

УДК 532.546:536.423

© 2000 г. Г.Г. ЦЫПКИН

## О СУЩЕСТВОВАНИИ ФРОНТОВОГО РЕЖИМА ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ВОДА – ПАР В ГИДРОТЕРМАЛЬНЫХ ПЛАСТАХ

Исследуется задача об извлечении пара из водонасыщенного гидротермального пласта. Найден диапазон параметров, в котором существует непротиворечивое решение задачи с режимом фронтом испарения. Построена критическая кривая, выделяющая область существования фронтового решения и найдено приближенное решение задачи, соответствующее малым скоростям движения поверхности испарения.

Процесс извлечения теплоносителя из гидротермального пласта сопровождается движением воды, пара или пароводяной смеси в гидротермальном коллекторе и фазовыми превращениями вода – пар. В общем случае имеет место существование трех областей, насыщенных водой, паром или пароводяной смесью – теплоносителями с разными физическими свойствами и разделенными границами, на которых имеет место фазовый переход [1].

В основе математического описания таких процессов лежат уравнения многофазной неизотермической фильтрации [1–4], которые в случае наличия фазовых переходов в узкой области дополняются условиями на неизвестной подвижной границе. Сформулированные задачи достаточно сложны, для них не доказаны теоремы существования и единственности, а для их исследования, в основном применяются численные методы [5]. В связи с этим особый интерес представляют точные решения, которые позволяют детально проанализировать свойства решения и основные особенности поведения физической системы [6–9]. Структура задач такова, что полученные аналитические решения, удовлетворяющие законам сохранения на неизвестной подвижной границе фазового перехода, приводят к системе трансцендентных уравнений, исследование которой в общем случае приводится численными методами.

В [1] было показано, что в линейном приближении, когда изменения давления и температуры малы, задача об испарении воды в пласте при наличии фронта фазового перехода приводит к термодинамическому противоречию. Это противоречие выражается в том, что найденная в процессе решения локальная температура в области жидкой фазы превышает температуру испарения воды, вычисленную по распределению давления в этой области. Физический смысл этого решения состоит в том, что вода перед фронтом испарения находится в перегретом состоянии. Это противоречие было устранено введением области пароводяной смеси, расположенной между однофазными областями. На основе численных экспериментов был сделан вывод о несуществовании в линейном приближении фронтового решения.

В настоящей работе показано, что существует диапазон параметров, в котором может быть получено аналитическое решение без предположения о малости изменений функций давления и температуры и в этом диапазоне параметров существует фронтовое решение. Данный диапазон параметров соответствует низкопроницаемым гидротермальным резервуарам. Показано, что процесс испарения в таких системах характеризуется малыми значениями безразмерной автомодельной скорости фронта,

что позволяет использовать разложение в ряд и получить приближенное решение. На основании численных экспериментов делается вывод о возможности использования приближенного решения во всей области существования фронтального режима испарения.

1. Рассмотрим гидротермальный резервуар, представляющий собой водонасыщенную пористую среду. Предположим, что работа добывающей скважины понижает давление в пласте, приводя к кипению воды и образованию областей, насыщенных водой и паром. Система основных уравнений представляет собой законы сохранения масс, энергии, закон Дарси, уравнения состояния для воды и пара, а также термодинамические соотношения [1–4, 10]. Система основных уравнений после тождественных преобразований сводится к системам уравнений относительно температур и давлений [1]. Для процессов извлечения теплоносителя из гидротермальных резервуаров, нагрев которых осуществляется подтоком тепла из недр, а охлаждение происходит вследствие испарения воды, можно считать, что справедливы неравенства  $\alpha P \ll 1$ ,  $\beta \delta T \ll 1$ , где  $\alpha$  – коэффициент сжимаемости воды,  $P$  – давление,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения воды,  $\delta T$  – вариация температуры. Тогда система основных уравнений имеет следующий вид для области воды и пара соответственно

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{m\alpha\mu_w} \Delta P$$

$$(\rho C)_1 \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k}{\mu_w} \rho_w C_w \text{grad } P \text{ grad } T = \lambda_1 \Delta T \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{P}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k}{m\mu_v} (\text{grad } P)^2 + \frac{k}{m\mu_v} \frac{P}{T} \text{grad } P \text{ grad } T = \frac{k}{m\mu_v} P \Delta P$$

$$(\rho C)_2 \frac{\partial T}{\partial t} - m \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{k}{\mu_v} \frac{P C_p}{RT} \text{grad } P \text{ grad } T = \lambda_2 \Delta T \quad (1.2)$$

$$\lambda_i = m\lambda_j + (1-m)\lambda_s, \quad (\rho C)_i = m\rho_j C_j + (1-m)\rho_s C_s, \quad i=1,2, \quad j=w,v$$

Здесь  $v$  – скорость фильтрации,  $m$  – пористость,  $k$  – проницаемость,  $C$  – теплоемкость,  $R$  – газовая постоянная пара,  $\mu$  – вязкость,  $\rho$  – плотность,  $\lambda$  – теплопроводность. Индексы  $w, v, s$  – вода, пар и скелет пористой среды соответственно.

Условия на фронте испарения формулируются как условия термодинамически равновесного скачка функции водонасыщенности и имеют вид [1]

$$T_+ = T_- = T_*, \quad P_+ = P_- + P_*$$

$$\ln \frac{P_*}{P_a} = A + \frac{B}{T_*}, \quad A = 12,512, \quad B = -4611,73, \quad P_a = 10^5 \text{ Па}$$

$$m \left( 1 - \frac{P_*}{\rho_w R T_*} \right) V_n = \frac{k P_*}{\mu_v \rho_w R T_*} (\text{grad } P)_{n-} - \frac{k}{\mu_w} (\text{grad } P)_{n+}$$

$$mq\rho_w V_n = (\lambda \text{ grad } T)_{n+} - (\lambda \text{ grad } T)_{n-} - q\rho_w \frac{k}{\mu_w} (\text{grad } P)_{n+}$$

Здесь  $V$  – скорость скачка,  $q$  – удельная теплота испарения. Индексы:  $n$  – нормаль, плюс и минус – величины соответственно справа и слева от фронта, "звездочка" соответствует значениям величин на фронте.

2. Следуя [1], рассмотрим задачу об отборе пара от границы контакта проницаемого резервуара с окружающими непроницаемыми породами. Пусть полупространство  $x < 0$  занимают непроницаемые породы, а полупространство  $x > 0$  заполнено в начальный момент времени водой с температурой  $T_0$  и давлением  $P_0$ . Предположим,

что на неподвижной стенке  $x = 0$ , соответствующей трещине между проницаемыми и непроницаемыми породами, давление упало до некоторого достаточно малого значения  $P^0$ . Тогда от поверхности  $x = 0$  вправо распространяется фронт кипения  $x = X(t)$ , разделяющий области пара и воды. В области непроницаемых пород ( $-\infty < x < 0$ ) справедливо обычное уравнение теплопроводности.

Точное решение задачи может быть получено при условии малости конвективного переноса энергии. Отношение конвективного слагаемого к кондуктивному в уравнении переноса тепла для области воды определяется безразмерным параметром  $\rho_w C_w k \delta P / (\mu_w \lambda_v)$ . Характерные значения давления и коэффициента проницаемости могут претерпевать значительные изменения, в то время как изменения остальных параметров невелики, поэтому условие малости конвективного переноса тепла может быть записано в виде

$$\frac{\rho_w C_w k \delta P}{\mu_w \lambda_v} \approx \frac{0,8 \cdot 10^3 \cdot 4,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,8} k \delta P \approx 10^{10} k \delta P \ll 1$$

Окончательно получаем условие малости конвективного переноса энергии в области воды в виде  $k \delta P \ll 10^{-10}$  н.

Аналогичные рассуждения, проведенные для области пара, приводят к соотношению

$$\frac{C_p}{\mu_v \lambda_2 R T} k \delta P^2 \approx \frac{10^3}{1,6 \cdot 10^{-5} \cdot 1,8 \cdot 4,6 \cdot 10^2 \cdot 4,5 \cdot 10^2} k \delta P^2 \approx 1,6 \cdot 10^2 k \delta P^2 \ll 1$$

В силу того что рассмотрение проводится для значений температур и давлений меньших критических, условие малости конвективного переноса энергии в области пара принимает вид

$$1,6 \cdot 10^2 k \delta P^2 < 1,6 \cdot 10^2 \cdot 2,2 \cdot 10^7 k \delta P = 3,52 \cdot 10^9 k \delta P \ll 1$$

Условие, полученное в области пара, является более слабым, а вариация давления в обеих областях заведомо меньше разности между начальным и граничным давлением. Поэтому достаточно наложить ограничение на малость конвективного потока в области воды, тогда аналогичное условие в области пара будет выполнено автоматически. Можно использовать более сильное неравенство, содержащее начальные и граничные значения давления

$$k(P_0 - P^0) \ll 10^{-10} \tag{2.1}$$

Особенностью задачи является то, что в процессе отбора пара имеет место фазовый переход (испарение воды) на границе раздела фаз, который поглощает тепло, и за счет этого происходит охлаждение пласта. Оценим характерную величину падения температуры в одномерном пласте, когда подток тепла осуществляется как из области воды, так и из области пара. Тогда на фронте испарения температура имеет минимум и тепловые потоки суммируются. Рассмотрим соотношения на подвижной границе (1.3). Умножим закон сохранения массы на  $q \rho_w$  и вычтем из уравнения энергии. Соотношение на характерные значения параметров имеет вид  $2\lambda(\delta T/L) \approx (q k \rho_w \mu_w) (\delta p/L)$ . Отсюда следует оценка для вариации температуры на фронте испарения

$$\delta T \approx \frac{q \rho_w}{2\lambda \mu_w} k \delta P \approx \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 30}{2 \cdot 1,8 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} k \delta P \approx 10^{12} k \delta P$$

Используя сделанное ранее предположение для произведения проницаемости и вариации давления, получаем  $\delta T \ll 10^2$  К. Следовательно, с большой степенью точности можно считать, что  $\delta T/T \ll 1$  и последним слагаемым в левой части первого уравнения системы (1.2) можно пренебречь. Рассмотрим величину слагаемых с вре-

менными производными в уравнении движения для области пара. Условие малости временных членов по сравнению с правой частью уравнения выражается через характерный масштаб времени и длины и имеет вид  $kPt/(m\mu_w L^2) \gg 1$ . Из теплового условия Стефана на границе фазового перехода следует

$$mq\rho_w \frac{L}{t} \approx \lambda \frac{\delta T}{L}, \text{ или } m \frac{L^2}{t} \approx \lambda \frac{\delta T}{q\rho_w} \approx \frac{1,8 \cdot 10}{2 \cdot 10^6 \cdot 0,8 \cdot 10^3} \approx 10^{-8}$$

Последнее соотношение позволяет записать условие малости временных членов в виде  $kP \cdot 10^8/\mu_w \gg 1$  или  $kP \gg 10^{-13}$ . Используя тот факт, что давление в области пара по порядку величины совпадает с давлением на неподвижной стенке, получаем

$$kP^0 \gg 10^{-13} \quad (2.2)$$

При выполнении условия (2.2) уравнение движения для пара содержит только пространственные производные. Физический смысл этого факта состоит в том, что процесс испарения на фронте фазового перехода определяется более медленными тепловыми процессами и в каждый момент времени распределение давления в области пара успевает установиться. Если условие (2.2) нарушается, что соответствует более низкой проницаемости пористой среды, то скорости распространения возмущений давления и температуры становятся сравнимыми и процесс уже не будет иметь характер квазистационарного.

Условия (2.1), (2.2) могут быть записаны в виде единого, более сильного неравенства

$$10^{-13} \ll kP^0 < kP_0 \ll 10^{-10}$$

При условии выполнения неравенств (2.1), (2.2) уравнения движения для областей воды и пара имеют вид соответственно

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \delta_w \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_w \Delta P, \quad \delta_w = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad \kappa_w = \frac{k}{m\alpha\mu_w} - (\text{grad } P)^2 = P\Delta P$$

Уравнения переноса энергии в обеих областях имеют вид

$$(\rho C)_j \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_j \Delta T$$

$$a_{1,2} = \frac{m\lambda_j + (1-m)\lambda_s}{m\rho_j C_j + (1-m)\rho_s C_s}, \quad j = w, v$$

Вследствие того что пористость низкопроницаемых геотермальных пластов мала и коэффициент температуропроводности в основном определяется параметрами скелета пористой среды, для простоты можно считать коэффициенты температуропроводности в зонах пара и непроницаемых пород равными и использовать единое уравнение теплопроводности.

Начальные и граничные условия имеют вид

$$t = 0: \quad X(0) = 0, \quad x < 0: \quad T = T_0, \quad x > 0: \quad T = T_0, \quad P_w = P_0$$

$$x = 0: \quad P_v = P^0 (P^0 < P_0), \quad \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_+ = \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_-$$

Рассмотрим случай, когда начальные значения температуры и давления, а также давление на неподвижной границе – постоянные величины. Тогда задача имеет автономное решение в виде

$$X(t) < x < \infty$$

$$T(\zeta) = (T_* - T_0) \frac{\text{erfc}(\zeta)}{\text{erfc}(\gamma)} + T_0$$

$$P(\zeta) = P_0 + R_1 \frac{\operatorname{erfc}(\zeta)}{\operatorname{erfc}(\gamma)} + R_2 \frac{\operatorname{erfc}(\zeta\sqrt{a_{11}})}{\operatorname{erfc}(\gamma\sqrt{a_{11}})} \quad (2.3)$$

$$R_1 = \frac{\delta_1 a_{11}}{1 - a_{11}} (T_* - T_0), \quad R_2 = P_* - P_0 - R_1$$

Здесь  $a_{11} = \frac{a_1}{x_1}$ ,  $\zeta = x/2\sqrt{a_1 t}$ , а скорость подвижной границы определяется выражением  $X(t) = 2\gamma\sqrt{a_1 t}$ . Распределение давления пара в области  $0 < x < X(t)$  имеет вид

$$P = P^\circ \sqrt{1 + \left( \frac{P_*^2}{P^{\circ 2}} - 1 \right) \frac{\zeta}{\gamma}} \quad (2.4)$$

Распределение температуры в области  $-\infty < x < X(t)$  определяется выражением

$$T(\zeta) = (T_* - T_0) \frac{1 + \operatorname{erf}(\zeta\sqrt{a_{12}})}{1 + \operatorname{erf}(\gamma\sqrt{a_{12}})} + T_0, \quad a_{12} = \frac{a_1}{a_2} \quad (2.5)$$

Подставляя выражения для давления и температуры в условия на подвижной границе получаем систему трансцендентных уравнений для

$$\gamma, \Theta_* = \frac{T_*}{T_0}, \quad \Pi_* = \frac{P_*}{P_0}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\pi} m q a_1 \rho_w}{T_0} \gamma + \lambda_1 (\Theta_* - 1) \frac{\exp(-\gamma^2)}{\operatorname{erfc}(\gamma)} + \lambda_2 \sqrt{a_{12}} (\Theta_* - 1) \frac{\exp(-\gamma^2 a_{12})}{1 + \operatorname{erfc}(\gamma\sqrt{a_{12}})} + \\ & + \frac{k q \rho_w \beta}{\mu_w \alpha} \frac{a_{11}}{1 - a_{11}} (\Theta_* - 1) \left[ \frac{\exp(-\gamma^2)}{\operatorname{erfc}(\gamma)} - \sqrt{a_{11}} \frac{\exp(-\gamma^2 a_{11})}{\operatorname{erfc}(\gamma\sqrt{a_{11}})} \right] - \\ & - \frac{k q \rho_w P_0}{\mu_w T_0} \sqrt{a_{11}} (\Pi_* - 1) \frac{\exp(-\gamma^2 a_{11})}{\operatorname{erfc}(\gamma\sqrt{a_{11}})} = 0 \\ & \frac{\sqrt{\pi} a_1 x_1 m \mu_w}{k P_0} \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho_w} \frac{\Pi_*}{\Theta_*} \right) \gamma - \frac{\sqrt{\pi}}{4\gamma} \sqrt{\frac{1}{a_{11}}} \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_0}{\rho_w} \frac{\Pi_*}{\Theta_*} \left( \Pi_* - \frac{P^\circ}{P_0} \right) + \\ & + \frac{\beta T_0}{\alpha P_0} \frac{a_{11}}{1 - a_{11}} (\Theta_* - 1) \left[ \sqrt{\frac{1}{a_{11}}} \frac{\exp(-\gamma^2)}{\operatorname{erfc}(\gamma)} - \frac{\exp(-\gamma^2 a_{11})}{\operatorname{erfc}(\gamma\sqrt{a_{11}})} \right] - (\Pi_* - 1) \frac{\exp(-\gamma^2 a_{11})}{\operatorname{erfc}(\gamma\sqrt{a_{11}})} = 0 \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$\ln \left( \Pi_* \frac{P_0}{P_a} \right) = A + \frac{B}{T_0 \Theta_*}, \quad \rho_{v0} = \frac{P_0}{RT_0}$$

Условие термодинамической непротиворечивости решения состоит в том, что температура воды в области перед фронтом должна быть ниже температуры кипения, а температура пара в области за фронтом – выше этой температуры. Распределения температуры и давления находятся в процессе решения задачи, а температура испарения является функцией давления и восстанавливается по найденному распределению давления. Условия существования фронтового решения для областей воды и пара соответственно записываются в виде

$$\left[ \frac{d\Theta_f}{d\zeta} \right]_1 > \left[ \frac{d\Theta}{d\zeta} \right]_1, \quad \left[ \frac{d\Theta_f}{d\zeta} \right]_2 > \left[ \frac{d\Theta}{d\zeta} \right]_2 \quad (2.7)$$

Подставляя в (2.7) выражения для температуры и давления, получаем соответственно

$$1 - \frac{d\Theta_f}{d\Pi_f} \left\{ \left[ \frac{\Pi_* - 1}{\Theta_* - 1} + \frac{\beta T_0}{\alpha P_0} \frac{a_{11}}{1 - a_{11}} \right] \sqrt{a_{11}} \frac{\exp(-\gamma^2 a_{11}) \operatorname{erfc}(\gamma)}{\exp(-\gamma^2) \operatorname{erfc}(\gamma \sqrt{a_{11}})} + \frac{\beta T_0}{\alpha P_0} \frac{a_1}{\kappa_1 - a_1} \right\} < 0$$

$$4\gamma \sqrt{\frac{a_{12}}{\pi}} \frac{\Theta_* - 1}{1 + \operatorname{erfc}(\gamma \sqrt{a_{12}})} \exp(-\gamma^2 a_{12}) - \frac{d\Theta_f}{d\Pi_f} \frac{\Pi_* - P^{02} / P_0^2}{\Pi_*} > 0$$

Условием формирования фронта испарения является падение давления на неподвижной границе ниже равновесного, соответствующего начальной температуре. Интенсивность фазового перехода и соответственно скорость неизвестной подвижной границы определяются разностью между граничным и равновесным давлениями. Используя непрерывную зависимость решения от граничных условий, можно положить, что при малых отличиях граничного давления от равновесного безразмерная скорость границы  $\gamma$  достаточно мала, так что малы аргументы экспонент и интегралов вероятности. Ограничиваясь первыми членами разложения по малым параметрам  $\gamma$ ,  $\gamma \sqrt{a_{12}}$  и  $\gamma \sqrt{a_{11}}$  (так как  $a_{12} \approx 1$ ,  $a_{11} \ll 1$ ), левых частей неравенств, получаем условие отсутствия перегрева воды и переохлаждения пара в виде

$$1 - \frac{d\Theta_f}{d\Pi_f} \left[ \sqrt{a_{11}} \frac{\Pi_* - 1}{\Theta_* - 1} + \frac{\beta T_0}{\alpha P_0} \frac{a_{11}}{1 - a_{11}} (\sqrt{a_{11}} - 1) \right] < 0 \quad (2.8)$$

$$-\frac{d\Theta_f}{d\Pi_f} \left( \Pi_* - \frac{P^0}{P_0} \right) < 0 \quad (2.9)$$

Из термодинамики известно, что зависимость температуры испарения от давления  $\Theta_f(P_f)$  есть монотонно возрастающая функция и  $\Theta'_f > 0$ . Неравенство  $\Pi_* - P^0/P_0 > 0$  представляет собой необходимое условие извлечения пара и по условию задачи всегда справедливо. Следовательно, условие непротиворечивости решения (2.9) в области пара верно при всех значениях параметров (при условии достаточной малости автомодельной скорости подвижной границы).

Условие для области воды (2.8) может быть переписано в виде

$$\frac{d\Pi_f}{d\Theta_f} < \sqrt{a_{11}} \frac{\Pi_* - 1}{\Theta_* - 1} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{a_{11}}{1 - a_{11}}$$

Решение неравенства следует искать в такой области параметров, в которой левая часть становилась бы меньше, а правая часть возрастала. Из зависимости давления фазового перехода от температуры следует, что производная, стоящая в левой части, уменьшается при уменьшении температуры. Правая часть возрастает с увеличением разности между начальным давлением и давлением на поверхности испарения и с уменьшением разности между начальной температурой и температурой на фронте. Отсюда можно сделать вывод, что фронтальной режим испарения может реализовываться в гидротермальных резервуарах, при достаточно большой разности между начальным давлением и давлением на фронте испарения, а также при небольших изменениях температуры, характеризующих режимы кипения малой интенсивности. Данные условия реализуются в низкопроницаемых резервуарах.

Предположение о малости безразмерной автомодельной скорости  $\gamma$  можно использовать для упрощения первых двух уравнений системы (2.6). Разлагая в ряд и оставляя главные члены разложений, получаем

$$\frac{\sqrt{\pi} m q a_1 \rho_w}{T_0} \gamma + \left[ \lambda_1 + \lambda_2 \sqrt{a_{12}} + \frac{k q \rho_w \beta}{\mu_w \alpha} \frac{a_{11}}{1 - a_{11}} \right]$$

$$(1 - \sqrt{a_{11}})(\Theta_* - 1) - \frac{kq\rho_w P_0}{\mu_w T_0} \sqrt{a_{11}} (\Pi_* - 1) = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\sqrt{\pi a_{11}} \kappa_1 m \mu_w}{k P_0} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_w} \frac{\Pi_*}{\Theta_*}\right) \gamma^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sqrt{\frac{1}{a_{11}}} \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_0}{\rho_w} \frac{1}{\Theta_*} \left(\Pi_*^2 - \left(\frac{P^\circ}{P_0}\right)^2\right) +$$

$$+ \frac{\beta T_0}{\alpha P_0} \frac{a_{11}}{1 - a_{11}} (\Theta_* - 1) \gamma \left(\sqrt{\frac{1}{a_{11}}} - 1\right) - (\Pi_* - 1) \gamma = 0$$

Первое уравнение системы (2.10) дает простое выражение для скорости границы как функции значений температуры и давления на фронте испарения. Второе уравнение имеет два корня, один из которых отрицательный и не имеет физического смысла. Решение приближенной системы сводится, таким образом, к решению третьего уравнения системы (2.6) относительно одной из искоемых функций, в то время как две другие выражаются явным образом из первых двух уравнений приближенной системы.

Важной характеристикой процесса является величина, характеризующая интенсивность процесса и представляющая собой массу испарившейся воды

$$M = m \int_0^{\infty} \rho_{w0} d\zeta - m \int_{\gamma}^{\infty} \rho_w(\zeta) d\zeta = m \int_0^{\gamma} \rho_{w0} d\zeta + m \int_{\gamma}^{\infty} \rho_{w0} d\zeta - \int_{\gamma}^{\infty} \rho_w d\zeta = m \rho_{w0} \left[ \gamma + \int_{\gamma}^{\infty} \left(1 - \frac{\rho_w}{\rho_{w0}}\right) d\zeta \right]$$

Подставляя в это выражение уравнения состояния для воды и используя решение (2.3), после тождественных преобразований получаем

$$M = m \rho_{w0} \left\{ \gamma + \frac{\beta T_0}{1 - a_{11}} (\Theta_* - 1) \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\gamma^2)}{\operatorname{erfc}(\gamma)} - \gamma \right] + \right.$$

$$\left. + \left[ \alpha P_0 (\Pi_* - 1) + \frac{\beta T_* a_{11}}{1 - a_{11}} (\Theta_* - 1) \right] \left[ \gamma - \sqrt{\frac{1}{\pi a_{11}}} \frac{\exp(-\gamma^2 a_{11})}{\operatorname{erfc}(\gamma \sqrt{a_{11}})} \right] \right\}$$

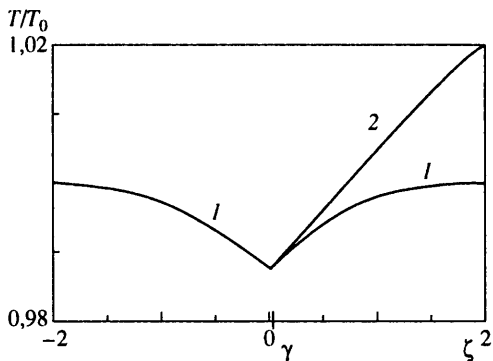
Разлагая по малому параметру  $\gamma$  и используя  $a_{11} \ll 1$ , получаем

$$M \approx m \rho_{w0} \left\{ \gamma - \sqrt{\frac{1}{\pi a_{11}}} \left[ \alpha P_0 (\Pi_* - 1) + \frac{a_{11} \beta T_0}{1 - a_{11}} (\Theta_* - 1) \right] + \right.$$

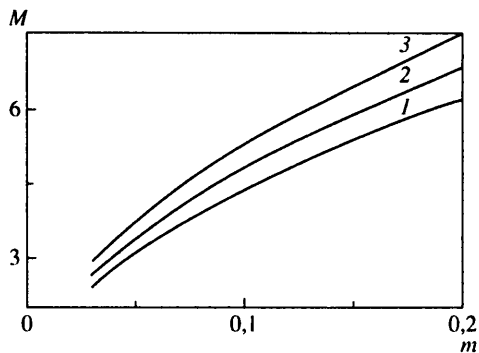
$$\left. + \frac{\beta T_0}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1 - a_{11}} (\Theta_* - 1) \right\} \approx m \rho_{w0} \left\{ \gamma + \sqrt{\frac{\kappa_1}{\pi a_{11}}} \alpha P_0 (1 - \Pi_*) - \frac{\beta T_0}{\sqrt{\pi}} (1 - \Theta_*) \right\}$$

Асимптотическая формула отражает некоторые особенности поведения функции интенсивности испарения, которые ниже будут подтверждены расчетами, использующими точную формулу. Видно, что интенсивность растет с увеличением скорости фронта фазового перехода, пористости, начального давления и коэффициента проницаемости.

3. Система трансцендентных уравнений (2.6) решалась численно. При вычислениях учитывалась зависимость параметров воды и пара от температуры, которые вычислялись по заданному значению начальной температуры. Проведенные вычисления подтвердили правильность сделанных оценок, полученных асимптотическим методом, для области существования фронтального решения. На фиг. 1 приведены примеры расчетов, свидетельствующие о существовании непротиворечивого решения при следующих значениях параметров [11], начальных и граничных условиях:  $T_0 = 400$  К,  $P_0 = 2 \cdot 10^6$  Па,  $P^\circ = 1,5 \cdot 10^5$  Па,  $m = 0,2$ ,  $k = 2 \cdot 10^{-17}$  м<sup>2</sup>,  $\lambda_s = 2$  Вт/(м · К),



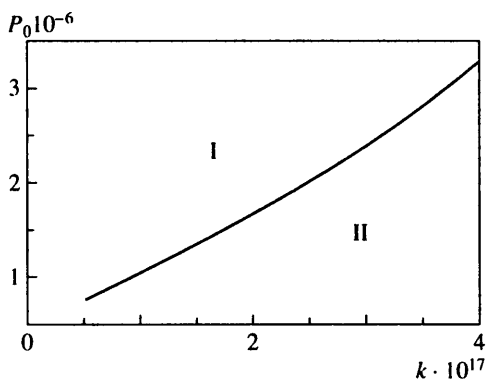
Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Распределения температур в области воды и пара (кривые 1) и температуры фазового перехода в области воды (кривая 2)

Фиг. 2. Зависимость интенсивности испарения от пористости при начальном давлении  $P_0 = 2 \cdot 10^6, 2,5 \cdot 10^6, 3 \cdot 10^6$  Па (кривые 1–3)



Фиг. 3. Кривая, разделяющая области существования фронтного решения (область I) и решения с промежуточной зоной пароводяной смеси (область II)

$\lambda_w = 0,684$  Вт/(м · К),  $C_s = 10^3$  Дж/(кг · К),  $C_w = 4,39 \cdot 10^3$  Дж/(кг · К),  $\rho_s = 2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_w = 0,925 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha = 0,54 \cdot 10^{-9}$  Па<sup>-1</sup>,  $\beta = 0,93 \cdot 10^{-3}$  К<sup>-1</sup>,  $q = 2,19 \cdot 10^6$  Дж/кг,  $R = 461$  Дж/(кг · К),  $\mu_w = 0,213 \cdot 10^{-3}$  Па · с,  $\mu_v = 0,145 \cdot 10^{-4}$  Па · с.

Кривая температуры в области воды расположена ниже кривой температуры фазового перехода. Это свидетельствует об отсутствии перегрева жидкой фазы.

На фиг. 2 представлены зависимости массы испарившейся воды как функции пористости при разных значениях начального давления. Процесс испарения протекает более интенсивно при более высоких начальных давлениях. Это объясняется тем, что большая начальная степень сжатия воды обуславливает более интенсивный подток к фронту испарения, хотя скорость движения фронта относительно скелета пористой среды может быть меньше, так как фронт сносится потоком в область пониженного давления. В асимптотической формуле интенсивность зависит от пористости по линейному закону. Отклонение от линейной функции обусловлено влиянием пористости на искомые значения давления и температуры на фронте. Существуют особенности поведения функции интенсивности, которые формула не иллюстрирует. Так, численные расчеты показывают, что рост начальной температуры существенно увеличивает интенсивность испарения. Этот факт можно объяснить уменьшением вязкости воды, что усиливает подток жидкости к фронту, хотя на первый взгляд последний член в



асимптотической формуле свидетельствует об обратном. Проведенные расчеты показывают, что ошибка при использовании асимптотической формулы составляет несколько процентов.

На фиг. 3 представлена нейтральная кривая на плоскости  $(k, P_0)$ , разделяющая области существования фронтного решения (область I) и область существования решения с образованием двухфазной зоны (область II). Увеличение начального давления оказывает стабилизирующее действие на фронт испарения и соответственно расширяет область существования фронтного решения.

Было проведено сравнение результатов вычислений с использованием точной системы (2.6) и приближенной системы (2.13). Численные эксперименты показали, что решение приближенной системы позволяет вычислить скорость подвижной границы с точностью до третьего знака. Увеличение проницаемости среды приводит к увеличению скорости границы, но, прежде чем  $\gamma$  станет порядка единицы, наступает перегрев жидкости перед фронтом и тем самым фронтальная модель становится неприменимой. Там, где модель применима, т.е. перегрев отсутствует, скорость границы мала и при решении трансцендентной системы может быть использовано разложение в ряд по степеням  $\gamma$ .

**Заключение.** Представлено точное решение задачи испарения воды в низкопроницаемом низкоэнталийном гидротермальном резервуаре. При достаточно большом значении начального давления в резервуаре реализуется фронтный режим фазового перехода и этот режим не может быть описан в рамках линейного приближения. Найдено, что полученное решение характеризуется малой безразмерной автономной скоростью неизвестной подвижной границы, так что можно использовать разложение по малому параметру для получения приближенного решения задачи, которое мало отличается от точного решения.

Автор выражает благодарность А.А. Бармину за полезные обсуждения. Работа выполнялась в рамках проекта РФФИ № 99-01-1042.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цыпкин Г.Г. Математическая модель фазовых переходов вода – пар в гидротермальных пластах // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 6. С. 98–105.
2. Brownell D.H., Garg S.K., Pritchett J.W. Governing equations for geothermal reservoirs // Water Resour. Res. 1977. V. 13. № 6. P. 929–934.
3. Faust C.R., Mercer J.W. Geothermal reservoir simulation. 1. Mathematical models for liquid- and vapor-dominated hydrothermal systems // Water Resour. Res. 1979. V. 15. № 1. P. 23–30.
4. O'Sullivan M.J. Geothermal Reservoir Simulation // Intern. J. Energy Res. 1985. V. 9. № 3. P. 319–332.
5. Pruess K. Numerical Simulation of Water Injection into Vapor-Dominated Reservoirs // World Geothermal Congress, 1995. V. 3. P. 1673–1679.
6. Pruess K., Calore C., Celati R., Wu Y.S. An Analytical Solution for Heat Transfer at a Boiling Front Moving Through a Porous Medium // Intern. J. Heat and Mass Transfer, 1987. V. 30. № 12, P. 2595–2602.
7. Garg S.K., Pritchett J.W. Pressure Interference Data Analysis for Two-Phase (Water/Steam) Geothermal Reservoirs // Water Resour. Res. 1988. V. 24. № 6. P. 843–852.
8. Woods A.W., Fitzgerald S.D. The Vaporization of a Liquid Front Moving Through a Hot Porous Rock // J. Fluid Mechanics, 1993. V. 251. P. 563–579.
9. Бармин А.А., Цыпкин Г.Г. Математическая модель инъекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 6. С. 92–98.
10. Вукалович М.П. Термодинамические свойства воды и водяного пара. М.: Машгиз, 1955. 92 с.
11. Физические величины. Справочник / Под ред. И.С. Григорьева и Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.