

УДК 532.546 : 536.25

© 2000 г. М.М. РАМАЗАНОВ

КОНВЕКЦИЯ В ТОНКОМ ПОРИСТОМ КОЛЬЦЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПРИ НАКЛОННОМ ПОДОГРЕВЕ

Рассмотрена конвекция в тонком пористом кольце эллиптической формы, окруженном непроницаемым массивом пород. Предполагается, что геотермический градиент отклонен на некоторый угол α от вертикальной оси эллипса. В гидравлическом приближении выписано аналитическое решение задачи, в случае кругового кольца исследована устойчивость полученных решений. Приводится профиль тепловой аномалии во внешнем массиве, обусловленной конвекцией в контуре.

В работе [1], в частности, рассмотрена околоскритическая конвекция в пористом прямоугольнике при наклонном подогреве. В [2] получено интегродифференциальное уравнение нелинейной двухмерной конвекции жидкости в тонком пористом кольце, при заданной линейно растущей с глубиной температуре на границах. Показано, что в этом случае линии тока близки к окружностям. Там же для сравнения приводится одномерная модель с заданным коэффициентом теплообмена на границах. Из условия удовлетворительного совпадения решения в одномерном и двухмерном случаях получено численное значение безразмерного коэффициента теплообмена для одномерной модели. В [3] решена линейная двухмерная задача о конвекции в пористом кольце круговой формы, окруженном непроницаемым массивом пород. Показано, что первому критическому числу Рэлея соответствует течение, линии тока которого близки к окружностям. Из сказанного можно сделать вывод, что при линейно растущей с глубиной температуре на границах кольца или в окружающем массиве жидкость циркулирует вдоль окружности и конвекция может быть удовлетворительно описана с помощью одномерной модели.

В отличие от [2, 3] в настоящей работе рассматривается кольцо эллиптической формы, подогрев осуществляется под произвольным углом к вертикальной оси и не вводится коэффициент теплообмена. Работа полезна, например, в связи с исследованием конвекции в связанной системе насыщенных трещин в коровом слое Земли и вызванной ею тепловой аномалии на поверхности.

1. Постановка и решение задачи. Тонкое насыщенное пористое кольцо эллиптической формы, толщины h и с полуосями a, b расположено в вертикальной плоскости (фиг. 1). Пористый контур окружен непроницаемым массивом пород. Введем систему координат так, что ось y направлена вертикально вверх, а ось x по горизонтали вправо. При $y \rightarrow -\infty$ задан геотермический градиент, направленный под некоторым углом α к отрицательной полуоси y .

Выпишем необходимые уравнения. Во внутренней и внешней областях (в непроницаемых породах) имеем уравнение теплопроводности

$$\Delta T_1 = 0, \quad \Delta T_2 = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

Здесь T_1, T_2 – температура во внутренней и внешней областях соответственно.

Уравнения баланса импульса, массы и тепла в самом контуре запишем в гидравлическом приближении

$$w = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{dp}{ds} - \rho g t \right), \quad w = \text{const}$$

$$\rho C_p w \frac{dT}{ds} = \frac{\lambda}{h} \left[\frac{\partial T_2}{\partial n} - \frac{\partial T_1}{\partial n} \right] + \lambda_1 \frac{d^2 T}{ds^2} \quad (1.2)$$

Здесь w – средняя по толщине скорость фильтрации, T – средняя температура, k – проницаемость, ρ – плотность жидкости, C_p – удельная изобарическая теплоемкость жидкости, λ – теплопроводность непроницаемых пород, λ_1 – эффективная теплопроводность насыщенной пористой среды, \mathbf{g} – вектор ускорения свободного падения, \mathbf{t} – единичный вектор вдоль контура, s – координата длины вдоль контура, n – координата длины вдоль нормали к контуру. Будем рассматривать приближение Буссинеска $\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$, где ρ_0 , T_0 – характерные температура и плотность, β – коэффициент теплового расширения.

В третьем уравнении (1.2) ввиду малости h/b будем пренебрегать вторым членом справа. При необходимости этот член может быть учтен. Можно учесть также квадратичный инерционный член в уравнении движения (1.2).

Приведем уравнения (1.1), (1.2) к безразмерному виду. Для этого введем следующие характерные масштабы: h – длины, γb – температуры (γ – геотермический градиент), $\lambda/\rho_0 C_p h$ – скорости, $\rho_0 g \beta \gamma b^2$ – давления.

Сохраняя обозначения, уравнения (1.1), (1.2) запишутся в безразмерном виде

$$\Delta T_1 = 0, \quad \Delta T_2 = 0$$

$$w = -\frac{dp}{ds} + \text{Re}_z \mathbf{t}, \quad w = \text{const}, \quad w \frac{dT}{ds} = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial T_2}{\partial n} - \frac{\partial T_1}{\partial n} \right] \quad (1.3)$$

$$R = \frac{k \rho_0 C_p g \beta \gamma b^2}{\lambda \mu}$$

Здесь R – фильтрационное число Рэлея, \mathbf{e}_z – единичный вектор, направленный против \mathbf{g} .

Интегрируя уравнение движения в (1.3) по замкнутому контуру, исключим давление и получим

$$w = \frac{R}{L} \oint T \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t} ds \quad (1.4)$$

где L – длина контура.

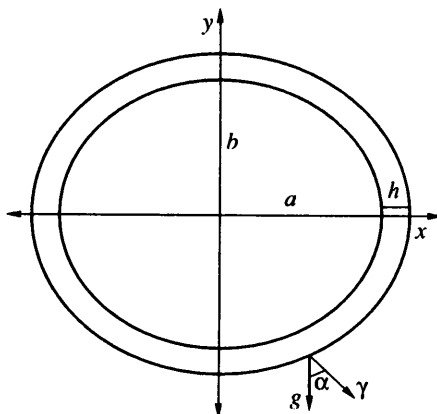
Запишем систему (1.3), в которой уравнение движения возьмем в виде (1.4), в координатах эллиптического цилиндра u, v [4]

$$x = c \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = c \operatorname{sh} u \sin v, \quad c^2 = a^2 - 1 \quad (a \geq 1)$$

$$x = c \operatorname{sh} u \cos v, \quad y = c \operatorname{ch} u \sin v, \quad c^2 = 1 - a^2 \quad (a \leq 1)$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial v^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial v^2} = 0, \quad w = \frac{R}{L} \int_0^{2\pi} T N \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t} dv$$

$$w \frac{dT}{dv} = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial T_2(u_0, v)}{\partial u} - \frac{\partial T_1(u_0, v)}{\partial u} \right], \quad N = \sqrt{1 + c^2 \sin^2 v} \quad (1.5)$$



Фиг. 1. Модель задачи

Здесь $u = u_0$ – фиксирует контур.

Граничные условия:

$$T = T_1 = T_2, \quad u = u_0$$

$$\{T, T_1, T_2\}(v + 2\pi) = \{T, T_1, T_2\}(v)$$

$$T \rightarrow T_0, \quad u \rightarrow \infty; \quad T_0 = -\cos \alpha y + \sin \alpha x \quad (1.6)$$

Здесь T_0 – температура при механическом равновесии.

Будем искать решения T , T_1 и T_2 в виде

$$T = T_0 + c_1 \sin v + c_2 \cos v$$

$$T_1 = T_0 + [\operatorname{ch}(u - u_0) + p_1 \operatorname{sh}(u - u_0)]c_1 \sin v + [\operatorname{ch}(u - u_0) + p_2 \operatorname{sh}(u - u_0)]c_2 \cos v \quad (1.7)$$

$$T_2 = T_0 + \exp(-u + u_0)(c_1 \sin v + c_2 \cos v)$$

Здесь c_1, c_2 – произвольные постоянные. Из (1.7) видно, что решение во внутренней области T_1 неоднозначно, так как p_1 и p_2 не определены. С целью выделения единственного регулярного решения внутренней задачи применим к T_1 первую формулу Грина для гармонических функций [5]

$$\int_0^{2\pi} dv \int_0^{u_0} \left[\left(\frac{\partial T_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_1}{\partial v} \right)^2 \right] du = \int_0^{2\pi} \left(T_1 \frac{\partial T_1}{\partial u} \right) (u_0, v) dv \quad (1.8)$$

Подставляя T_1 из (1.7) в (1.8) и приравнявая нулю выражения при c_1 и c_2 , получим единственные значения p_1 и p_2 ($p_1 = a, p_2 = 1/a$). Далее подставляя T, T_1 и T_2 из (1.7) в последнее уравнение (1.5) для c_1, c_2 получим выражения

$$c_1 = \frac{aQ^2}{aQ^2 + (1+a)^2} \left(\cos \alpha - \frac{1+a}{Q} \sin \alpha \right)$$

$$c_2 = \frac{aQ^2}{aQ^2 + (1+a)^2} \left(-a \sin \alpha + \frac{1+a}{Q} \cos \alpha \right) \quad (1.9)$$

Здесь $Q = hw$ – расход жидкости вдоль контура.

Подставляя T из (1.7) в уравнение движения (1.5) с учетом (1.9) для расхода жидкости (или средней скорости) получим уравнение

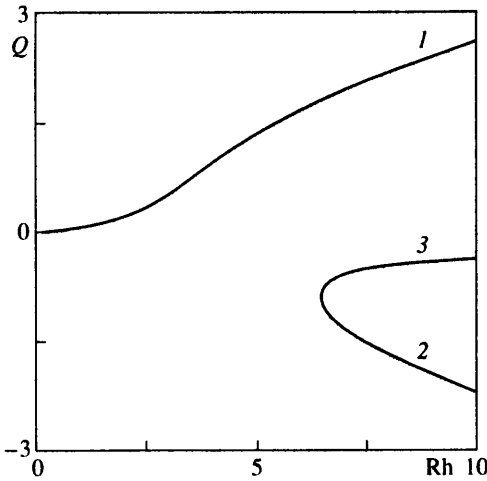
$$Q^3 + (1+a) \left[\frac{1+a}{a} - \frac{\pi Rh}{L} \cos \alpha \right] Q - \frac{\pi Rh}{L} (1+a)^2 \sin \alpha = 0 \quad (1.10)$$

Таким образом (1.10), (1.9) и (1.7) дают искомое решение задачи. При $\alpha < \pi/2$ (1.10) имеет три решения (фиг. 2, 3), а при $\alpha \geq \pi/2$ – одно.

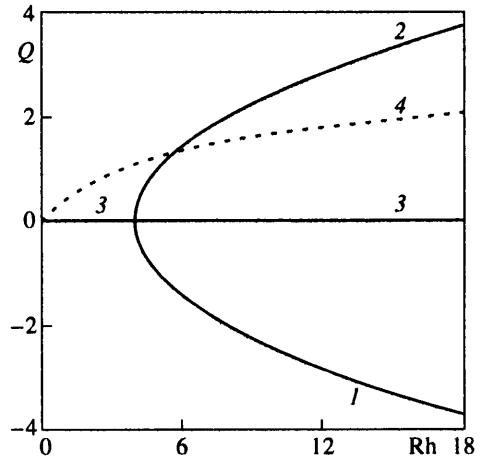
Ниже движение назовем "правильным", если оно (независимо от α) имеет место при сколь угодно малых числах Рэлея, и "неправильным" в противном случае. На фиг. 2 кривая 1 соответствует "правильному" направлению циркуляции ($Q > 0$), а кривые 2, 3 – "неправильному" ($Q < 0$). При $\alpha = 0$ нетривиальное решение возможно лишь при $R > R_c$ (фиг. 3), где

$$R_c h = \frac{L(1+a)}{\pi a} \quad (1.11)$$

В случае кругового кольца ($a = 1, L = 2\pi$), $R_c h = 4$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимость расхода жидкости от числа Рэлея при $a = 1,2$, $\alpha = 0,1$. "Правильное" направление циркуляции (кривая 1), "неправильное" направление циркуляции (2, 3)

Фиг. 3. Зависимость расхода жидкости от числа Рэлея при $a = 1$, $\alpha = 0$ (кривые 1, 3); $\alpha > \pi/2$ (кривая 4)

Аномалию теплового потока во внешнем массиве на некотором расстоянии H от центра контура, обусловленную конвекцией, можно найти с помощью T_2 (1.7). Для числа Нуссельта имеем

$$Nu = \frac{\partial T_2}{\partial y} = \frac{\partial T_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad y = H$$

2. Устойчивость стационарных решений. Исследуем устойчивость трех стационарных решений (1.10) в том же гидравлическом приближении, в частном случае кругового кольца. В нестационарном случае для кругового кольца уравнения (1.5), (1.6) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \Delta T_1, \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} = \Delta T_2, \quad w = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} T \cos \varphi d\varphi \\ b \frac{\partial T}{\partial t} + w \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial T_2(1, \varphi)}{\partial r} - \frac{\partial T_1(1, \varphi)}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$T = T_1 = T_2, \quad r = 1$$

$$\{T, T_1, T_2\}(\varphi + 2\pi) = \{T, T_1, T_2\}(\varphi)$$

$$T \rightarrow T_0, \quad r \rightarrow \infty$$

Здесь r, φ – полярные координаты, $b = C/\rho_0 C_p$, C – эффективная теплоемкость единицы объема насыщенной среды.

Будем искать решение (2.1) в виде малых поправок к стационарному решению

$$w = w_s + e^{-\omega t} G, \quad T = T_s + e^{-\omega t} \theta, \quad T_i = T_{is} + e^{-\omega t} \theta_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.2)$$

Здесь ω – декремент затухания, индекс s относится к стационарному решению.

Подставляя (2.2) в (2.1), после линеаризации получим задачу $\Delta\theta_1 = -\omega\theta_1$, $\Delta\theta_2 = -\omega\theta_2$, $-\omega b\theta + w_s \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} + G \frac{\partial T_s}{\partial\varphi} = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial\theta_2(1, \varphi)}{\partial r} - \frac{\partial\theta_1(1, \varphi)}{\partial r} \right]$

$$G = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta \cos \varphi d\varphi \quad (2.3)$$

$$\theta = \theta_1 = \theta_2, \quad r = 1, \quad \{\theta, \theta_1, \theta_2\}(\varphi + 2\pi) = \{\theta, \theta_1, \theta_2\}(\varphi), \quad \theta \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

Задача (2.3) имеет аналитическое решение, при этом θ_1 и θ_2 находятся в виде функций Бесселя первого рода при $\omega \leq 0$ и модифицированных функций Бесселя при $\omega \geq 0$. В результате для декремента ω получим уравнение:

$$\omega bh + \sqrt{\omega} \left(\frac{g_1'(\sqrt{\omega})}{g_1(\sqrt{\omega})} - \frac{f_1'(\sqrt{\omega})}{f_1(\sqrt{\omega})} \right) + m(Q, \alpha) = 0 \quad (2.4)$$

$$m^2 - \frac{(2 - Q \operatorname{tg} \alpha) Q}{Q + 2 \operatorname{tg} \alpha} m + 2Q^2 = 0$$

Здесь $g_1(\sqrt{\omega})$, $f_1(\sqrt{\omega})$ – функции Бесселя первого порядка, штрих означает производную, Q – стационарное решение, определяемое уравнением (1.10).

Рассмотрим случай $\varepsilon = \sqrt{Rh - R_c h} \ll 1$ ($R > R_c$), $\alpha \ll 1$ и разложим Q и α по ε . Сравнивая различные члены в уравнении (1.10) при малых α получим $Q = O(\varepsilon)$, $\alpha = O(\varepsilon^3)$, поэтому разложения можно представить в виде

$$Q = \varepsilon Q_1 + \dots, \quad \alpha = \varepsilon^3 \gamma_1 + \dots \quad (2.5)$$

Тогда для стационарного решения Q_1 с точностью до членов более высокого порядка из (1.10) получим уравнение

$$Q_1^3 - Q_1 - 8\gamma_1 = 0 \quad (2.6)$$

Аналогично из (2.4) независимо от знака ω будем иметь

$$\omega(bh - 0,5 \ln |\omega|) = \varepsilon^2 \frac{Q_1^3 + 4\gamma_1}{Q_1} \quad (2.7)$$

Так как уравнение (2.6), как и уравнение (1.10) (при $\alpha < \pi/2$), должно иметь три вещественных решения, необходимо выполнение неравенства $\gamma_1 < 1/12\sqrt{3}$ [4]. Рассмотрим случай $\gamma_1 \ll 1$ и разложим Q_1 в ряд по γ_1 .

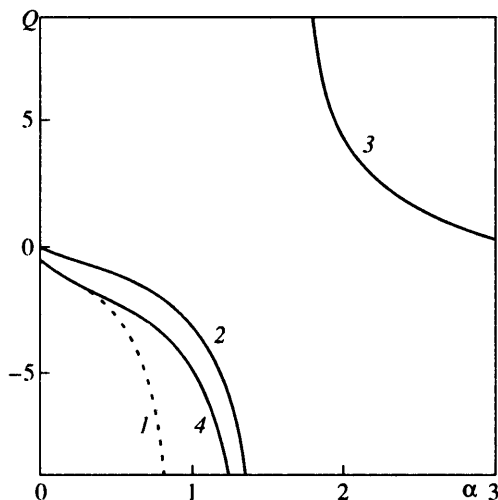
$$Q_1 = V_0 + \gamma_1 V_1 + \dots \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в (2.6) для трех ветвей на фиг. 2 соответственно, получим решения

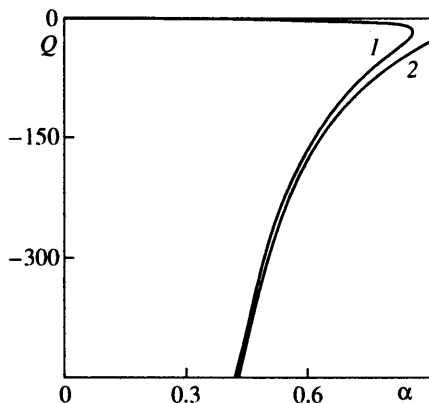
$$Q_{11} = 1 + 4\gamma_1 + \dots, \quad Q_{12} = -1 + 4\gamma_1 + \dots, \quad Q_{13} = -8\gamma_1 + \dots \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.7), имеем $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$, $\omega_3 < 0$. Таким образом, при достаточно малых надкритичностях и α ветви 1 и 2 на фиг. 2 устойчивы, а ветвь 3 неустойчива. Карта устойчивости в плоскости (Q, α) при произвольных α , полученная на основе численного решения комплексного уравнения (2.4), показана на фиг. 4.

3. Обсуждение результатов. При $\alpha < \pi/2$ рассматриваемая задача имеет три стационарных решения. Соответствующие кривые для расхода показаны на фиг. 2 при $a = 1, 2$, $\alpha = 0, 1$. Так как все полученные выражения непрерывны по параметру a (отношение длин полуосей эллипса), то можно предположить, что по крайней мере



Фиг. 4



Фиг. 5

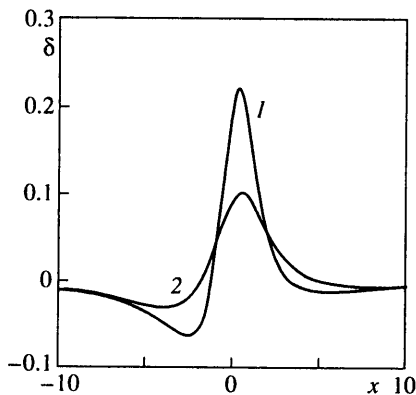
Фиг. 4. Карта устойчивости стационарного движения на плоскости (Q, α) . Нейтральная кривая (1), границы области существования решения (2, 3), граница раздела ветвей 2 и 3 на фиг. 2 (кривая 4)

Фиг. 5. Нейтральная кривая (1), кривая, определяющая асимптотику нейтральной кривой (2)

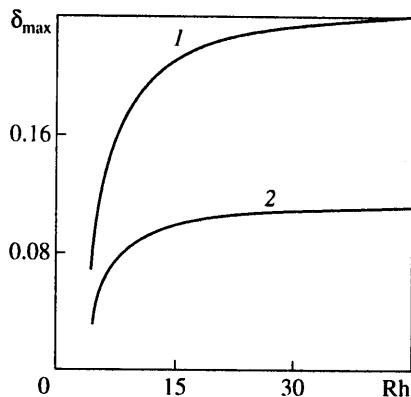
при малых $a - 1, Rh - R_c h, \alpha$, как и для кругового кольца, в эллиптическом случае кривые 1 и 2 на фиг. 2 соответствуют устойчивым решениям, а кривая 3 – неустойчивому. Неустойчивость решения 3 связана с тем, что при $\alpha = 0$ этому решению соответствует неустойчивое механическое равновесие (при $R > R_c$) (фиг. 3, линия 3). По мере приближения α к $\pi/2$ решения 2 и 3 (фиг. 2) сдвигаются вправо и при $\alpha = \pi/2$ становятся комплексными. При $\alpha \geq \pi/2$ (нагрев сверху) имеется лишь одно стационарное решение, соответствующее "правильному" направлению циркуляции (фиг. 3, линия 4). При этом с ростом числа Рэлея расход стремится к предельному значению $Q = -2 \operatorname{th} \alpha$. Кривая $Q = -2 \operatorname{th} \alpha$ определяет также предельный при $Rh \rightarrow \infty$ расход жидкости для ветви 3 на фиг. 2 при $\alpha < \pi/2$.

Кривые на фиг. 2 качественно совпадают с соответствующими кривыми для пористого прямоугольника с идеально теплопроводными границами [1]. Однако в отличие от указанного случая в данной задаче ветвь 2 (фиг. 2) является устойчивой, так же как и для однородной жидкости [6]. Указанное отличие связано с тем, что в данном случае, как и в случае однородной жидкости, первый спектральный уровень линейной задачи невырожден. Для кругового кольца первые спектральные уровни показаны в [3].

Приведенные результаты по устойчивости относятся к случаю малых $Rh - R_c h$ и α . Результаты в общем случае на плоскости (Q, α) , полученные на основе численного решения уравнения (2.4), показаны на фиг. 4. Кривая 1 является решением уравнения $\operatorname{Re} \omega(Q, \alpha) = 0$ (пунктиром показана часть, где $\operatorname{Im} \omega(Q, \alpha) \neq 0$). При переходе через кривые 2, 3 ω вещественна, меняет знак и по модулю достигает бесконечности. Эти кривые задаются функцией $Q = -2 \operatorname{th} \alpha$ и определяют границы области существования стационарных расходов. В областях $Q \in (-2 \operatorname{th} \alpha, 0), \alpha < \pi/2$, и $Q \in (-2 \operatorname{tg} \alpha, \infty) \cup (-\infty, 0), \alpha > \pi/2$, решений уравнения (1.10) нет. Кривая 4 (фиг. 4) соответствует точке раздела ветвей 2 и 3 на фиг. 2. Область неустойчивости заключена между кривыми 1 и 2 (фиг. 4). Как видно из фиг. 4, при $0 < \alpha < \pi/2$ ветвь 1 (фиг. 2) устойчива, а ветвь 3 неустойчива.



Фиг. 6



Фиг. 7

Фиг. 6. Профиль аномалии теплового потока при $a = 1, 2$, $\alpha = 0$, $Rh = 20$, $H = 2$; 3 (кривые 1, 2)

Фиг. 7. Зависимость максимума аномалии теплового потока от числа Рэлея при $a = 1, 2$, $\alpha = 0$, $H = 2$; 3 (кривые 1, 2)

Нейтральная кривая $\alpha(Q)$ (фиг. 4, кривая 1) имеет максимум $\alpha_2(h)$ ($\alpha_2(0,1) \approx 0,86$, $\alpha_2(0,01) \approx 1$) и $\alpha(Q) \rightarrow 0$ при $Q \rightarrow -\infty$. Это видно из фиг. 5, кривая 1, где приводится нейтральная кривая для больших значений расходов Q . Нижней ветви на фиг. 5, кривая 1 соответствуют большие частоты нейтральных колебаний и она определяет границу перехода к нестационарному течению в "неправильном" направлении. Таким образом, из фиг. 4, 5 следует, что при $0 < \alpha < \alpha_2(h)$ существует интервал изменения расхода $|Q|$ ($Q_1(\alpha)$, $Q_2(\alpha)$) (или числа Рэлея), где ветвь 2 (фиг. 2) устойчива. Причем при $0 < \alpha < \alpha_1(h)$ ($\alpha_1(0,1) \approx 0,25$) точка $(\alpha, Q_1(\alpha))$ совпадает с точкой раздела ветвей 2 и 3 (фиг. 2), $Q_2(\alpha)$ определяет границу перехода к нестационарному течению.

При $\alpha_2(h) < \alpha < \pi/2$ рассматриваемая ветвь неустойчива при любых расходах и устойчиво лишь одно из трех решений. При $\alpha > \pi/2$ имеется лишь одно устойчивое решение (фиг. 3–4). Кривая 2 на фиг. 5 дается формулой $Qh = (4 \operatorname{tg} \alpha - 4\sqrt{8 - \operatorname{tg}^2 \alpha}) / \operatorname{tg}^2 \alpha$, которая определяет асимптотику нейтральной кривой при больших расходах.

На фиг. 6 показан профиль аномалии теплового потока на поверхности $y = H$, вызванной конвекцией в контуре, – кривая $\delta(x) \equiv \operatorname{Nu}(x) - 1$ (Nu – число Нуссельта). На фиг. 7 показан максимум аномалии теплового потока в зависимости от числа Рэлея Rh .

Заключение. Рассмотрена приближенная модель конвекции в тонком пористом кольце эллиптической формы, окруженном непроницаемым массивом пород. Предполагается, что геотермический градиент отклонен на произвольный угол α от вектора тяжести g . При $\alpha < \pi/2$ (подогрев снизу) имеется три стационарных решения. При этом когда $0 < \alpha < \alpha_2(h)$ ($\alpha_2(0,1) \approx 0,86$), устойчивы два решения, а при $\alpha > \alpha_2(h)$ – одно. При $\alpha > \pi/2$ имеется одно устойчивое решение и расход жидкости с ростом числа Рэлея стремится к предельному значению $-2 \operatorname{th} \alpha$.

Кривая аномалии теплового потока над пористым контуром имеет характерные максимум и минимум над восходящим и нисходящим потоками жидкости соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Любимов Д.В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131–137.
2. Магомедбеков Х.Г., Рамазанов М.М. Гидротермальная конвекция в тонком пористом кольце // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 6. С. 4–8.
3. Магомедбеков Х.Г., Рамазанов М.М. Линейный анализ конвективной неустойчивости жидкости в горизонтальной кольцевой полости, заполненной пористой средой // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 3. С. 19–25.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831 с.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
6. Чернатынский В.И., Шлиомис М.И. Конвекция вблизи критических чисел Рэлея при почти вертикальном градиенте температуры // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 64–70.

Каспийск

Поступила в редакцию
22.X.1999