнение (2.2) позволяет получить систему линейных алгебраических уравнений, определяющую значения плотности двойного слоя в контрольных точках панелей разбиения.

Опуская квадратурные формулы для интегралов системы уравнений (2.3), аналогичные по смыслу таковым для интегралов системы (2.2), запишем системы линейных алгебраических уравнений, соответствующие случаю  $p^* \rightarrow 0$ ,  $M_{\infty} \neq 0$  и  $\lambda^* \neq 0$ , получим

$$\sum_{j=1}^n \Gamma_j^{re} E_{0ij}^{re} + \sum_{j=1}^m \Gamma_j^{re*} \left( E_{0ij}^{re} + \sum_{k=1}^{n_j} F_{0ijk}^{re} \right) = 4\pi H_{qi} e^{\chi \xi_i}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3)$$

$$\sum_{j=1}^n \Gamma_j^{\dot{q}} E_{0ij}^{re} + \sum_{j=1}^m \Gamma_j^{\dot{q}*} \left( E_{0ij}^{re} + \sum_{k=1}^{n_j} F_{0ijk}^{re} \right) = 4\pi H_{qi} e^{\chi \xi_i} \frac{M_{\infty}^2}{k^2} \xi_i -$$

$$- \frac{M_{\infty}}{k^2} \sum_{j=1}^n \Gamma_j^{re} E_{0ij}^{im} - \sum_{j=1}^m \Gamma_j^{re*} \left( \frac{M_{\infty}}{k^2} E_{0ij}^{im} + \sum_{k=1}^{n_j} F_{0ijk}^{im} \right), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.4)$$

$$F_{0ijk}^{re} = e^{\varepsilon \xi'_{jk}} E_{0ijk}^{re}, \quad F_{0ijk}^{im} = e^{\varepsilon \xi'_{jk}} \left( \frac{M_{\infty}}{k^2} E_{0ijk}^{im} + \frac{\xi'_{jk}}{k^2} E_{0ijk}^{re} \right)$$

$$E_{0ij}^{re} = e^{\nu_i r_{ij}} [(1 - \nu_i r_{ij}) W_{ij} - \nu_i^2 (\mathbf{r}_{ij} \mathbf{n}_i) \Theta_{ij}], \quad E_{0ij}^{im} = e^{\nu_i r_{ij}} [r_{ij}^2 W_{ij} + (2 + \nu_i r_{ij}) (\mathbf{r}_{ij} \mathbf{n}_i) \Theta_{ij}]$$

Системы линейных алгебраических уравнений (3.3) и (3.4) определяют приближенное решение интегральных уравнений (2.3).

Полагая в построенных квадратурных формулах и соответствующих системах линейных алгебраических уравнений  $M_{\infty} = 0$  и (или)  $\lambda^* = 0$ , можно получить системы, определяющие численные решения для всех вариантов рассматриваемой задачи.

Таким образом, предложенная методология построения квадратурных формул позволяет сформировать численный метод решения интегральных уравнений теории несущей поверхности в неустановившемся дозвуковом потоке сжимаемого газа, являющимся универсальным в том смысле, что с его помощью может быть решена любая из рассмотренных выше задач определения аэродинамических передаточных функций при дозвуковых скоростях.

**4. О сходимости квадратурных формул и численного метода.** При решении задачи Неймана с помощью потенциала двойного слоя получается сильно сингулярное интегральное уравнение относительно плотности скачка потенциала двойного слоя, которое в случае выполнения граничного условия на части плоскости  $S$  принимает вид

$$I(\mathbf{r}_i) = \int_S g(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n_i} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(-i\nu |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|} \right) ds = f(\mathbf{r}_i)$$

где интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару [7, 9].

Интеграл  $I(\mathbf{r}_i)$  существует во всех внутренних точках поверхности  $S$ , если функция  $g(\mathbf{r})$  имеет первые частные производные, удовлетворяющие условию Гельдера степени  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , т.е.  $\{g'_x, g'_y\} \subset H(\alpha)$  [7].

При  $v = 0$  для вычисления  $I(\mathbf{r}_i)$  во внутренних контрольных точках плоской поверхности используется квадратурная формула метода дискретных вихрей

$$I(\mathbf{r}_i) \approx \sum_{j=1}^N g(\mathbf{r}_j) \int_S \frac{\partial}{\partial n_i} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|} \right) ds = \sum_{j=1}^N g(\mathbf{r}_j) \int_S \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} ds$$

Если выполнено условие  $\{g'_x, g'_y\} \subset H(\alpha)$ , то при разбиении поверхности на квадратные панели  $S_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , доказана сходимость квадратуры со скоростью  $O(h^\alpha |\ln h|)$  (контрольная точка  $\mathbf{r}_j$  находится в центре квадрата  $S_j$ ) [7].

Анализ строгих математических доказательств сходимости квадратурных формул для гиперсингулярных интегралов проводится, как правило, при весьма сильных предположениях о характере поведения искомой функции (плотности двойного слоя) и жестких условиях, наложенных на алгоритм интегрирование дискретного представления поверхности, по которой ведется интегрирование [7].

Ниже формулируются теоремы, устанавливающие факт сходимости используемых квадратурных формул и численного метода, доказанные при ослаблении указанных выше условий и предположений.

А. Поверхность  $S$  будем считать ограниченной

$$\text{diam } S = D_S$$

Б. Фиксируем достаточно малое  $h$  так, чтобы

$$vh \ll 1$$

В. Положим, что  $S$  можно разбить на  $N$  непересекающихся областей, в каждой из которых можно выбрать контрольную точку  $\mathbf{R}_j$  так, чтобы

$$S = \bigcup_{j=1}^N S_j, \quad S_j \cap S_i = \partial S_j \cap \partial S_i, \quad j \neq i$$

$$\max_{\mathbf{r}, \xi} |\mathbf{r} - \xi| \leq h, \quad \{\mathbf{r}, \xi\} \in S_j, \quad j = 1, \dots, N$$

$$\forall \mathbf{r} \in S \setminus S_j \quad |\mathbf{r} - \mathbf{R}_j| > C_0 h, \quad j = 1, \dots, N$$

где  $C_0$  – положительная константа, не зависящая от  $h$ .

Г. Будем считать, что  $g(\mathbf{r})$  для всех  $\mathbf{r} \in S$  ограничена

$$|g(\xi)| \leq C_1$$

Положим для простоты, что поверхность состоит из одного плоского модуля и выполняется дополнительное условие.

Д. Функция плотности двойного слоя такова, что

$$|\nabla g(\mathbf{r})| \leq C_2, \quad |g(\mathbf{r}) - g(\xi) - (\nabla g(\xi), \mathbf{r} - \xi)| \leq m_g |\mathbf{r} - \xi|^2, \quad \{\mathbf{r}, \xi\} \subset S$$

Для нормальной компоненты вектора градиента потенциала двойного слоя на плоской поверхности запишем

$$I(\mathbf{r}_i) = \int_S g(\mathbf{r}) \frac{\exp(-iv|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} (1 + iv|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|) dS$$

В указанных предположениях (согласующихся с [7]) справедлива следующая теорема.



*Теорема 1.* При выполнении предположений А–Д выберем достаточно малое  $\delta$ , такое, что выполняется условие  $h \ll \delta \ll D_S$ . Пусть для рассматриваемого разбиения поверхности квадратура для метода дискретных вихрей сходится, тогда квадратурная формула модифицированного метода (для решения краевых задач для уравнения Гельмгольца) сходится, а именно

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_S g \frac{\exp(-iv\rho)(1+iv\rho)}{\rho^3} ds - \sum_{j=1}^N g_j \exp(-iv\rho_j)(1+iv\rho_j) \int_{S_j} \frac{ds}{\rho^3} \right| = 0$$

$$\rho = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|, \quad \rho_j = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, \quad \mathbf{r}_i \in \{\mathbf{R}_i, i = 1, \dots, N \mid \rho(\mathbf{R}_i, \partial S) \geq \delta\}$$

Рассмотрим теперь квадратурную формулу вида

$$S(\mathbf{r}_i) = \sum_{j=1}^N [(W_j(\mathbf{r}_i)g(\mathbf{r}_j) + (\mathbf{a}_j(\mathbf{r}_i), \nabla g(\mathbf{r}_j))) \exp(-iv|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)(1+iv|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) + v^2 g(\mathbf{r}_j)(\mathbf{a}_j(\mathbf{r}_i), \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \exp(-iv|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)]$$

$$W_j(\mathbf{r}_i) = \int_{S_j} \frac{dS}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3}, \quad \mathbf{a}_j(\mathbf{r}_i) = \int_{S_j} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} dS$$

*Теорема 2.* При выполнении условий А – Д для произвольной контрольной точки плоской поверхности  $S$  справедлива оценка

$$|I(\mathbf{r}_i) - S(\mathbf{r}_i)| \leq 2\pi h [m_g(1+vD_S) + (C_1 + C_2 h)v^2(3+vh) + C_1 M_2 + C_2(v^2 D_S + M_2 h) + m_g(1+vD_S + v^2 h D_S + M_2 h^2)] (1/C_0 + h/D_S)$$

$$M_2 = v^2(1+vD_S)$$

Пусть  $S$  – область на плоскости  $XOY$ . Обозначим  $\Gamma_j = g(\mathbf{r}_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , и рассмотрим  $N$ -мерный вектор  $\Gamma = \{\Gamma_j\}$ . Координаты  $(x, y)$  компонент численного вектора градиента  $\{\nabla_x g_j\}$  и  $\{\nabla_y g_j\}$  функции  $\nabla g(\mathbf{R}_j)$  в контрольных точках определим через матрицы численного дифференцирования  $D_x, D_y$

$$\nabla_x g = D_x \Gamma, \quad \nabla_y g = D_y \Gamma$$

Предположим, что для фиксированных  $S$  и  $g(\mathbf{R}_j)$  и произвольного сколь угодно малого  $h$  можно построить требуемое разбиение  $S$  и матрицы численного дифференцирования, которые с линейной точностью аппроксимируют непрерывное распределение градиента ( $M_3$  не зависит от  $h$ )

$$|\nabla g(\mathbf{r}_j) - \nabla g_j| \leq M_3 h$$

В контрольных точках  $\mathbf{r} - \mathbf{R}_i$  определим векторы

$$\mathbf{W}_1 = \{W_j(\mathbf{R}_i)E_j T_j\}, \quad \mathbf{A}_{1X} = \{a_{jX}(\mathbf{R}_i)E_j T_j\}, \quad \mathbf{A}_{1Y} = \{a_{jY}(\mathbf{R}_i)E_j T_j\}$$

$$A_2 = \{v^2((\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j, \mathbf{a}_j(\mathbf{R}_i))E_j)\}, \quad E_j = e^{-iv|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}, \quad T_j = 1 + iv|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|, \quad j = 1, \dots, N$$

Заменяя в  $S(\mathbf{r})$  аналитическое выражение градиента матричным представлением, получаем квадратурную формулу

$$S_1(\mathbf{R}_i) = (\mathbf{W}_1 + \mathbf{A}_{1X} D_x + \mathbf{A}_{1Y} D_y + A_2) \Gamma$$

Модуль разности  $|S - S_1|$  можно оценить

$$|S - S_1| \leq \frac{2\pi}{C_0} (1+vD_S) M_3 h$$

С учетом этого и теоремы 2 справедлива

*Теорема 3.* При выполнении условий А–Д квадратурная формула

$$S_1(\mathbf{R}_i) = (\mathbf{W}_1 + \mathbf{A}_{1X}\mathbf{D}_X + \mathbf{A}_{1Y}\mathbf{D}_Y + \mathbf{A}_2)\mathbf{\Gamma}$$

приближает непрерывное представление с первым порядком точности по  $h$

$$|I(\mathbf{R}_i) - S_1(\mathbf{R}_i)| = O(h)$$

Рассмотрим матрицу  $\Xi = \{\Xi_{ij}\}$ ,  $i$ -й строкой которой является вектор

$$(\mathbf{W}_1 + \mathbf{A}_{1X}\mathbf{D}_X + \mathbf{A}_{1Y}\mathbf{D}_Y + \mathbf{A}_2),$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_i, \quad i, j = 1, \dots, N$$

Под нормой матрицы  $\Xi$  будем понимать  $\|\Xi\| = \max_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^N |\Xi_{ij}|$ .

При  $\nu = 0$ ,  $D_X = 0$ ,  $D_Y = 0$  матрица  $\Xi$  будет невырожденной матрицей метода дискретных вихрей  $\mathbf{W} = \{W_{ij}\}$  с замкнутыми рамками, а норма ее обратной матрицы ограничена константой, не зависящей от  $h$  [10, 11]

$$\|\mathbf{W}^{-1}\| \leq \frac{D_S}{2\pi}$$

При малых  $\nu$  матрица  $\Xi$  мало отличается от  $\mathbf{W}$ .

*Теорема 4.* При выполнении условий А–Д и  $\nu D_S < 1$  справедливо

$$\|\Xi - \mathbf{W}\| < 2\pi\nu\sqrt{\nu D_S} + M_4 h$$

где  $M_4$  – положительная константа.

На основании изложенного выше и утверждения об ограниченности обратной матрицы метода дискретных вихрей доказывается

*Теорема 5.* Если интегральное уравнение  $I(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} \in S$ , имеет точное решение  $g_0(\mathbf{r})$ , то при выполнении условий теоремы 4 численное решение  $\mathbf{\Gamma} = S^{-1}\mathbf{b}$  (в контрольных точках) стремится к точному при  $h \rightarrow 0$  со скоростью  $O(h)$ .

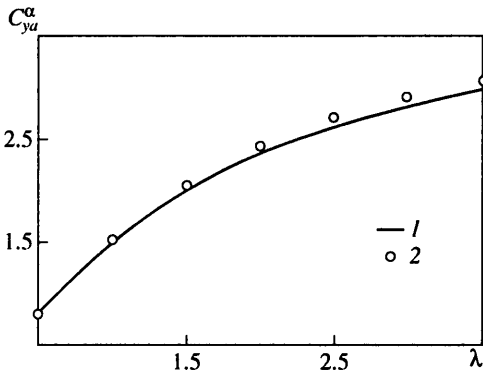
В заключение сделаем несколько замечаний. Во-первых, при практическом использовании изложенного выше подхода (для задач Неймана как для уравнения Лапласа ( $\nu = 0$ ), так и уравнения Гельмгольца) не обязательно учитывать все дополнительные члены, зависящие от вектора

$$\mathbf{a}_j(\mathbf{r}_i) = \int_{S_j} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} ds$$

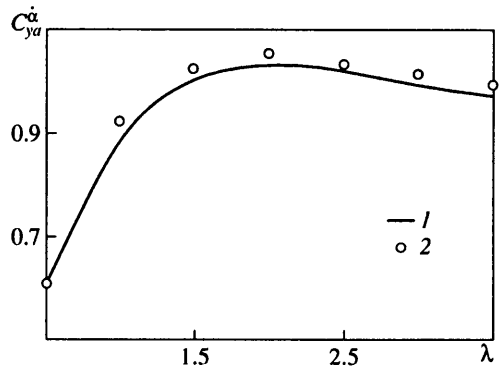
в квадратурной формуле. Достаточно учитывать их для  $j$ -й контрольной точки от всех ближайших к ней панелей, расстояние до которых не превосходит некоторого выбранного фиксированного значения, например  $3h$ .

Во-вторых, наличие особенности решения на границе области  $S$  (в первую очередь нарушается условие Д) безусловно ухудшает сходимость квадратурных формул. Однако оказалось, что получаемые решения имеют достаточную для практики точность. Проведенные численные расчеты линейных аэродинамических характеристик крыльев в дозвуковом потоке газа при гармонических изменениях кинематических параметров показали эффективность предложенного метода.

В-третьих, использование предложенных квадратур позволяет существенно расширить диапазон допустимых для практического расчета типов схематизации несущих поверхностей и формализовать требования к алгоритму выбора контрольных точек (например, желательно выбирать разбиения с максимально возможным параметром  $S_0$ ).



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Зависимости коэффициента  $C_{ya}^\alpha$  прямоугольных крыльев от удлинения  $\lambda$  при  $M_\infty = 0$  и  $p^* = 1$ : 1 – из [5], 2 – расчет

Фиг. 2. Зависимости коэффициента  $C_{ya}^{\alpha'}$  прямоугольных крыльев от удлинения  $\lambda$  при  $M_\infty = 0$  и  $p^* = 1$ : 1 – из [5], 2 – расчет

В-четвертых, для случая, когда поверхность  $S$  состоит из нескольких плоских модулей, предлагается квадратурная формула вида

$$S_2(\mathbf{R}_i) = (\mathbf{W}_1 + \mathbf{A}_{1X}\mathbf{D}_X + \mathbf{A}_{1Y}\mathbf{D}_Y + \mathbf{A}_2)\mathbf{\Gamma} + v^2\mathbf{A}_3\mathbf{\Theta}\mathbf{\Gamma}$$

где элементы матрицы  $\mathbf{\Theta}$  вычисляются по формуле

$$\theta_{ij} = \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{r}|} \right) ds$$

а компоненты  $N$ -мерного вектора  $\mathbf{A}_3$  – по формуле

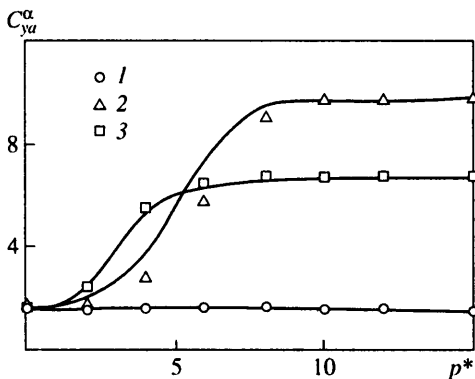
$$\mathbf{A}_3 = \{E_j(\mathbf{R}_i)(\mathbf{R}_i - \mathbf{R})_j, \mathbf{n}(\mathbf{R}_i)\}_{j=1, \dots, N}$$

Квадратура  $S_2(\mathbf{R}_i)$  с линейной точностью по мере дискретности  $h$  сходится в контрольных точках к исходному интегральному представлению  $I(\mathbf{r})$  для нормальной компоненты градиента потенциала двойного слоя, распределенного по  $S$ .

В-пятых, вопросы сходимости квадратур были проанализированы для случая действительного положительного волнового числа. Рассуждения, аналогичные изложенным выше, справедливы и для случаев мнимого и комплексного волновых чисел.

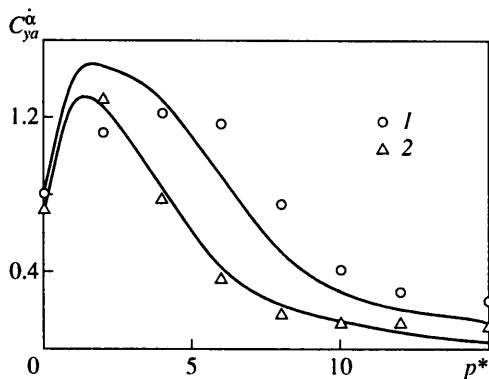
**5. Примеры расчетов.** С использованием описанных выше математических моделей были рассчитаны коэффициенты аэродинамических производных различных несущих элементов. Некоторые из полученных результатов продемонстрированы на фиг. 1–4. На фиг. 1, 2 приводятся производные коэффициента подъемной силы по углу атаки  $C_{ya}^\alpha$  (фиг. 1, точки 2) и по углу атаки с точкой  $C_{ya}^{\alpha'}$  (фиг. 2, точки 2) прямоугольных крыльев различных удлинений в несжимаемой среде при  $p^* = 1$ . Приведенные результаты 2 сравниваются с данными [5] (фиг. 1, 2, кривые 1), полученными с помощью численного метода, построенного на основе иных интегральных уравнений. Видно удовлетворительное согласование результатов во всем рассмотренном диапазоне удлинений  $\lambda$ .

На фиг. 3, 4 приводятся зависимости тех же производных от  $p^*$  при нескольких значениях  $M_\infty$  для прямоугольного крыла единичного удлинения. Приведенные ре-



Фиг. 3

Фиг. 3. Зависимости коэффициента  $C_{ya}^{\alpha}$  прямоугольного крыла единичного удлинения от числа Струхалия: 1 –  $M_{\infty} = 0$ ; 2 – 0,4; 3 – 0,6; кривые – из [1]; точки – расчет



Фиг. 4

Фиг. 4. Зависимости коэффициента  $C_{ya}^{\dot{\alpha}}$  прямоугольного крыла единичного удлинения от числа Струхалия: 1 –  $M_{\infty} = 0,4$ ; 2 – 0,4; 3 – 0,6; кривые – из [1]; точки – расчет

зультаты (фиг. 3, 4, точки) даны в сравнении с зависимостями [1] (фиг. 3, 4, кривые), которые получены с использованием переходных функций с помощью интеграла Дюамеля. Видно, что при удовлетворительном качественном согласовании характеристик имеет место их некоторое расхождение, особенно заметное для производной  $C_{ya}^{\dot{\alpha}}$  в диапазоне умеренных чисел  $p^*$ , которое тем больше, чем меньше  $M_{\infty}$ .

Указанное расхождение, по-видимому, связано с трудностями аппроксимации переходных функций при использовании интеграла Дюамеля для определения коэффициентов аэродинамических производных на дозвуковых скоростях из-за отсутствия достоверной информации о характере асимптотического поведения переходных функций при  $\tau \rightarrow \infty$  (в [1] предполагается, что переходные функции при больших  $\tau$  аппроксимируются экспонентами, тогда как их асимптотическое поведение имеет степенной характер). Максимальные погрешности при этом возможны в диапазоне небольших  $p^*$  при малых значениях  $M_{\infty}$ .

**Заключение.** Построены численные математические модели процессов обтекания пространственных несущих систем неустановившимся дозвуковым потоком сжимаемого газа, позволяющие находить аэродинамические передаточные функции указанных систем во всей их области определения по числам Маха, Струхалия и декремента. Показано, что соответствующие математические модели базируются на решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца с действительным, мнимым и комплексным волновыми числами, которые могут быть сведены к системам гиперсингулярных интегральных уравнений. Разработан метод численного решения интегральных уравнений, по существу являющийся развитием и обобщением метода дискретных особенностей на рассматриваемый класс аэродинамических задач. Строго доказана сходимость квадратурных формул численного метода и численного решения к точному при весьма слабых допущениях и предположениях о характере, свойствах и параметрах используемых расчетных схем. Предложена модификация квадратурных формул численного метода, позволяющая повысить порядок скорости его сходимости, точность и вычислительную эффективность.

С помощью разработанных математических моделей исследованы закономерности процессов обтекания несущих систем неустановившимся дозвуковым потоком сжимаемого газа и выявлены особенности их нестационарных линейных аэродинамических характеристик в широком диапазоне значений чисел Маха и Струхалия.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.
2. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. М.: Наука, 1975. 424 с.
3. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроупругость. М.: Наука, 1980. 383 с.
4. Гуляев В.В., Крыжов М.В., Подобедов В.А., Попов В.М. Численный метод решения краевых задач для уравнения Гельмгольца // *Авиац. пром-сть*, 1997. № 3–4. С. 11–14.
5. Моисеев Е.М. Влияние числа Струхалея на коэффициенты вращательных производных крыльев произвольной формы в плане при дозвуковых скоростях // *Тр. ЦАГИ. Аэродинамика неустановившихся движений*. Сб. ст. № 5. 1962. Вып. 854. С. 11–14.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
7. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО "Янус", 1995. 520 с.
8. Апаринов В.А., Дворак А.В. Метод дискретных вихрей с замкнутыми вихревыми рамками // *Тр. ВВИА им. Н.Е. Жуковского*, 1986. Вып. 1313. С. 424–432.
9. Дворак А.В., Попов В.М. К обоснованию численного решения краевых задач для уравнения Гельмгольца методом дискретных особенностей // *Тр. Тверского ун-та. Применение функционального анализа в теории приближений*. Тверь. 1998. Ч. 1. С. 83–95.
10. Дворак А.В., Попов В.М. Построение численного метода решения краевых задач для уравнения Гельмгольца // *Электромагнитные волны и электронные системы*, 1999. Т. 4. № 4. С. 21–26.
11. Дворак А.В. Невырожденность матрицы метода дискретных вихрей в задачах пространственного обтекания // *Тр. ВВИА им. Н.Е. Жуковского*, 1986. Вып. 1313. С. 441–453.

Москва

Поступила в редакцию  
30.VI.1999