

УДК 532.529.5:532:517.4

© 2000 г. В.М. АЛИПЧЕНКОВ, Л.И. ЗАЙЧИК

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ НА ОСНОВЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Представлена континуальная модель, основанная на кинетическом уравнении для функции плотности вероятности (ФПВ), для описания транспорта частиц произвольной плотности в неоднородном турбулентном потоке.

К настоящему времени основные достижения теории двухфазных турбулентных течений относятся главным образом к газодисперсным потокам с твердыми частицами [1–3]. Такие течения характеризуются большими значениями отношения плотностей материалов дисперсной и сплошной фаз. В случае же небольших значений отношения плотностей фаз теория двухфазных турбулентных течений развита в существенно меньшей степени. Это связано в первую очередь со следующими двумя обстоятельствами. Во-первых, при расчете взаимодействия частиц с турбулентными вихрями с целью описания вовлечения дисперсной фазы в пульсационное случайное движение несущего потока и обратного влияния на турбулентность необходимо учитывать нестационарные силы, не играющие заметной роли в газодисперсных средах с тяжелыми частицами. Во-вторых, в газожидкостных средах следует принимать во внимание эффекты, связанные с деформацией межфазной границы и сжимаемостью дисперсной фазы (пузырьков), а также сопутствующие этим явлениям процессы.

В настоящей статье учитывается только явление нестационарных сил на взаимодействие частиц с турбулентными вихрями. Частицы считаются недеформируемыми, обратное влияние частиц на турбулентность не рассматривается.

Эффективным способом описания движения дисперсной фазы в рамках эйлерова континуального метода моделирования является введение ФПВ скорости частиц в турбулентном потоке. Статистический подход, основанный на ФПВ, является более последовательным методом построения континуальных двухжидкостных моделей двухфазных турбулентных течений по сравнению со способами, использующими процедуры осреднения по Рейнольдсу или Фавру ("детерминистический" подход по определению [2]), так как позволяет избежать введения дополнительных эвристических предположений (типа градиентных гипотез по аналогии с принятыми в теории однофазных турбулентных течений) при замыкании осредненных уравнений движения. В [4, 5] получено кинетическое уравнение для ФПВ скорости частиц в однородном турбулентном поле, моделируемом гауссовым случайным процессом. В уравнениях для ФПВ скорости частиц в неоднородном сдвиговом потоке [6–9] из всех сил межфазного взаимодействия учитывается только сила вязкого сопротивления, поэтому полученные кинетические уравнения действительны в квазистационарном приближении для предельного случая движения тяжелых частиц в газе. В настоящей статье предлагаются уравнения для ФПВ и ее моментов, описывающие движение частиц с учетом нестационарных сил и справедливые во всем диапазоне изменения

отношения плотностей дисперсной и сплошной фаз (от тяжелых частиц в газе до пузырьков в жидкости).

В качестве приложения развиваемой модели рассмотрено движение частиц (пузырьков) в однородном сдвиговом слое и вертикальной трубе. Задаче движения пузырьков в трубе вследствие ее практического и научного значения посвящено большое число экспериментальных работ, например [10–13]. В результате этих исследований был обнаружен целый ряд интересных физических эффектов, одним из которых является наличие ярко выраженной неоднородности в распределении пузырьков по сечению трубы. Так, при нисходящем течении, как правило, максимум концентрации пузырьков находится в центре трубы, а в случае восходящего течения может наблюдаться резкий пик концентрации в пристеночной области. Однако, как установлено в [14], профиль концентрации пузырьков определяется не только направлением движения потока (нисходящее или восходящее), но и в существенной степени зависит от размера пузырьков. В теоретических исследованиях газожидкостных пузырьковых течений в трубах, например [15–18], модели основаны на полуэмпирических замыкающих соотношениях, введенных по аналогии с соответствующими гипотезами в теории однофазной турбулентности и содержащих дополнительные эмпирические постоянные для описания взаимодействия пузырьков с турбулентными вихрями несущей жидкой фазы.

Развиваемая в настоящей статье модель позволяет без введения дополнительных эмпирических постоянных, кроме входящих в межфазные силы и характеристики однофазного турбулентного потока, описать (по крайней мере качественно) наблюдаемые в экспериментах распределения пузырьков по сечению трубы. Вместе с тем следует подчеркнуть, что цель исследования состоит не в формулировке завершённой модели двухфазного турбулентного потока, а в развитии метода построения такой модели на основе кинетического уравнения для ФПВ. Кроме того, на данном этапе не ставится задача достижения хорошего количественного совпадения с экспериментальными данными, а представленные примеры служат для иллюстрации предлагаемой модели.

1. Уравнение движения одиночной частицы. Движение одиночной сферической частицы произвольной плотности в турбулентной жидкой (газовой) среде описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dv_p}{d\tau} = & \frac{3\rho_f}{4\rho_p d_p} C_D |\mathbf{u} - \mathbf{v}_p| (\mathbf{u} - \mathbf{v}_p) + \mathbf{g} + \frac{\rho_f}{\rho_p} \left(\frac{D\mathbf{u}}{D\tau} - \mathbf{g} \right) + C_A \frac{\rho_f}{\rho_p} \left(\frac{D\mathbf{u}}{D\tau} - \frac{d\mathbf{v}_p}{d\tau} \right) + \\ & + \frac{9\rho_f}{\rho_p d_p} \sqrt{\frac{\nu}{\pi_0}} \int_0^\tau \frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{v}_p)}{d\tau_1} \frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau - \tau_1}} + C_L \frac{\rho_f}{\rho_p} (\mathbf{u} - \mathbf{v}_p) \times \text{rot } \mathbf{u} \quad (1.1) \\ \frac{d\mathbf{R}_p}{d\tau} = & \mathbf{v}_p, \quad \frac{D}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

где τ – время, \mathbf{v}_p и \mathbf{R}_p – скорость и координата частицы, \mathbf{u} – скорость несущего потока, ρ_f и ρ_p – плотности жидкости и материала частиц, d_p – диаметр частицы, ν – кинематическая вязкость жидкости.

Члены в правой части уравнения (1.1) описывают соответственно удельные силы вязкого сопротивления, тяжести, Архимеда, эффект присоединенной массы, силу Бассэ и так называемую подъемную силу, обусловленную сдвигом скорости несущего потока. Сила присоединенной массы записана в форме, доказанной для случая движения частицы в невязкой жидкости [19] и используемой для моделирования движения частиц и пузырьков в турбулентных потоках. Коэффициенты C_D и C_L в силе сопротивления и подъемной силе могут зависеть от числа Рейнольдса обтекания частицы, параметра сдвига скорости и других параметров. Сила Бассэ представлена в приближении малых чисел Рейнольдса.

Для удобства дальнейшего анализа уравнение (1.1) представляется в форме

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}_p}{\tau_{u*}} + \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B + \mathbf{f}_L + \mathbf{F}_g \quad (1.2)$$

$$\mathbf{f}_A = A \frac{D\mathbf{u}}{Dt}, \quad \mathbf{f}_B = k_B \int_0^\tau \frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{v}_p)}{d\tau_1} \frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau - \tau_1}}, \quad \mathbf{f}_L = L(\mathbf{u} - \mathbf{v}_p) \times \text{rot } \mathbf{u}$$

$$\mathbf{F}_g = \frac{(1 - \rho^\circ)}{1 + C_A \rho^\circ} \mathbf{g}, \quad \tau_{u*} = \tau_u (1 + C_A \rho^\circ), \quad \tau_u = \frac{4d_p}{3\rho^\circ C_D |\mathbf{u} - \mathbf{v}_p|}$$

$$A = \frac{(1 + C_A)\rho^\circ}{1 + C_A \rho^\circ}, \quad k_B = \frac{9\rho^\circ}{d_p} \sqrt{\frac{v}{\pi}} (1 + C_A \rho^\circ)^{-1}, \quad L = \frac{C_L \rho^\circ}{1 + C_A \rho^\circ}, \quad \rho^\circ = \frac{\rho_f}{\rho_p}$$

Здесь τ_u – время динамической релаксации частицы, а τ_{u*} – эффективное время релаксации, учитывающее эффект присоединенной массы. Величина τ_u является функцией числа Рейнольдса $Re_p = |\mathbf{u} - \mathbf{v}_p| d_p / \nu$, а, следовательно, форма представления силы межфазного сопротивления в (1.2) не ограничена случаем малых чисел Re_p , и справедлива и при больших Re_p . Если плотность частиц много больше плотности несущего потока, то силы, связанные с ускорением жидкости \mathbf{f}_A , "памятью" \mathbf{f}_B и сдвигом скорости \mathbf{f}_L , существенной роли не играют и могут быть исключены из рассмотрения.

2. Кинетическое уравнение для ФПВ. Уравнение (1.2) представляет собой стохастическое уравнение типа Ланжевена, поскольку скорость жидкости \mathbf{u} рассматривается как случайный процесс. С целью перехода от динамического стохастического описания отдельных частиц к моделированию статистического поведения ансамбля частиц (дисперсной фазы) вводится динамическая плотность вероятности в фазовом пространстве координат и скоростей частицы

$$p_p = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p(\tau)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p(\tau)) \quad (2.1)$$

Дифференцируя (2.1) по времени с учетом (1.2), получаем уравнение Лиувилля для динамической плотности вероятности одиночной частицы в фазовом пространстве

$$\frac{\partial p_p}{\partial \tau} + v_{pk} \frac{\partial p_p}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial v_k} \left\{ \left[\frac{u_k - v_{pk}}{\tau_{u*}} + f_{Ai} + f_{Bi} + f_{Li} + F_{gi} \right] p_p \right\} = 0 \quad (2.2)$$

где i, k – индексы координат.

Ограничимся анализом разреженных дисперсных систем, когда взаимодействием частиц можно пренебречь, т.е. частицы можно рассматривать как независимые. Введем динамическую плотность вероятности для ансамбля частиц

$$P = \frac{\omega}{\Omega} \sum_p p_p$$

где ω – объем частицы, Ω – рассматриваемый пространственный объем.

Осредняя (2.2) по ансамблю случайных реализаций турбулентного поля скорости жидкости \mathbf{u} , перейдем к уравнению для статистической ФПВ распределения скоростей системы частиц $P = \langle p \rangle$. Представляя в (2.2) актуальную скорость жидкости в виде осредненной и пульсационной составляющих $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$, с учетом соотношения $\langle v_{pi} p \rangle = v_i P$ получаем

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} + v_i \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial v_i} \left[\left(\frac{U_i - v_i}{\tau_{u*}} + F_{Ai} + F_{Bi} + F_{Li} + F_{gi} \right) P \right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\langle u'_i p \rangle}{\tau_{u^*}} + \langle f'_{Ai} p \rangle + \langle f'_{Bi} p \rangle + \langle f'_{Li} p \rangle \right) \quad (2.3)$$

$$F_{Ai} = A \frac{D_0 U_i}{D\tau}, \quad \frac{D_0}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad F_{Bi} = k_B \int_0^\tau \frac{d(U_i - V_i)}{d\tau_1} \frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau - \tau_1}}$$

$$F_{Li} = L(U_j - V_j) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)$$

Члены в правой части уравнения (2.3) описывают взаимодействие частиц с турбулентными вихрями в соответствии с межфазными силами в (1.2).

С целью определения корреляции пульсаций скорости несущего потока и плотности вероятности частиц $\langle u'_i p \rangle$ в (2.3) поле скорости жидкости моделируется гауссовым процессом с заданной автокорреляционной функцией. Тогда с учетом формулы Фурутцу – Новикова для гауссовых случайных функций [20] получаем

$$\langle u'_i p \rangle = \iint \langle u'_i(\mathbf{x}, \tau) u'_k(\mathbf{x}_1, \tau_1) \rangle \left\langle \frac{\delta p(\mathbf{x}, \tau)}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \right\rangle d\mathbf{x}_1 d\tau_1 \quad (2.4)$$

$$\left\langle \frac{\delta p(\mathbf{x}, \tau)}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle p(\mathbf{x}, \tau) \frac{\delta R_{pj}(\tau)}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial v_j} \left\langle p(\mathbf{x}, \tau) \frac{\delta v_{pj}(\tau)}{\delta u_k(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \right\rangle$$

Для нахождения функциональных производных в (2.4) нужно решить уравнение движения частицы (1.2). С целью получения аналитического решения уравнения (1.2) и соответственно замкнутых выражений для этих производных и корреляции $\langle u'_i p \rangle$ субстанциональная производная скорости жидкости вдоль траектории несущего потока $D\mathbf{u}/D\tau$ в f_A полагается равной производной вдоль траектории частицы $d\mathbf{u}/d\tau$ (что справедливо только при отсутствии осредненного межфазного скоростного скольжения) и не учитывается поперечная сила f_L . Первое допущение основано на предположении, что влияние осредненного межфазного скольжения на пульсационное движение дисперсной фазы (так называемого "эффекта пересечения траекторий" [22]) может быть учтено эффективным образом при определении времени взаимодействия частиц с турбулентными вихрями. Хотя незначительность роли подъемной силы, обусловленной сдвигом скорости, в уравнении движения частицы строго обосновывается только при небольших числах Рейнольдса [22], вклад этого эффекта в корреляцию $\langle u'_i p \rangle$ не будет очень значительным и при конечных, но умеренных значениях Re_p . С учетом сделанных допущений, применяя к (1.2) преобразование Лапласа во времени, находим

$$v_{pi}^L(s) = \frac{1 + A\tau_{u^*}s + k_B\tau_{u^*}\sqrt{\pi s}}{1 + \tau_{u^*}s + k_B\tau_{u^*}\sqrt{\pi s}} u_i^L(s) = \phi(s)u_i^L(s) \quad (2.5)$$

где s – переменная в области изображений.

Из (2.5), используя формулу свертки, имеем

$$v_{pi}(\tau) = L^{-1}[\phi(s)u_i^L(s)] = \int_0^\tau \phi(\tau - \tau_1) u_i(\mathbf{R}_p(\tau_1), \tau_1) d\tau_1$$

$$R_{pi}(\tau) = \int_0^\tau v_{pi}(\tau_1) d\tau_1 \quad (2.6)$$

где $\phi(\tau) = L^{-1}[\phi(s)]$ – функция Грина для уравнения (1.2), а L^{-1} – оригинал преобразования Лапласа.

Применяя к (2.6) оператор функционального дифференцирования, получаем сис-

тему интегральных уравнений относительно функциональных производных

$$\frac{\delta v_{pi}(\tau)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, \tau_1)} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{R}_p(\tau_1)) \varphi(\tau - \tau_1) H(\tau - \tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} \varphi(\tau - \tau_2) \frac{\partial u_i(\mathbf{R}_p(\tau_2), \tau_2)}{\partial x_n} \frac{\delta R_{pn}(\tau_2)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, \tau_1)} d\tau_2 \quad (2.7)$$

$$\frac{\delta R_{pi}(\tau)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, \tau_1)} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{R}_p(\tau_1)) \int_{\tau_1}^{\tau} \varphi(\tau - \tau_2) d\tau_2 + \int_{\tau_1}^{\tau} \int_{\tau_2}^{\tau} \varphi(\tau - \tau_3) d\tau_3 \frac{\partial u_i(\mathbf{R}_p(\tau_2), \tau_2)}{\partial x_n} \frac{\delta R_{pn}(\tau_2)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, \tau_1)} d\tau_2 \quad (2.8)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда: $H(x < 0) = 0$, $H(x > 0) = 1$.

Для решения интегральных уравнений (2.7), (2.8) используем метод итераций [7, 8]. В качестве первого приближения итерационной процедуры решения уравнения (2.8), являющегося точным для однородного бессдвигового течения, принимается первый член в правой части (2.8). Второй член итерационного разложения учитывает неоднородность течения с точностью до пространственных производных первого порядка. Таким образом, функциональная производная смещения частицы по скорости жидкости представляется как

$$\frac{\delta R_{pi}(\tau)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, \tau_1)} = \left(\frac{\delta R_{pi}(\tau)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \right)_1 + \left(\frac{\delta R_{pi}(\tau)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \right)_2 \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{\delta R_{pi}(\tau)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \right)_1 = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{R}_p(\tau_1)) \int_{\tau_1}^{\tau} \varphi(\tau - \tau_2) d\tau_2$$

$$\left(\frac{\delta R_{pi}(\tau)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \right)_2 = \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{R}_p(\tau_1)) \times \int_{\tau_1}^{\tau} \int_{\tau_2}^{\tau} \varphi(\tau - \tau_3) d\tau_3 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(\tau_2 - \tau_4) d\tau_4 \frac{\partial u_i(\mathbf{R}_p(\tau_2), \tau_2)}{\partial x_j} d\tau_2$$

Выражение (2.7) с учетом (2.9) примет вид

$$\frac{\delta v_{pi}(\tau)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, \tau_1)} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{R}_p(\tau_1)) \varphi(\tau - \tau_1) H(\tau - \tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} \varphi(\tau - \tau_2) \frac{\partial u_i(\mathbf{R}_p(\tau_2), \tau_2)}{\partial x_n} \left(\frac{\delta R_{pn}(\tau_2)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \right)_1 d\tau_2 + \int_{\tau_1}^{\tau} \varphi(\tau - \tau_2) \frac{\partial u_i(\mathbf{R}_p(\tau_2), \tau_2)}{\partial x_n} \left(\frac{\delta R_{pn}(\tau_2)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \right)_2 d\tau_2 \quad (2.10)$$

Ограничивая точность проводимого анализа членами с пространственными производными первого порядка, последний член в (2.10) с учетом (2.6) аппроксимируем как

$$\int_{\tau_1}^{\tau} \varphi(\tau - \tau_2) \frac{\partial u_i(\mathbf{R}_p(\tau_2), \tau_2)}{\partial x_n} \left(\frac{\delta R_{pn}(\tau_2)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \right)_2 d\tau_2 = \frac{\partial v_{pi}(\mathbf{R}_p(\tau), \tau)}{\partial x_n} \left(\frac{\delta R_{pn}(\tau)}{\delta u_j(\mathbf{x}_1, \tau_1)} \right)_2 \quad (2.11)$$

Введем двухвременную корреляционную функцию пульсаций скорости жидкости вдоль траекторий частиц

$$\Psi_{Lp}(\tau - \tau_1) = \frac{\langle u'_i(\mathbf{x}, \tau) u'_j(\mathbf{R}_p(\tau_1), \tau_1) \rangle}{\langle u'_i(\mathbf{x}, \tau) u'_i(\mathbf{x}, \tau) \rangle} \quad (2.12)$$

Тогда, предполагая, что (в связи с быстрым убыванием функции $\Psi_{Lp}(\xi)$ при возрастании ξ) основной вклад в интегралы определяется областью вблизи $\xi = 0$, из (2.4), (2.9)–(2.12) можно получить

$$\langle u'_i p \rangle = -\langle u'_i u'_k \rangle \left(f_{u^*} \frac{\partial P}{\partial v_k} + \tau_{u^*} g_{u^*} \frac{\partial P}{\partial x_k} + \tau_{u^*} \ell_{u^*} \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \frac{\partial P}{\partial v_n} + \tau_{u^*}^2 h_{u^*} \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \frac{\partial P}{\partial x_n} + \tau_{u^*}^2 h_{u^*} \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \frac{\partial V_j}{\partial x_n} \frac{\partial P}{\partial v_j} \right) \quad (2.13)$$

$$f_{u^*} = \int_0^\infty \Psi_{Lp}(\xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad g_{u^*} = \frac{1}{\tau_{u^*}} \int_0^\infty \Psi_{Lp}(\xi) \int_0^\xi \varphi(\xi_1) d\xi_1 d\xi$$

$$\ell_{u^*} = \frac{1}{\tau_{u^*}} \int_0^\infty \Psi_{Lp}(\xi) \int_0^\xi \varphi(\xi - \xi_1) \int_0^{\xi_1} \varphi(\xi_1 - \xi_2) d\xi_2 d\xi_1 d\xi$$

$$h_{u^*} = \frac{1}{\tau_{u^*}^2} \int_0^\infty \Psi_{Lp}(\xi) \int_0^\xi \int_{\xi_1}^\xi \varphi(\xi - \xi_3) d\xi_3 \int_0^{\xi_1} \varphi(\xi_1 - \xi_2) d\xi_2 d\xi_1 d\xi \quad (2.14)$$

Выражения (2.13), (2.14) справедливы для значения времени большего по сравнению с лагранжевым временным интегральным масштабом T_{Lp} , пульсаций скорости жидкости, вычисленным вдоль траекторий частиц (временем взаимодействия частиц с энергоемкими турбулентными вихрями несущего потока). Коэффициенты f_{u^*} , g_{u^*} , ℓ_{u^*} , h_{u^*} характеризуют степень вовлечения частиц в пульсационное движение несущего турбулентного потока. Для вычисления этих коэффициентов необходимо задать автокорреляционную функцию $\Psi_{Lp}(\xi)$. В случае, когда $\Psi_{Lp}(\xi) = \exp(-\xi/T_{Lp})$, коэффициенты вовлечения (2.14) с учетом (2.5) представляются в виде

$$f_{u^*} = \phi(s = T_{Lp}^{-1}) = \frac{1 + A\Omega_{u^*} + B\Omega_{u^*}}{1 + \Omega_{u^*} + B\Omega_{u^*}}, \quad g_{u^*} = \frac{\phi(s = T_{Lp}^{-1})}{\Omega_{u^*}}$$

$$\ell_{u^*} = \frac{\phi^2(s = T_{Lp}^{-1})}{\Omega_{u^*}}, \quad h_{u^*} = \frac{\phi^2(s = T_{Lp}^{-1})}{\Omega_{u^*}^2}, \quad \Omega_{u^*} = \frac{\tau_{u^*}}{T_{Lp}}, \quad B = k_B \sqrt{\pi T_{Lp}} \quad (2.15)$$

В предельном случае, когда плотность жидкости мала по сравнению с плотностью частиц ($\rho^o \rightarrow 0$) и, следовательно, $\tau_{u^*} = \tau_u$ и $A = B = 0$, соотношения (2.14), (2.15) переходят в выражения для коэффициентов вовлечения, полученные в [4, 5, 7, 8].

Первые два члена в правой части (2.13) описывают взаимодействие частиц с турбулентными вихрями жидкости в однородном бессдвиговом потоке, а последние три слагаемых учитывают влияние градиента скорости. Выражение (2.13) по форме совпадает с представлением корреляции $\langle u'_i p \rangle$ в [7, 8], однако теперь коэффициенты вовлечения (2.14), (2.15) учитывают влияние нестационарных сил на механизм взаимодействия частиц с турбулентными вихрями.

Из (2.13) могут быть определены смешанные корреляционные моменты между пульсациями скоростей жидкой и дисперсной фаз

$$\langle u'_i v'_j \rangle = \frac{1}{\Phi} \left(\int \langle u'_i p \rangle v_j dv - V_j \int \langle u'_i p \rangle dv \right) = f_{u^*} \langle u'_i u'_j \rangle + \tau_{u^*} \langle u'_i u'_k \rangle \left(\ell_{u^*} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - g_{u^*} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \right) \quad (2.16)$$

$$\Phi = \int P dv, \quad V_i = \frac{1}{\Phi} \int v_i P dv$$

где Φ и V_i – осредненные объемная концентрация и скорость дисперсной фазы.

Для однородного безградиентного турбулентного потока с учетом (2.15) из (2.16) получается следующее соотношение между смешанными корреляционными моментами для скоростей сплошной и дисперсной фаз и напряжениями Рейнольдса для несущего потока:

$$\langle u'_i v'_j \rangle = f_{u^*} \langle u'_i u'_j \rangle = \frac{1 + A\Omega_{u^*} + B\Omega_{u^*}}{1 + \Omega_{u^*} + B\Omega_{u^*}} \langle u'_i u'_j \rangle \quad (2.17)$$

При пренебрежении силой Бассэ ($B = 0$) формула (2.17) совпадает с соотношением [23]. Видно, что в результате действия нестационарных сил, обусловленных градиентом давления в жидкости (архимедова сила) и эффектом присоединенной массы, коэффициент вовлечения f_{u^*} для легких частиц (при $A > 1$) может оказаться больше единицы и, следовательно, смешанные корреляционные моменты будут превосходить значения напряжений Рейнольдса в жидкости. Сила Бассэ увеличивает мгновенное сопротивление течению и поэтому оказывает сглаживающее влияние, увеличивая f_{u^*} для тяжелых частиц и уменьшая для легких.

После определения корреляции $\langle u'_i p \rangle$, связанной с силой сопротивления, находятся корреляционные моменты плотности вероятности распределения частиц с другими силами, действующими на частицы. Ограничимся членами, содержащими производные не выше второго порядка по ФПВ. Корреляционный момент, обусловленный пульсациями архимедовой силы и силы присоединенной массы, с учетом уравнения неразрывности несжимаемой жидкости $\partial u_k / \partial x_k = 0$ дается в виде

$$\langle f'_{Ai} p \rangle = A \left(\frac{D_0 \langle u'_i p \rangle}{D\tau} - \left\langle u'_i \frac{Dp}{D\tau} \right\rangle + \langle u'_k p \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u'_i u'_k p \rangle}{\partial x_k} \right) \quad (2.18)$$

Для представления члена $\langle u'_i Dp/D\tau \rangle$ в (2.18) используем уравнение Лиувилля (2.2)

$$\begin{aligned} \left\langle u'_i \frac{Dp}{D\tau} \right\rangle &= - \left\langle u'_i \frac{\partial}{\partial v_k} \left[\left(\frac{u_k - v_{pk}}{\tau_{u^*}} + f_{Ak} + f_{Bk} + f_{Lk} + F_{gk} \right) p \right] \right\rangle + \\ &+ \left\langle u'_i (u_k - v_{pk}) \frac{\partial p}{\partial x_k} \right\rangle = - \left(\frac{U_k - V_k}{\tau_{u^*}} + F_{Ak} + F_{Bk} + F_{Lk} + F_{gk} \right) \frac{\partial \langle u'_i p \rangle}{\partial x_k} - \\ &- \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{\langle u'_i u'_k p \rangle - \langle u'_i v'_k p \rangle}{\tau_{u^*}} + \langle u'_i f'_{Ak} p \rangle + \langle u'_i f'_{Bk} p \rangle + \langle u'_i f'_{Lk} p \rangle \right) + \\ &+ (U_k - V_k) \left\langle u'_i \frac{\partial p}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u'_i u'_k \frac{\partial p}{\partial x_k} \right\rangle - \left\langle u'_i v'_k \frac{\partial p}{\partial x_k} \right\rangle \end{aligned} \quad (2.19)$$

Пренебрегая в (2.19) членами, содержащими производные по p выше первого порядка, получим

$$\left\langle u'_i \frac{Dp}{D\tau} \right\rangle = - \left(\frac{\langle u'_i u'_k \rangle - \langle u'_i v'_k \rangle}{\tau_{u^*}} + \langle u'_i f'_{Ak} \rangle + \langle u'_i f'_{Bk} \rangle + \langle u'_i f'_{Lk} \rangle \right) \frac{\partial P}{\partial v_k} + (\langle u'_i u'_k \rangle - \langle u'_i v'_k \rangle) \frac{\partial P}{\partial x_k} \quad (2.20)$$

$$\langle u'_i f'_{Ak} \rangle = A \left(\left\langle u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial \tau} \right\rangle + U_n \left\langle u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial x_n} \right\rangle + \langle u'_i u'_n \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_n} + \left\langle u'_i \frac{\partial u'_k u'_n}{\partial x_n} \right\rangle \right) \quad (2.21)$$

Вкладом корреляционных моментов пульсаций скорости жидкости с пульсациями силы Бассэ $\langle u'_i f'_{Bk} \rangle$ и подъемной силы $\langle u'_i f'_{Lk} \rangle$ в (2.20) пренебрежем.

Корреляция $\langle u'_i u'_k p \rangle$ в рассматриваемом приближении представляется как

$$\langle u'_i u'_k p \rangle = \langle u'_i u'_k \rangle P \quad (2.22)$$

При определении $\langle u'_i p \rangle$ в первом и третьем слагаемых в (2.18) ограничимся первым (однородным) членом в (2.13). Тогда выражение (2.18) с учетом (2.20)–(2.22) примет вид

$$\begin{aligned} \langle f'_{Ai} p \rangle = & A \left[-\frac{D_0}{D\tau} \left(f_{u^*} \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial P}{\partial v_k} \right) + \frac{\langle u'_i u'_k \rangle - \langle u'_i v'_k \rangle}{\tau_{u^*}} \frac{\partial P}{\partial v_k} + \right. \\ & + A \left(\left\langle u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial \tau} \right\rangle + U_n \left\langle u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial x_n} \right\rangle + \langle u'_i u'_n \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_n} + \left\langle u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial x_n} \right\rangle \right) \frac{\partial P}{\partial v_k} + \\ & \left. + \langle u'_i v'_k \rangle \frac{\partial P}{\partial x_k} - f_{u^*} \langle u'_k u'_n \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial P}{\partial v_n} + \frac{\partial \langle u'_i u'_k \rangle}{\partial x_k} P \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

С целью упрощения анализа корреляцией $\langle f_{Bi} p \rangle$ в (2.3) будем пренебрегать, так как вклад силы Бассэ, как правило, невелик и в отличие от нестационарных сил, связанных с градиентом давления в жидкости и ускорением присоединенной массы, учет ее не приводит к качественным изменениям, а лишь слегка сглаживает эффекты нестационарности. Корреляционный момент пульсаций подъемной силы и плотности вероятности частиц определяется выражением

$$\langle f'_{Li} p \rangle = L \left[(U_j - V_j) \left\langle \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) p \right\rangle + \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \langle u'_j p \rangle + \left\langle (u'_j - v'_j) \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) p \right\rangle \right] \quad (2.24)$$

Пренебрегаем корреляциями флуктуаций завихренности жидкости со скоростями сплошной и дисперсной фаз (что оправдано только при больших числах Рейнольдса турбулентности). Тогда, ограничиваясь первым членом в выражении (2.13) для $\langle u'_i p \rangle$, представляем (2.24) как

$$\langle f'_{Li} p \rangle = -L f_{u^*} \langle u'_j u'_k \rangle \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial P}{\partial v_k} \quad (2.25)$$

С учетом принятых допущений и соотношений (2.13), (2.23), (2.25) из (2.3) получаем замкнутое кинетическое уравнение для ФПВ скорости частиц в турбулентном потоке

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau} + v_i \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial v_i} \left[\left(\frac{U_i - v_i}{\tau_{u^*}} + A \frac{\partial \langle u'_i u'_k \rangle}{\partial x_k} + F_{Ai} + F_{Bi} + F_{Li} + F_{gi} \right) P \right] = \\ = -\frac{\partial}{\partial v_i} \left\{ \langle u'_i u'_k \rangle \left(f_{u^*} \frac{\partial P}{\partial v_k} + \tau_{u^*} g_{u^*} \frac{\partial P}{\partial x_k} + \tau_{u^*} \ell_{u^*} \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \frac{\partial P}{\partial v_n} + \tau_{u^*}^2 h_{u^*}^2 \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \frac{\partial P}{\partial x_n} + \right. \right. \\ \left. \left. + \tau_{u^*}^2 h_{u^*} \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_n} \frac{\partial P}{\partial v_j} \right) \right\} + A \left[\frac{D_0}{D\tau} \left(f_{u^*} \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial P}{\partial v_k} \right) + \frac{\langle u'_i v'_k \rangle - \langle u'_i u'_k \rangle}{\tau_{u^*}} \frac{\partial P}{\partial v_k} - \right. \\ \left. - A \left(\left\langle u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial \tau} \right\rangle + U_n \left\langle u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial \tau} \right\rangle + \langle u'_i u'_n \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_n} + \left\langle u'_i \frac{\partial u'_k u'_n}{\partial x_n} \right\rangle \right) \frac{\partial P}{\partial v_k} - \langle u'_i v'_k \rangle \frac{\partial P}{\partial x_k} + \right. \\ \left. \left. + f_{u^*} \langle u'_k u'_n \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial P}{\partial v_n} \right] + L f_{u^*} \langle u'_j u'_k \rangle \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial P}{\partial v_k} \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Члены в левой части (2.26) описывают конвекцию ФПВ в фазовом пространстве координат и скоростей частиц, а члены в правой части характеризуют диффузионный

перенос в этом пространстве вследствие взаимодействия частиц с турбулентными вихрями несущего потока.

3. Уравнения баланса массы, количества движения и вторых моментов пульсаций скорости дисперсной фазы. Путем интегрирования (2.26) по пространству скоростей может быть получена система континуальных уравнений для осредненных характеристик (моментов) дисперсной фазы. Уравнение сохранения массы имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi V_k}{\partial x_k} = 0 \quad (3.1)$$

Уравнение баланса количества движения записывается как

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tau} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle v_j' v_k' \rangle - A \langle u_i' u_k' \rangle) + \frac{U_i - V_i}{\tau_{u*}} + F_{Ai} + F_{Bi} + F_{Li} + F_{gi} - \frac{D_{pik}}{\tau_{u*}} \frac{\partial \ln \Phi}{\partial x_k} \quad (3.2)$$

$$\langle v_i' v_j' \rangle = \frac{1}{\Phi} \int (v_j - V_j)(v_i - V_i) P dv$$

Здесь $\langle v_i' v_j' \rangle$ – турбулентные напряжения в дисперсной фазе, обусловленные вовлечением частиц в пульсационное движение сплошной среды. Первый член в правой части (3.2) описывает турбулентную миграцию частиц, вызванную возникновением турбулентных напряжений в дисперсной фазе и воздействием турбулентных напряжений в жидкости. Нужно подчеркнуть, что соотношение между этими двумя слагаемыми определяет направление действия турбулентной миграции. Последний член в (3.2) описывает турбулентную диффузию частиц. Тензор турбулентной диффузии частиц определяется выражением

$$D_{pij} = \tau_{u*} \left(\langle v_i' v_j' \rangle + g_{u*} \langle u_i' u_j' \rangle + \tau_{u*} h_{u*} \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - A \langle u_i' v_j' \rangle \right) \quad (3.3)$$

Следует отметить, что тензор турбулентной диффузии частиц (3.3), так же как и смешанный корреляционный момент пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз (2.16), в сдвиговых потоках является несимметричным.

Уравнение для вторых моментов пульсаций скорости дисперсной фазы с учетом (2.16) представляется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial \tau} + V_k \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v_i' v_j' v_k' \rangle}{\partial x_k} = & - \langle v_i' v_k' \rangle \frac{\partial V_j}{\partial x_k} - \langle v_j' v_k' \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \\ & + (1+A) \langle u_i' u_k' \rangle \left(\ell_{u*} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - g_{u*} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \right) + (1+A) \langle u_j' u_k' \rangle \left(\ell_{u*} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - g_{u*} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) + \frac{2}{\tau_{u*}} (f_{u*} \langle u_i' u_j' \rangle - \\ & - \langle v_i' v_j' \rangle) + A \left\{ \frac{2(f_{u*} - 1)}{\tau_{u*}} \langle u_i' u_j' \rangle + f_{u*} \left[\langle u_i' u_k' \rangle \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \right) + \langle u_j' u_k' \rangle \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\Phi} \frac{D_0}{D\tau} (f_{u*} \Phi \langle u_i' u_j' \rangle) - A \left(\frac{D_0 \langle u_i' u_j' \rangle}{D\tau} + \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \langle u_j' u_k' \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u_i' u_j' u_k' \rangle}{\partial x_k} \right) \right\} + \\ & + L \left[(f_{u*} \langle u_i' u_k' \rangle - \langle v_i' v_k' \rangle) \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) + (f_{u*} \langle u_j' u_k' \rangle - \langle v_j' v_k' \rangle) \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \right] \quad (3.4) \end{aligned}$$

Уравнение (3.4) описывает конвективный и диффузионный перенос, порождение пульсаций из осредненного сдвигового потока, генерацию флуктуаций в результате вовлечения частиц в пульсационное движение жидкости и диссипацию турбулентной

энергии дисперсной фазы за счет работы сил межфазного взаимодействия. В однородном бесследовом турбулентном потоке или для мелких частиц в рамках локально-однородного приближения из (3.4) получается простое алгебраическое выражение для тензора напряжений дисперсной фазы

$$\langle v_i' v_j' \rangle = [f_{ii^*}(1 + A) - A] \langle u_i' u_j' \rangle = \frac{1 + A^2 \Omega_{ii^*}}{1 + \Omega_{ii^*}} \langle u_i' u_j' \rangle \quad (3.5)$$

Соотношение (3.5) совпадает с известной формулой для пульсационной энергии частицы в однородной изотропной турбулентности [24].

Коэффициент турбулентной диффузии частиц (3.3) в локально-однородном приближении с учетом (3.5) определяется соотношением

$$D_{pji} = \tau_{ii^*} \langle v_i' v_j' \rangle + g_{ii^*} \langle u_i' u_j' \rangle - A f_{ii^*} \langle u_i' u_j' \rangle = T_{Lp} \langle u_i' u_j' \rangle \quad (3.6)$$

что соответствует известному решению Чена [24].

Ускорение миграционной силы, обусловленное взаимодействием частиц с турбулентными вихрями жидкости, с учетом (3.5) описывается выражением

$$F_{Mi} = - \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle v_i' v_k' \rangle - A \langle u_i' u_k' \rangle) = - \frac{\partial}{\partial x_k} (M \langle u_i' u_k' \rangle)$$

$$M = \frac{(1 - A)(1 - A \Omega_{ii^*})}{1 + \Omega_{ii^*}} \quad (3.7)$$

Коэффициент миграции M в (3.7) определяется значениями параметров инерционности частицы Ω_{ii^*} и A , зависящего в свою очередь от отношения плотностей ρ° и коэффициента присоединенной массы C_A (в дальнейшем принимается $C_A = 0,5$). Для тяжелых частиц ($A \rightarrow 0$) $M > 0$ и, следовательно, под действием турбулентной миграции происходит их перемещение из областей с высокой степенью турбулентности потока в низкотурбулентные зоны. Однако при $A = 1$ и $\Omega_{ii^*}^{-1}$ имеет место изменение знака M , т.е. меняется направление действия миграционной силы. Так, при $A < 1$ миграция крупных (инерционных) частиц, а при $A > 1$ миграция мелких частиц (пузырьков) направлена из областей с низкой турбулентностью в сторону высокого уровня пульсаций. Интересным представляется тот факт, что турбулентная миграция крупных пузырьков по-прежнему смещает их в низкотурбулентные зоны. При $A = 1$ ($\rho^\circ = 1$) коэффициент M и сила миграции, естественно, равны нулю.

4. Время взаимодействия частиц с турбулентными вихрями. Время взаимодействия частиц с энергоемкими вихрями является одной из главных характеристик, определяющих поведение их в турбулентном потоке. Для очень мелких (безынерционных) частиц время взаимодействия "частицы – турбулентность" T_{Lp} совпадает с интегральным лагранжевым масштабом турбулентности T_L , определяемым вдоль траекторий жидких частиц. Для крупных частиц T_{Lp} может существенно отличаться от T_L , и в зависимости от значений параметров, связанных с инерционностью частиц и осредненным межфазным скоростным скольжением, отношение T_{Lp}/T_L может быть как больше, так и меньше единицы.

В настоящей статье определение времени взаимодействия частиц произвольной плотности с турбулентными вихрями основано на гипотезе Коррсина, используемой ранее в [25] для вычисления T_{Lp} при $\rho^\circ \rightarrow 0$.

Для получения явной связи между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками турбулентности широкое распространение получила гипотеза Коррсина [26] о возможности независимого представления и, следовательно, осреднения случайных полей пульсаций скорости и смещений жидких частиц. В соответствии с этой гипотезой лагранжевы временные автокорреляционные функции пульсаций скорости жидкости, вычисленные вдоль траекторий частиц, связаны с эйлеровыми простран-

венно-временными корреляционными функциями в стационарном однородном изотропном турбулентном поле соотношениями

$$\Psi_{L_p}^l(\tau) = \int \Psi_E^l(\mathbf{r}, \tau) \phi_p(\mathbf{r}, \tau) d\mathbf{r}, \quad \Psi_{L_p}^n(\tau) = \int \Psi_E^n(\mathbf{r}, \tau) \phi_p(\mathbf{r}, \tau) d\mathbf{r} \quad (4.1)$$

где l и n обозначают направления, параллельное и перпендикулярное вектору относительной скорости $\mathbf{W} = \mathbf{V} - \mathbf{U}$. С целью получения явного (безытерационного) выражения для лагранжевых автокорреляционных функций плотность вероятности смещения частицы $\phi_p(\mathbf{r}, \tau)$ на расстояние \mathbf{r} за время τ задается в виде δ -функции [25]

$$\phi_p(\mathbf{r}, \tau) = \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{W}\tau - \frac{u_0\Psi(\tau)}{\sqrt{3}}\mathbf{s}\right) \quad (4.2)$$

где $u_0\Psi(\tau)$ – эффективная длина пробега частицы в пульсационном движении, \mathbf{s} – единичный вектор в направлении \mathbf{r} , $u_0^2 = \langle u'_k u'_k \rangle / 3$ – интенсивность турбулентности.

Эйлерова пространственно-временная корреляционная функция представляется в виде

$$\Psi_{Eij}(\mathbf{r}, \tau) = \Psi_{Eij}(\mathbf{r})\Psi_E(\tau) \quad (4.3)$$

где в изотропной турбулентности тензор $\Psi_{Eij}(\mathbf{r})$ выражается как

$$\Psi_{Eij}(\mathbf{r}) = [f(r) - g(r)] \frac{r_i r_j}{r^2} + g(r) \delta_{ij}, \quad g(r) = f(r) + \frac{r}{2} f'(r), \quad r = |\mathbf{r}| \quad (4.4)$$

Из (4.1) с учетом (4.2)–(4.4) следует

$$\Psi_{L_p}^l(\tau) = \left[\frac{f(r) - g(r)}{r^2} \left(W\tau + \frac{u_0\Psi(\tau)}{\sqrt{3}} \right)^2 + g(r) \right] \Psi_E(\tau)$$

$$\Psi_{L_p}^n(\tau) = \left[\frac{f(r) - g(r)}{r^2} \frac{u_0^2\Psi^2(\tau)}{3} + g(r) \right] \Psi_E(\tau)$$

$$r = \sqrt{\left(W\tau + \frac{u_0\Psi(\tau)}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{2}{3} u_0^2\Psi^2(\tau)}, \quad W = |\mathbf{W}| \quad (4.5)$$

Функция $\psi(\tau)$, характеризующая эффективную длину пробега частицы в результате ее вовлечения в пульсационное движение несущего потока, может быть определена из решения уравнения движения (1.2). При учете в (1.2) только первых двух членов в правой части как наиболее существенных приближенно получается

$$\psi(\tau) = \tau + (1 - A)\tau_{**}[\exp(-\tau/\tau_{**}) - 1] \quad (4.6)$$

Для описания эйлеровых корреляционных функций используются экспоненциальные зависимости

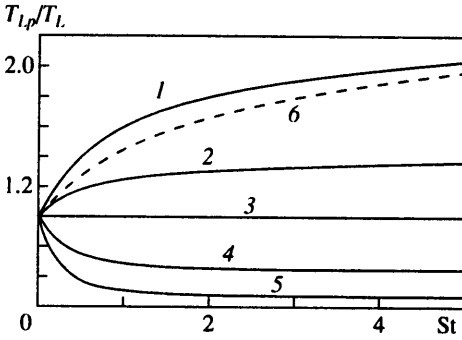
$$f(r) = \exp(-r/L), \quad \Psi_E(\tau) = \exp(-\tau/T_E) \quad (4.7)$$

где L и T_E – эйлеровы интегральные пространственный и временной масштабы. Формулы (4.7) дают хорошее представление корреляционных функций при больших числах Рейнольдса, хотя они и не являются корректными при $r, \tau \rightarrow 0$.

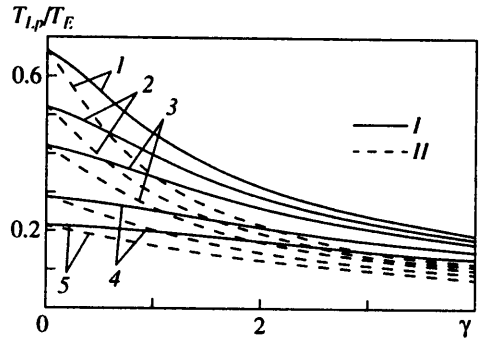
Уравнения (4.5)–(4.7) позволяют определить лагранжевы интегральные временные масштабы пульсаций скорости жидкости вдоль траекторий частиц

$$T_{L_p}^l = \int_0^{\infty} \Psi_{L_p}^l(\tau) d\tau, \quad T_{L_p}^n = \int_0^{\infty} \Psi_{L_p}^n(\tau) d\tau \quad (4.8)$$

Формулы (4.8) с учетом (4.5) и (4.6) отражают влияние инерционности частиц, отношения плотностей несущей и дисперсной фаз и "эффекта пересечения траекто-



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Влияние St на время взаимодействия частиц с турбулентными вихрями: 1–5 – $A = 0, 0,5, 1, 2, 3$; 6 – [28]

Фиг. 2. Влияние осредненного скольжения на времена взаимодействия частиц с турбулентными вихрями в направлениях, параллельном (I) и перпендикулярном (II) вектору относительной скорости: 1–5 – $A = 0, 0,5, 1, 2, 3$

рий" [21], обусловленного осредненным межфазным скоростным скольжением, на времена взаимодействия частиц с турбулентными вихрями. В качестве следствия получается соотношение между лагранжевым и эйлеровым временными масштабами турбулентности

$$\frac{T_L}{T_E} = \frac{3 + 2m}{3(1 + m)^2}, \quad m = \frac{u_0 T_E}{L} \quad (4.9)$$

Из (4.9) видно, что в соответствии с результатами прямого численного моделирования (например, [27]) эйлеров временной макромасштаб, определенный в движущейся с осредненной скоростью потока системе координат, превышает соответствующий лагранжев масштаб.

На фиг. 1 показано влияние числа Стокса $St = \tau_{in}/T_E$ и параметра A на время взаимодействия частиц с турбулентными вихрями при отсутствии эффекта пересечения траекторий ($\gamma = W/u_0 = 0$) для $m = 1$. Для тяжелых частиц ($A < 1$) с ростом числа St происходит монотонное увеличение T_{Lp} . При $A = 1$, естественно, $T_{Lp} = T_L$. Для легких частиц или пузырьков ($A > 1$) с ростом St имеет место снижение T_{Lp} . На фиг. 1 также представлена аппроксимационная зависимость из [28] для случая движения тяжелых частиц в газовом потоке ($A = 0$) при $m = 1$.

Влияние эффекта пересечения траектории на времена взаимодействия частиц с турбулентными вихрями при $m = St = 1$ демонстрируется на фиг. 2. Видно, что при всех значениях параметра A увеличение осредненного межфазного скольжения приводит к снижению T_{Lp} . Уменьшение отношения плотностей дисперсной и сплошной фаз (рост A) качественно аналогично увеличению осредненного скольжения.

Особенно наглядно влияние осредненного скоростного скольжения и параметра A на T_{Lp} проявляется в предельном случае очень инерционных частиц ($St \rightarrow \infty$), когда из (4.4)–(4.9) следует

$$\frac{T_{Lp}^I}{T_E} = \frac{1 + 0,5mN + m(\gamma + 3^{-1/2}A)^2(2N)^{-1}}{(1 + mN)^2}, \quad \frac{T_{Lp}^{II}}{T_E} = \frac{1 + 0,5mN + mA^2(6N)^{-1}}{(1 + mN)^2}$$

$$N = \sqrt{\frac{2A^2}{3} + \left(\gamma + \frac{A}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

В другом предельном случае сильного влияния эффекта пересечения траекторий (большом значении параметра дрейфа γ) из (4.4)–(4.9) для всех значений параметра A следуют простые соотношения, полученные для $A = 0$ в [29]

$$T_{Lp}^l = \frac{L}{W}, \quad T_{Lp}^n = \frac{L}{2W} \quad (4.10)$$

5. Однородный сдвиговый слой. Анализ распределений смешанных корреляционных моментов пульсаций скоростей жидкой и дисперсной фаз $\langle u'_i v'_j \rangle$, а также турбулентных напряжений дисперсной фазы $\langle v'_i v'_j \rangle$ проводится для однородного сдвигового слоя с постоянным градиентом скорости. В этом течении вследствие однородности турбулентности тройные моменты пульсаций скорости обращаются в нуль, цепочка моментных уравнений, следующая из кинетического уравнения для ФПВ, обрывается и уравнения для вторых моментов становятся замкнутыми. В [30] с целью тестирования развиваемой кинетической модели выполнено сравнение результатов расчета эволюции во времени компонент $\langle u'_i v'_j \rangle$ и $\langle v'_i v'_j \rangle$ с данными прямого стохастического моделирования движения тяжелых частиц в нестационарном турбулентном однородном сдвиговом газовом потоке ($A = 0$), генерируемом при помощи метода крупных вихрей [31].

В настоящем разделе анализ проводится в квазистационарном приближении, т.е. при пренебрежении производными по времени в уравнениях для характеристик дисперсной фазы. Течение предполагается в направлении x и характеризуется постоянными градиентами скорости несущего потока в направлении y . В этом случае из уравнений (3.1) и (3.2) вытекает, что в однородном сдвиговом слое при отсутствии силы тяжести концентрация частиц в пространстве не изменяется ($\Phi = \text{const}$), а скорости дисперсной и сплошной фаз совпадают ($V_x = U_x$). Вследствие простоты рассматриваемого течения и обращения в нуль третьих моментов пульсаций скорости дисперсной фазы могут быть получены точные решения уравнений для вторых моментов.

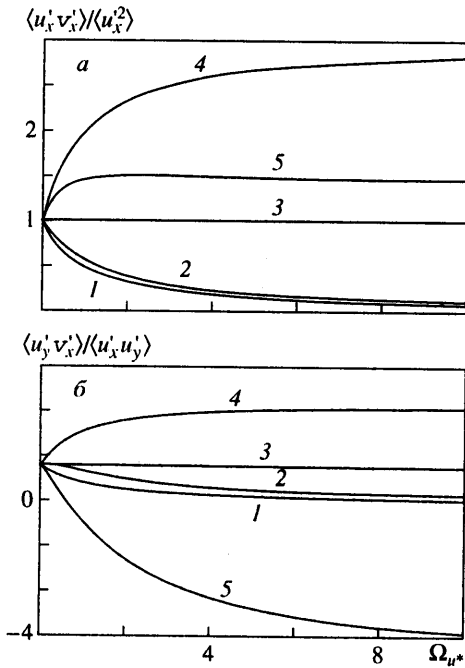
Ненулевые компоненты смешанных корреляционных моментов пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз (2.18) в однородном сдвиговом слое имеют вид

$$\begin{aligned} \langle u'_x v'_x \rangle &= f_{u*} \langle u_x'^2 \rangle - \tau_{u*} f_{u1*} \langle u'_x u'_y \rangle \frac{dU_x}{dy}, \quad \langle u'_y v'_y \rangle = f_{u*} \langle u_y'^2 \rangle \\ \langle u'_y v'_z \rangle &= f_{u*} \langle u_z'^2 \rangle, \quad \langle u'_x v'_y \rangle = f_{u*} \langle u'_x u'_y \rangle \\ \langle u'_y v'_x \rangle &= f_{u*} \langle u'_x u'_y \rangle - \tau_{u*} f_{u1*} \langle u_y'^2 \rangle \frac{dU_x}{dy}, \quad f_{u1*} = g_{u*} - l_{u*} \end{aligned} \quad (5.1)$$

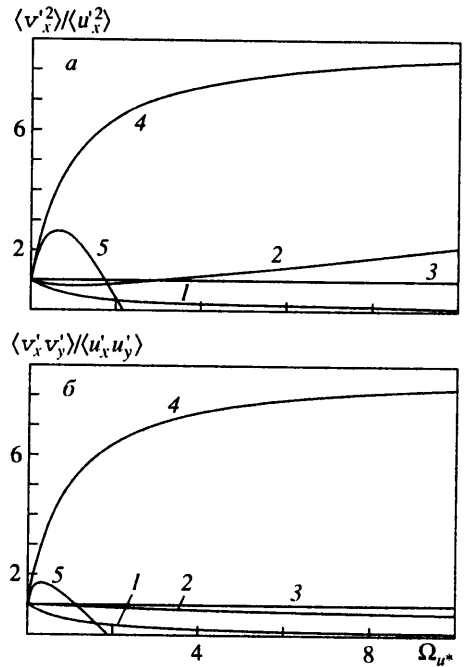
Компоненты турбулентных напряжений дисперсной фазы согласно (3.4) представляются в виде

$$\begin{aligned} \langle v_x'^2 \rangle &= C_1 \langle u_x'^2 \rangle - \tau_{u*} C_2 \langle u'_x u'_y \rangle \frac{dU_x}{dy} + \frac{\tau_{u*}^2}{2} C_2 \langle u_x'^2 \rangle \left(\frac{dU_x}{dy} \right)^2 \\ \langle v_y'^2 \rangle &= C_1 \langle u_y'^2 \rangle, \quad \langle v_z'^2 \rangle = C_2 \langle u_z'^2 \rangle \\ \langle v'_x v'_y \rangle &= C_1 \langle u'_x u'_y \rangle - \frac{\tau_{u*}}{2} C_2 \langle u_y'^2 \rangle \frac{dU_x}{dy} \\ C_1 &= f_{u*} + A(f_{u*} - 1), \quad C_2 = (1 - A)(f_{u*} - A) + (1 + A)f_{u1*} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Коэффициенты вовлечения в (5.1) и (5.2) задаются согласно (2.15) без вклада силы Бассэ ($B = 0$). Напряжения Рейнольдса в сплошной фазе соответствуют эксперимен-



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Продольный (а) и касательный (б) корреляционные моменты пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз: 1, 2 - $A = 0$; 3 - $A = 1$; 4, 5 - $A = 3$; 1, 4 - $S_u = 0$; 2, 5 - $S_u = 1$

Фиг. 4. Продольный (а) и касательный (б) моменты пульсаций скоростей дисперсной фазы: обозначения соответствуют фиг. 3

тальным данным для однородного потока с постоянным сдвигом скорости [32]

$$\frac{\langle u_x'^2 \rangle}{k} = 1,07, \quad \frac{\langle u_y'^2 \rangle}{k} = 0,37, \quad \frac{\langle u_z'^2 \rangle}{k} = 0,56, \quad \frac{\langle u'_x u'_y \rangle}{\langle u_x'^2 \rangle^{1/2} \langle u_y'^2 \rangle^{1/2}} = -0,45$$

где $k = \langle u'_n u'_n \rangle / 2$ - энергия турбулентности.

Поведение смешанных корреляционных моментов пульсаций скоростей сплошной и дискретной фаз согласно (5.1) в зависимости от параметра инерционности Ω_{u^*} при разных значениях параметров A и $S_u = T_{Lp} dU_x / dy$ демонстрируется на фиг. 3. Влияние сдвига средней скорости потока на смешанные моменты для тяжелых частиц ($A = 0$) не очень существенно и приводит к некоторому увеличению их значений, что согласуется с результатами численного моделирования [31]. При $A = 1$ смешанные моменты совпадают с соответствующими моментами в жидкости. Характер влияния сдвига скорости на продольный смешанный момент для пузырьков ($A = 3$) качественно противоположен соответствующему эффекту для частиц и направлен к снижению $\langle u'_x v'_x \rangle$. Особенно сильно эффект сдвига скорости в случае пузырьков проявляется по отношению к касательному смешанному моменту $\langle u'_y v'_x \rangle$. Следует отметить, что при достаточно большом значении параметра инерционности Ω_{u^*} величины $\langle u'_y v'_x \rangle$ и $\langle u'_x u'_y \rangle$ имеют разные знаки. Поэтому часто используемый способ привлечения простых градиентных гипотез для описания турбулентных характеристик в газожидкостных потоках по аналогии с однофазными течениями может приводить к качественным ошибкам.

Поведение пульсаций скорости дисперсной фазы согласно (5.2) иллюстрируется на фиг. 4. Видно, что в сдвиговом потоке интенсивность пульсаций продольной скорости

достаточно инерционных тяжелых частиц в результате порождения за счет сдвига средней скорости может превышать соответствующую интенсивность турбулентности несущей среды. Этот факт подтверждается результатами прямого стохастического моделирования [31]. Влияние сдвига скорости на продольный и касательный моменты пульсаций скорости пузырьков качественно противоположно эффекту для частиц и направлено к их снижению.

6. Распределение пузырьков в вертикальной трубе. На основе полученных уравнений движения дисперсной фазы проведем анализ распределения пузырьков по сечению длинной вертикальной трубы. Течение предполагается стационарным и гидродинамически развитым. Объемная концентрация дисперсной фазы считается достаточно малой, чтобы обратным влиянием пузырьков на турбулентные характеристики несущей жидкой среды и их взаимодействием в результате столкновений можно было пренебречь. В рассматриваемом случае можно положить $\rho^{\circ} \rightarrow \infty$.

Характеристики гидродинамически развитого течения изменяются только по радиальной координате r и не зависят от продольной координаты x . Кроме того, осредненные радиальные скорости сплошной и дисперсной фаз равны нулю ($U_r = V_r = 0$). В этом случае распределение пузырьков по сечению трубы определяется из решения уравнения движения (3.2) в проекции на ось r . Пульсационную энергию и коэффициент турбулентной диффузии в (3.2) представим в рамках локально-однородного приближения (3.5) и (3.6). Интенсивности турбулентных пульсаций радиальной и азимутальной скоростей дисперсной фазы в круглой трубе принимаются равными. В рассматриваемом приближении из (3.2) следует

$$\frac{T_{Lp}}{\tau_{u*}} \langle u_r'^2 \rangle \frac{d \ln \Phi}{dr} = - \frac{dM \langle u_r'^2 \rangle}{dr} + \frac{C_L}{C_A} (U_x - V_x) \frac{dU_x}{dr} \quad (6.1)$$

Из (6.1) видно, что распределение (профиль концентрации) пузырьков по сечению вертикальной трубы формируется под действием силы турбулентной миграции и подъемной силы, обусловленной сдвигом скорости. С целью упрощения анализа принимается, что осредненное продольное скольжение фаз (скорость дрейфа) в (6.1) определяется только силой плавучести, а влиянием турбулентного переноса в первом приближении можно пренебречь, т.е.

$$U_x - V_x = \mp g \tau_u \quad (6.2)$$

где знаки " \mp " относятся соответственно к восходящему и нисходящему течениям.

Для диапазона изменения размеров пузырьков, когда коэффициент сопротивления C_D приближенно может считаться постоянной величиной, из (6.2) получается

$$U_x - V_x = \mp \sqrt{\frac{4d_p g}{3C_D}} \quad (6.3)$$

Время взаимодействия пузырьков с турбулентными вихрями T_{Lp} при выполнении условия $|U_x - V_x| \gg u_*$, где u_* – динамическая скорость, в соответствии с (4.10) может быть принято равным

$$T_{Lp} = \frac{l}{2|U_x - V_x|}, \quad L = 0, 1D \quad (6.4)$$

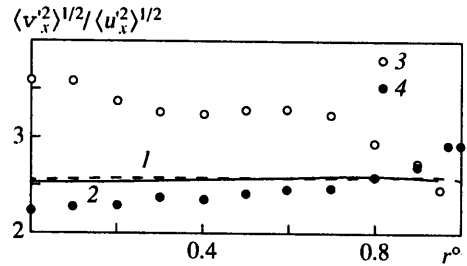
где D – диаметр трубы.

С учетом (6.4) параметр инерционности пузырьков равняется

$$\Omega_{u*} = \frac{\tau_{u*}}{T_{Lp}} = \frac{80C_A}{3C_D} d_p^{\circ}, \quad d_p^{\circ} = \frac{d_p}{D} \quad (6.5)$$

Согласно (6.5) параметр инерционности зависит только от соотношения диаметров пузырька и трубы.

Фиг. 5. Распределение отношения интенсивностей пульсаций скорости пузырьков и жидкости по радиусу трубы: 1, 2 – расчет; 3, 4 – эксперимент [12]; 1, 3 – $J_f = 1,391$, $J_g = 0,347$ м/с; 2, 4 – $J_f = 0,376$, $J_g = 0,112$ м/с



Экспериментальные распределения интенсивности пульсаций осевой скорости пузырьков, отнесенной к значению интенсивности осевой пульсации скорости жидкости в той же точке [12], представлены на фиг. 5 для двух режимов с различными значениями приведенных скоростей жидкости J_f и газа J_g . Расчетные зависимости согласно (3.5) при определении Ω_{u*} на основе (6.5) с использованием экспериментальных значений для d_p и среднего значения $C_D = 0,5$, соответствующего экспериментальным данным для скорости дрейфа [12], также показаны на фиг. 5. Видно, что интенсивность пульсаций скорости пузырьков существенно превышает уровень пульсаций скорости жидкости, а экспериментальные и расчетные значения их отношения находятся в удовлетворительном соответствии. Таким образом, можно сделать вывод, что формула (6.5) дает качественно правильную оценку параметра инерционности пузырьков.

Градиент осредненной скорости жидкости при гидродинамически развитом течении может быть определен из соотношения

$$\frac{dU_x}{dr} = \frac{u_*^2 r}{R(v + v_t)} \quad (6.6)$$

где v_t – коэффициент турбулентной вязкости, $R = D/2$ – радиус трубы.

С учетом (6.3) и (6.6) уравнение (6.1) в безразмерной форме примет вид

$$\langle u_r'^2 \rangle \frac{d \ln \Phi}{dr^0} = -\Omega_{u*} \frac{dM \langle u_r'^2 \rangle}{dr^0} \mp \frac{C_0 \sqrt{d_p^0 \text{Ga} \Omega_{u*} r^0}}{1 + v_t^0} \quad (6.7)$$

где $r^0 = r/R$, $\langle u_r'^2 \rangle = \langle u_r'^2 \rangle / u_*^2$, $v_t^0 = v_t / v$, $C_0 = C_L / (C_A \sqrt{3C_D})$, $\text{Ga} = gD^3/\nu^2$ – число Галилея.

Интеграл уравнения (6.7) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi^0 &= \frac{\Phi}{\Phi(r=0)} = \Phi_M^0 \Phi_L^0 \\ \Phi_M^0 &= \left[\frac{(M \langle u_r'^2 \rangle)_{r=0}}{M \langle u_r'^2 \rangle} \right]^{\Omega_{u*} M} \exp \left[\int_0^{r^0} \ln(M \langle u_r'^2 \rangle) \frac{d\Omega_{u*} M}{dr^0} dr^0 \right] \\ \Phi_L^0 &= \exp \left[\mp C_0 \text{Ga}^{1/2} \int_0^{r^0} \frac{d_p^{1/2} \Omega_{u*} r^0}{\langle u_r'^2 \rangle (1 + v_t^0)} dr^0 \right] \end{aligned} \quad (6.8)$$

В соответствии с (6.8) выражение для концентрации пузырьков представляется в виде двух сомножителей, один из которых описывает профиль, формирующийся в результате турбулентной миграции, а второй обусловлен эффектом подъемной силы за счет сдвига скорости. Характер влияния турбулентной миграции на профиль концентрации в существенной степени зависит от размера пузырьков, определяющего знак коэффициента миграции M , а следовательно, и направление действия силы миграции, и не зависит от направления движения (восходящего или нисходящего). Если

размер пузырьков не изменяется по сечению трубы, выражение для Φ_M° в (6.8) упрощается

$$\Phi_M^\circ = \left(\frac{\langle u_r'^2 \rangle_{r=0}}{\langle u_r'^2 \rangle} \right)^{\Omega_{u^*} M}$$

Напротив, характер влияния подъемной силы на профиль концентрации качественно не зависит от размера пузырьков, а определяется в первую очередь направлением движения.

Для определения коэффициента турбулентной вязкости воспользуемся аппроксимационной зависимостью Ван-Дрифта – Рейхардта

$$v_i^\circ = \frac{1}{6} \left\{ \sqrt{1 + 4 \left[1 - \exp\left(-\frac{y_+}{A}\right) \right]^2 \kappa^2 y_+^2} - 1 \right\} (1 + r^\circ) \left(\frac{1}{2} + r^{\circ 2} \right) \quad (6.9)$$

$$y_+ = u u_* / \nu = (1 - r^\circ) R_+, \quad R_+ = R u_* / \nu, \quad \kappa = 0,4, A = 26$$

Интенсивность турбулентных пульсаций радиальной скорости в жидкости вычисляется из соотношения

$$\langle u_r'^2 \rangle = \frac{D_l}{T_L} = \frac{v_l}{Sc_l T_L} \quad (6.10)$$

где лагранжев временной масштаб турбулентности определяется как

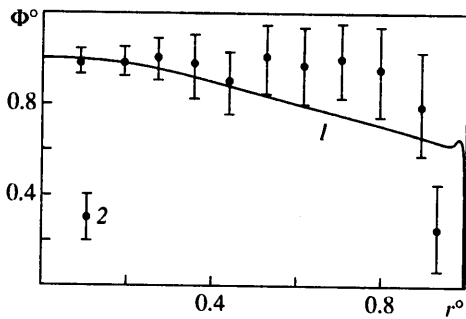
$$T_L = \frac{\nu}{u_*^2} \sqrt{100 + \left(\frac{l u_*}{\nu} \right)^2}, \quad l = R(0,14 - 0,08 r^{\circ 2} - 0,06 r^{\circ 4}) \quad (6.11)$$

Здесь l – длина пути смешения Прандтля – Никураузе; D_l – турбулентное число Шмидта для диффузии безынерционной примеси в жидкости, принимаемое равным 0,9.

На фиг. 6 и 7 показано сравнение рассчитанных на основе (6.8) с учетом (6.5) и (6.9)–(6.11) распределений пузырьков по сечению трубы с экспериментальными данными для нисходящего [11] и восходящего [12] течений. Расчеты выполнены для условий, реализованных в этих экспериментах. В отличие от малых чисел Рейнольдса обтекания частицы, когда коэффициент подъемной силы C_L зависит как от числа Re_p , так и от параметра сдвига скорости, при умеренных и больших числах Re_p эти зависимости для пузырьков становятся достаточно слабыми [33], и с ростом Re_p коэффициент C_L стремится к теоретическому значению 0,5, найденному для невязкой жидкости [34]. Поэтому для рассматриваемого примера течения пузырьков в трубе, характеризуемого относительно большими числами Рейнольдса обтекания ($Re_p \sim 100$), приемлемым приближением является $C_L = \text{const}$. Следует отметить, что экспериментальные значения коэффициента C_L при больших Re_p [11] оказываются меньшими теоретического значения 0,5, что, возможно, связано с отклонением формы пузырька от сферической. В данных расчетах аналогично [15] принято среднее экспериментальное значение $C_L = 0,05$ [11].

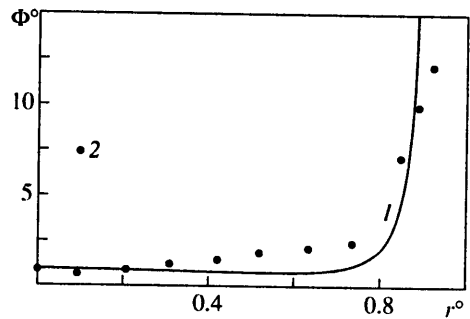
Из фиг. 6 и 7 отмечается качественное соответствие расчетных и измеренных распределений концентрации пузырьков. Разница между расчетными и экспериментальными значениями может быть связана в первую очередь с учетом обратного влияния пузырьков на осредненную скорость и турбулентные характеристики несущей жидкой среды.

Заключение. На основе кинетического уравнения для ФПВ представлена континуальная модель для описания транспорта частиц произвольной плотности в неоднородном турбулентном потоке. Установлено, что направление действия сил турбулентной миграции, обусловленной взаимодействием частиц с турбулентными вихрями,



Фиг. 6

Фиг. 6. Расчетное (1) и измеренное (2) в [11] распределения пузырьков при опускном течении ($J_f = 0,71, J_g = 0,10$ м/с)



Фиг. 7

Фиг. 7. Расчетное (1) и измеренное (2) в [12] распределения пузырьков при подъемном течении ($J_f = 1,391, J_g = 0,180$ м/с)

зависит как от плотности, так и от размера частиц. Показано, что малые и большие пузырьки мигрируют в противоположных направлениях: малые пузырьки аккумулируются в областях с высоким уровнем турбулентной энергии жидкости, в то время как большие пузырьки концентрируются в зонах с пониженным уровнем турбулентности. Влияние сдвига средней скорости несущего потока в случае пузырьков в отличие от тяжелых частиц приводит к снижению интенсивности пульсаций скорости дисперсной фазы. Развиваемая модель качественно правильно описывает распределение пузырьков в вертикальных трубах, предсказывая максимумы их концентрации вблизи стенки и в центре трубы соответственно при восходящем и нисходящем течениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-02-17001).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гавин Л.Б., Шрайбер А.А. Турбулентные течения газа с частицами // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 25. С. 90–182.
2. Elghobashi E. On predicting particle-laden turbulent flows // Appl. Scient. Res. 1994. V. 52. № 4. P. 309–329.
3. Зайчик Л.И., Першуков В.А. Проблемы моделирования газодисперсных турбулентных течений с горением или фазовыми переходами (Обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 5. С. 3–19.
4. Деревич И.В., Зайчик Л.И. Осаждение частиц из турбулентного потока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 96–104.
5. Reeks M.W. On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. № 3. P. 446–456.
6. Reeks M.W. On the continuum equation for dispersed particles in nonuniform flows // Phys. Fluids A. 1992. V. 4. № 6. P. 1290–1303.
7. Зайчик Л.И. Об уравнении для функции плотности вероятности скорости частиц в неоднородном турбулентном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 2. С. 117–124.
8. Зайчик Л.И. Моделирование движения частиц в неоднородном турбулентном потоке на основе уравнения для функции плотности вероятности // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 132–138.
9. Деревич И.В. Двухпараметрическая модель турбулентного потока с дисперсной примесью частиц // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. P. 40–56.
10. Serizawa A., Kataoka I., Michiyoshi I. Turbulence structure of air-water bubble flow. I. Measuring techniques. II. Local properties. III. Transport properties // Intern. J. Multiphase Flow. 1975. V. 2. № 3. P. 221–259.

11. Wang S.K., Lee S.J., Jones O.C., Lahey R.T., Jr. 3-D turbulence structure and phase distribution measurements in bubbly two-phase flows // Intern. J. Multiphase Flow. 1987. V. 13. № 3. P. 327–343.
12. Liu T.J., Bankoff S.G. Structure of air-water bubbly flow in a vertical pipe. I. Liquid mean velocity and turbulence measurements. II. Void fraction, bubble velocity and bubble size distribution // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1993. V. 36. № 4. P. 1049–1072.
13. Накоряков В.Е., Каушинский О.Н. Турбулентная структура двухфазных газожидкостных потоков // Теплофизика и аэромеханика. 1997. Т. 4. № 2. С. 115–127.
14. Liu T.J. The effect of bubble size and void fraction distribution in a vertical channel // Proc. Intern. Conf. on Multiphase Flows. Tsukuba, 1991. P. 453–457.
15. Lopez de Bertodano M., Lee S.J., Lahey Jr.R.T., Drew D.A. The prediction of two-phase turbulence and phase distribution phenomena using a Reynolds stress model // Trans. ASME. J. Fluid Eng. 1990. V. 112. № 1. P. 107–113.
16. Kataoka I., Serizawa A. Statistical behaviors of bubbles and its application to prediction of phase distribution in bubble two-phase flow // Proc. Intern. Conf. on Multiphase Flows. Tsukuba, 1991. P. 459–462.
17. Hill D.P., Wang D.M., Gosman A.D., Issa R.I. Numerical prediction of two-phase bubbly flow in a pipe // Proc. 2nd Intern. Conf. on Multiphase Flow. Kyoto, 1995. P. M031–M036.
18. Lopez de Bertodano M., Lahey Jr.R.T., Jones O.C. Development of k - ϵ -model for bubbly two-phase flow // Trans. ASME. J. Fluid Engng. 1994. V. 116. № 1. P. 128–134.
19. Auton T.R., Hunt J.C.R., Prud'homme M. The force exerted on a body in inviscid unsteady non-uniform rotational flow // J. Fluid Mech. 1988. V. 197. P. 241–257.
20. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
21. Yudine M.I. Physical consideration on heavy-particle dispersion // Advances in Geophysics. N.Y.; L.: Acad. Press, 1959. V. 6. P. 185–191.
22. Maxey M.R., Riley J.J. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow // Phys. Fluids. 1983. V. 26. № 4. P. 883–888.
23. Deutsh E., Simonin O. Large eddy simulation applied to the modelling of particulate transport coefficients in turbulent two-phase flows // Proc. 8th Symp. on Turbulent Shear Flows. Munich. 1991. P. 1011–1016.
24. Хице И.О. Турбулентность. Ее механизм и теория. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
25. Zaichik L.I., Alipchenkov V.M. Simulation of transport of colliding particles suspended in turbulent shear flows // Proc. 2nd Intern. Symp. on Turbulence, Heat and Mass Transfer. Delft, 1997. P. 823–832.
26. Corrsin S. Progress report on some turbulent diffusion research // Advances in Geophysics. N.Y.; L.: Acad. Press, 1959. V. 6. P. 161–164.
27. Yeung P.K., Pope S.B. Lagrangian statistics from direct numerical simulation of isotropic turbulence // J. Fluid Mech. 1989. V. 207. P. 531–586.
28. Wang L.P., Stock D.E. Dispersion of heavy particles in turbulent motion // J. Atmosph. Sci. 1993. V. 50. № 13. P. 1897–1913.
29. Csanady G.T. Turbulent diffusion of heavy particles in the atmosphere // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. № 3. P. 201–208.
30. Алипченков В.М., Зайчик Л.И. Моделирование динамики сталкивающихся частиц в турбулентном сдвиговом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. С. 105–112.
31. Simonin O., Deutsch E., Boivin M. Comparison of large eddy simulation and second-moment closure of particle fluctuating motion in two-phase turbulent shear flows // Proc. 9th Symp. On Turbulent Shear Flows. Kyoto, 1993. P. 15.2.1–15.2.6.
32. Tavoularis S., Corrsin S. Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with a uniform mean temperature gradient // J. Fluid Mech. 1981. V. 104. P. 311–347.
33. Legendre D., Magnaudet J. The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow // J. Fluid Mech. 1998. V. 368. P. 81–126.
34. Auton T.R. The lift force on a spherical body in a rotation flow // J. Fluid Mech. 1987. V. 183. P. 199–218.

Москва

Поступила в редакцию
17.V.1999