

УДК 532.527

© 2000 г. В.Н. КОТЕРОВ, Ю.Д. ШМЫГЛЕВСКИЙ

О СТОКСОВСКИХ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВИХРЕВЫХ СИСТЕМАХ В КАНАЛАХ

На основе точных решений бигармонического уравнения исследованы плоскопараллельные вихревые системы в вязкой несжимаемой жидкости в каналах с параллельными стенками и в угловой области с условиями прилипания к стенкам. При протекании жидкости через такие каналы обнаружено образование отрывных областей и парных (сомкнувшихся) вихрей, а также прослежен путь протекания жидкости между этими вихревыми образованиями. Рассмотрены структуры потоков в области вторжения течения Пуазейля или течения Гамеля в зону господства интенсивных вихревых образований и при выходе жидкости из такой зоны.

Целью работы является изучение взаимодействия вихревых образований и их подавление вязкостью в плоскопараллельных потоках несжимаемой жидкости. Исследование проводится при нулевом числе Рейнольдса, когда уравнения Навье – Стокса не содержат конвективных членов.

Функция тока ψ плоскопараллельных стоксовских течений подчиняется бигармоническому уравнению

$$\Delta\Delta\psi = 0 \quad (0.1)$$

где Δ – оператор Лапласа.

В решении краевых задач для этого уравнения достигнуты значительные успехи. В теории упругости при изучении деформации прямоугольных пластин конечных размеров решение краевых задач получено [1, 2] в виде бесконечного ряда, каждый член которого удовлетворяет уравнению (0.1).

Обращаясь к гидродинамике, откажемся от решения (0.1) в конечных областях и рассмотрим течения в каналах с прямолинейными параллельными границами и в угловых кавернах. Результаты проведенных здесь исследований могут быть получены с помощью подхода работ [1, 2], хотя здесь рассмотрены другие задачи, но более просто оказывается использовать общий интеграл уравнения (0.1), как это сделано в [3]. В теории упругости аналог решенных здесь задач с протеканием жидкости вдоль канала или в угловой области не изучался.

Общий интеграл уравнения (0.1) в комплексной форме, расширенной добавлением двух произвольных функций, имеет вид

$$\psi = \gamma(z) + \delta(\bar{z}) + \bar{z}\alpha(z) + z\beta(\bar{z}) \quad (0.2)$$

где комплексные переменные $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ выражены через x , y – декартовы координаты, γ , δ , α , β – произвольные функции своих аргументов. Решениями уравнения (0.1) являются как действительная, так и мнимая части (0.2). Поэтому в дальнейшем используется комплексная величина ψ .

Рассматриваются три типа течений.

1. Канал ограничен прямыми линиями $y = \pm 1$, на которых осуществляется прилипание жидкости, т.е. $\psi_x = \psi_y = 0$. Изучаются симметричные относительно оси x тече-

ния с нечетной по y функцией ψ . В этом случае при $y = 0$

$$\psi = 0, \quad \psi_{yy} = 4\psi_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) = 0 \quad (1.1)$$

Подстановка (0.2) в эти равенства дает

$$\gamma(x) + \delta(x) + x\alpha(x) + x\beta(x) = 0, \quad \alpha'(x) + \beta'(x) = 0 \quad (1.2)$$

где штрих означает производную по аргументу функции. Интегрируя второе уравнение (1.2) и полагая константу интегрирования равной нулю, получаем

$$\alpha(t) + \beta(t) = 0 \quad (1.3)$$

При этом из первого равенства (1.2) следует равенство

$$\gamma(t) + \delta(t) = 0 \quad (1.4)$$

Равенство (0.2) с использованием (1.3) и (1.4) принимает вид

$$\psi = \gamma(z) - \gamma(\bar{z}) + \bar{z}\alpha(z) - z\alpha(\bar{z}) \quad (1.5)$$

Условия прилипания $\psi_x = \psi_y = 0$ при $y = 1$ на основе (1.5) дают уравнения

$$\gamma'(x+i) - \gamma'(x-i) + \alpha(x+i) + (x-i)\alpha'(x+i) - \alpha(x-i) - (x+i)\alpha'(x-i) = 0$$

$$\gamma'(x+i) + \gamma'(x-i) - \alpha(x+i) + (x-i)\alpha'(x+i) - \alpha(x-i) + (x+i)\alpha'(x-i) = 0$$

Складывая и вычитая почленно эти равенства, получаем

$$\gamma'(x+i) + (x-i)\alpha'(x+i) - \alpha(x-i) = 0 \quad (1.6)$$

$$\gamma'(x-i) + (x+i)\alpha'(x-i) - \alpha(x+i) = 0 \quad (1.7)$$

Обозначив через t сумму $x+i$ в (1.6) и разность $x-i$ в (1.7), получим

$$\gamma'(t) + (t-2i)\alpha'(t) - \alpha(t-2i) = 0 \quad (1.8)$$

$$\gamma'(t) + (t+2i)\alpha'(t) - \alpha(t+2i) = 0$$

Почленное вычитание приводит к дифференциальному уравнению с разнесенными аргументами

$$4i\alpha'(t) - \alpha(t+2i) + \alpha(t-2i) = 0 \quad (1.9)$$

Решения находятся с помощью двух подстановок. Подстановка $\alpha(t) = t^l$, где $l = \text{const}$, показывает, что уравнение (1.9) имеет решения

$$\alpha = 1, \quad \alpha = t, \quad \alpha = t^2$$

которые можно домножить на произвольную постоянную. Подстановка этих решений в (1.8) дает соответственно

$$\gamma = t + c_1, \quad \gamma = c_2, \quad \gamma = -t^3/3 - 4t + c_3$$

где буква c_j ($j = 1, 2, 3$) – произвольная постоянная. Подстановка найденных $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ в (1.5) приводит к равенствам

$$\psi \equiv 0, \quad \psi \equiv 0, \quad \psi = 8i(y^3/3 - y) \equiv 8i\psi_0 \quad (1.10)$$

Первые два решения определяют покой, а третье – течение Пуазейля.

Подстановка $\alpha(t) = e^{mt}$ приводит к уравнению $2m = \sin 2m$. Отсюда, если $m = a + ib$, где a и b – действительные, имеем

$$a = \frac{1}{2}\sin 2a \operatorname{ch} 2b, \quad b = \frac{1}{2}\cos 2a \operatorname{sh} 2b \quad (1.11)$$

Пять наименьших по модулю $|m|$ неотрицательных корней уравнений (1.11) равны

a	0	3,74884	6,94998	10,11926	13,27727
b	0	1,384339	1,676105	1,858384	1,991571

Кроме того, корнями являются $-m$ и $\pm m$.

Полусумма левых частей уравнений (1.8) определяет равенство

$$\gamma'(t) = \frac{1}{2}\alpha(t-2i) + \frac{1}{2}\alpha(t+2i) - t\alpha'(t)$$

Подстановка в него $\alpha(t) = e^{mt}$ и интегрирование дают

$$\gamma(t) = (A - iB - t)\exp[(a + ib)t] + c_4 \quad (1.12)$$

$$A = \frac{2 \sin 2a}{\operatorname{ch} 2b - \cos 2a}, \quad B = \frac{2 \operatorname{sh} 2b}{\operatorname{ch} 2b - \cos 2a}$$

Подставляя в (1.5) выражение $\alpha(t) = e^{mt}$ и (1.12) для γ , получаем

$$\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) = & A[e^{ax-by} \cos(bx + ay) - e^{ax+by} \cos(bx - ay)] + \\ & + (B + 2y)e^{ax-by} \sin(bx + ay) - (B - 2y)e^{ax+by} \sin(bx - ay) \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\Psi_2(x, y) = e^{\pi a/2} \Psi_1(x - \pi/2, y)$$

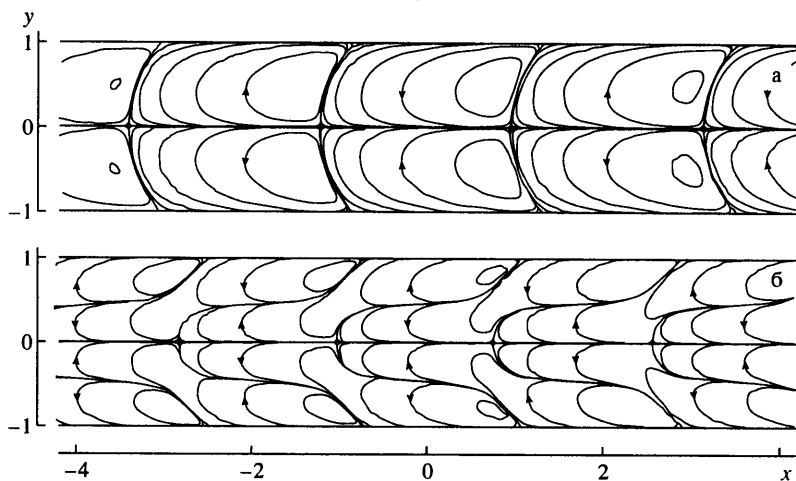
Функция тока Ψ_2 получается из Ψ_1 сдвигом и умножением на постоянные величины. Функции Ψ_1 при различных парах значений a и b , удовлетворяющих уравнениям (1.11), являются частными решениями уравнения (0.1), подчиненными условиям прилипания на стенках $y = \pm 1$. Бесконечный ряд по этим функциям с произвольными числовыми коэффициентами также является решением такой граничной задачи. Коэффициенты ряда служат для удовлетворения другим граничным условиям, например при двух различных значениях x , но такие краевые задачи здесь не рассматриваются.

Функция Ψ_1 является произведением $\exp ax$ на периодическую по x функцию с периодом $2\pi/a$. Найденная функция Ψ удовлетворяет уравнению (0.1) при любых a и b , но условия прилипания при $y = \pm 1$ выполняются только при a и b , удовлетворяющих системе уравнений (1.11). Множитель $\exp ax$ при $a > 0$ в выражении для Ψ_1 показывает, что в силу периодичности по x его сомножителя модуль Ψ_1 в точках, определяемых периодом, умножается на возрастающую по x величину. Соответственно возрастают модуль вектора скорости и кинетическая энергия вихревых образований, ограниченных замкнутой линией $\Psi_1 = 0$. Отсюда следует, что источник завихренности расположен при $x = +\infty$. Полученное решение является идеализацией физического процесса, в котором источник завихренности расположен далеко от рассматриваемой области. В последнем случае при меньших x должны возникать вихревые образования, подобные найденным здесь.

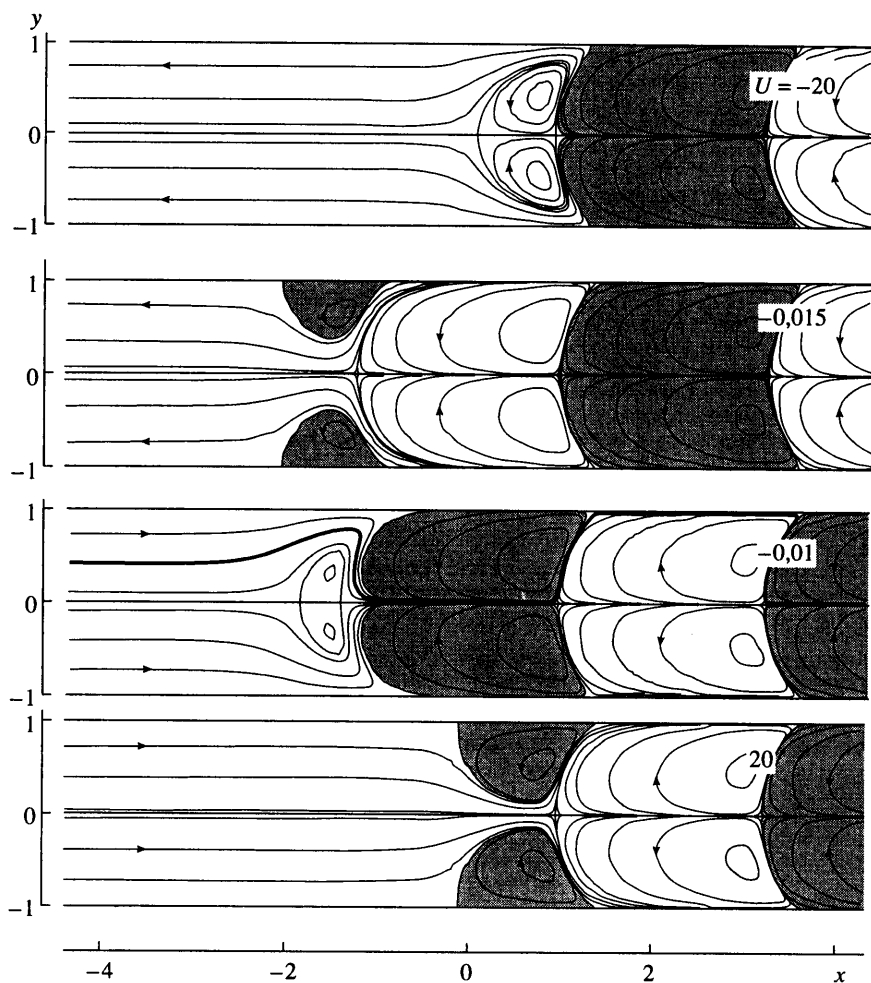
Образум сумму $\Psi_3 = U\Psi_0 + \Psi_1$, где U – постоянная величина. Примеры таких течений приведены на фиг. 1 и 2, где изображены соответственно линии постоянных Ψ_1 и Ψ_3 . Разности между величинами Ψ_1 и Ψ_3 на соседних линиях тока в поле течения не постоянны. Стрелки показывают направление течения.

Фигура 1 показывает, что при отсутствии протекания жидкости вдоль канала ($U = 0$) вихревые образования, ограниченные линиями $\Psi_1 = 0$, целиком заполняют полосу $-1 \leq y \leq 1$. При выбранных для иллюстрации парах корней a и b картины линий тока топологически эквивалентны.

При протекании жидкости вдоль канала ($U \neq 0$) на фиг. 2 изображены линии тока Ψ_3 в переходных зонах, в которых жидкость, миновав систему вихрей, уничтожает



Фиг. 1. Линии тока $\psi_1 = \text{const}$ при $U = 0$; $a: m = 3,75 + 1,384i$; $b: m = 6,95 + 1,676i$



Фиг. 2. Линии тока $\psi_3 = \text{const}$ при $a = 3,75$, $b = 1,384$ и различных U

более слабые вихревые образования, а также в зонах, в которых жидкость, уничтожив слабые вихри, вторгается в область господства интенсивных вихревых образований и лавирует между ними. Отрывные течения чередуются с парными вихрями (парами сомкнувшихся на оси вихревых образований). Протекающая вдоль канала жидкость проходит между вихревыми образованиями этих двух типов. На фиг. 2 при $U = -20$ жидкость, протекающая в сторону уменьшения x , вначале проходит между стенками и парным вихрем, затем устремляется к оси x между парным вихрем и отрывными течениями, после этого она течет в окрестности оси x между отрывными течениями, направляется к стенкам канала между отрывными течениями и парным вихрем, огибает парный вихрь и переходит в течение Пуазейля при $x \rightarrow -\infty$. При $U = -0,015$ жидкость течет тем же путем, но после огибания последнего на ее пути парного вихря она проходит между двумя отрывными течениями и переходит в течение Пуазейля. При $U = 0,01$ и 20 протекание происходит в направлении увеличения x , а его путь теперь легко проследить на фиг. 2, где при $U = 0,01$ для наглядности жирной изображена одна из линий тока.

2. Канал снова ограничен прямыми $y = \pm 1$, на которых $\psi_x = \psi_y = 0$. Для получения решения четного по y возьмем $\alpha(t) = \beta(t)$, $\gamma(t) = \delta(t)$.

В этом случае равенство (0.2) принимает вид

$$\psi = \gamma(z) + \gamma(\bar{z}) + \bar{z}\alpha(z) + z\alpha(\bar{z}) \quad (2.1)$$

Удовлетворяя условиям прилипания при $y = \pm 1$, для функции α получаем уравнение

$$4i\alpha'(t) = \alpha(t - 2i) - \alpha(t + 2i)$$

Подстановка $\alpha = \exp kt$, где $k = g + ih = \text{const}$, приводит к уравнению для k или к системе для g и h

$$2k = -\sin 2k$$

$$2g = -\sin 2g \operatorname{ch} 2h, \quad 2h = -\cos 2g \operatorname{sh} 2h$$

Ближайшие к нулю по модулю $|k|$ пять неотрицательных корней имеют значения

g	0	2,10620	5,35627	8,53668	11,69918
h	0	1,125364	1,551574	1,775544	1,929405

Кроме того, корнями являются величины $-k$ и $\pm \bar{k}$.

Вычисление γ дает

$$\gamma(t) = (G + iH - t) \exp[(g + ih)t] + c_5$$

$$G = -\frac{2 \sin 2g}{\operatorname{ch} 2h + \cos 2g}, \quad H = -\frac{2 \operatorname{sh} 2h}{\operatorname{ch} 2h + \cos 2g}$$

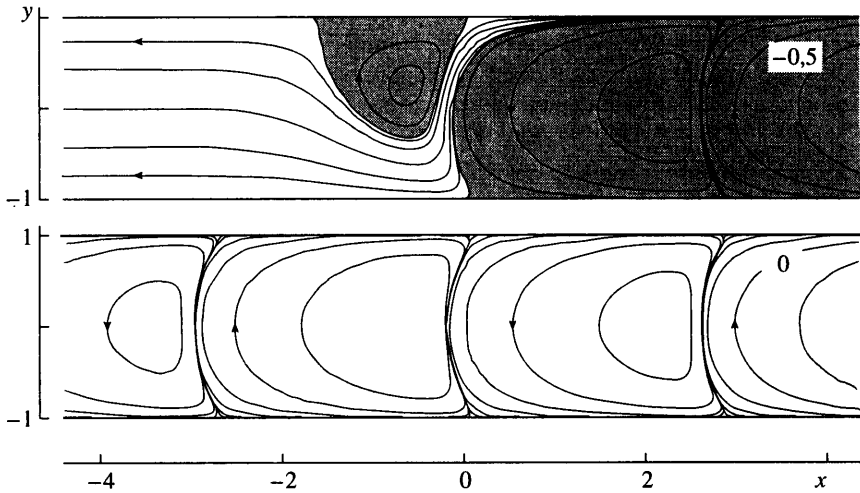
В свою очередь подстановка полученных выражений для α и γ в (2.1) приводит к решению

$$\psi = \psi_4 + i\psi_5$$

$$\begin{aligned} \psi_4(x, y) = & G[e^{gx+hy} \cos(hx - gy) + e^{gx-hy} \cos(hx + gy)] - \\ & - (H + 2y)e^{gx+hy} \sin(hx - gy) - (H - 2y)e^{gx-hy} \sin(hx + gy) \end{aligned}$$

$$\psi_5(x, y) = e^{\pi g/2} \psi_4(x - \pi/2, y)$$

Пусть теперь $\psi_6 = V\psi_0 + \psi_4$, где V – постоянная величина. Эта сумма образована решениями уравнения (0.1), имеющими различные типы симметрии относительно оси



Фиг. 3. Линии тока $\psi_6 = \text{const}$ при $g = 2,11$, $h = 1,125$ и различных V

x и удовлетворяющими условиям прилипания при $y = \pm 1$. Линии тока $\psi_6 = \text{const}$ при $g = 2,11$, $h = 1,125$ изображены на фиг. 3. При $V = 0$ течение представляет собой последовательность вихревых образований, каждое из которых простирается от прямой $y = 1$ до $y = -1$. Кинетическая энергия этих образований, как и в предыдущем типе течений, возрастает вместе с x . При вытекании жидкости из области вихревых образований, например, если $V = -0,5$, сквозной поток последовательно проходит между отрывными течениями и стенками канала то снизу, то сверху. При втекании в область вихревых образований, если $V = 0,5$, картина линий тока является почти зеркальным отображением случая $V = -0,5$ относительно оси x .

3. Пусть жидкость движется в области $-\Theta \leq \vartheta \leq \Theta$, где $\pi/2 > \Theta = \text{const}$ и ϑ – угол полярных координат r, ϑ . Комплексная переменная представляется в виде $z = re^{i\vartheta}$. Рассматриваются симметричные относительно луча $\vartheta = 0$ течения, когда при $\vartheta = 0$ выполняются равенства $\psi = 0$, $\psi_{\vartheta\vartheta} = 0$, которые, как и условия (1.1), приводят к выражению (1.5).

Условия прилипания при $\vartheta = \Theta$ имеют вид

$$\psi_r = 0, \quad \psi_{\vartheta} = 0 \quad (3.1)$$

Подстановка выражения (1.5) в эти равенства дает после сокращений соответственно

$$\begin{aligned} e^{i\Theta} \gamma'(re^{i\Theta}) - e^{-i\Theta} \gamma'(re^{-i\Theta}) + e^{-i\Theta} \alpha(re^{i\Theta}) + \\ + r\alpha'(re^{i\Theta}) - e^{i\Theta} \alpha(re^{-i\Theta}) - r\alpha'(re^{-i\Theta}) = 0 \\ e^{i\Theta} \gamma'(re^{i\Theta}) + e^{-i\Theta} \gamma'(re^{-i\Theta}) - e^{-i\Theta} \alpha(re^{i\Theta}) + \\ + r\alpha'(re^{i\Theta}) - e^{i\Theta} \alpha(re^{-i\Theta}) + r\alpha'(re^{-i\Theta}) = 0 \end{aligned}$$

Полусумма и полуразность левых частей этих уравнений дают равенства

$$\begin{aligned} e^{i\Theta} \gamma'(re^{i\Theta}) + r\alpha'(re^{i\Theta}) - e^{i\Theta} \alpha(re^{-i\Theta}) = 0 \\ e^{-i\Theta} \gamma'(re^{-i\Theta}) + r\alpha'(re^{-i\Theta}) - e^{-i\Theta} \alpha(re^{i\Theta}) = 0 \end{aligned}$$

Обозначая через s величину $re^{i\Theta}$ в первом уравнении и величину $re^{-i\Theta}$ во втором, получаем после элементарных преобразований

$$\begin{aligned}\gamma'(s) + e^{-i2\Theta} s \alpha'(s) - \alpha(se^{-i2\Theta}) &= 0 \\ \gamma'(s) + e^{i2\Theta} s \alpha'(s) - \alpha(se^{i2\Theta}) &= 0\end{aligned}\quad (3.2)$$

Исключение γ из этих уравнений приводит к равенству

$$2i(\sin 2\Theta)s\alpha'(s) = \alpha(se^{i2\Theta}) - \alpha(se^{-i2\Theta})$$

Подстановка $\alpha(s) = s^n$, где $n = p + iq$, дает уравнение для n или систему для p и q

$$n \sin 2\Theta = \sin 2n\Theta$$

$$p \sin 2\Theta = \sin 2p\Theta \operatorname{ch} 2q\Theta, \quad q \sin 2\Theta = \cos 2p\Theta \operatorname{sh} 2q\Theta$$

Три пары неотрицательных корней p и q с наименьшим модулем $|n|$ при выбранном для примера $\Theta = 0,4$ имеют значения

p	0	1	9,38879
q	0	0	3,31944

Решениями являются также $-n$ и $\pm \bar{n}$.

Полусумма левых частей уравнений (3.1) приводит к равенству

$$\gamma'(s) = \frac{1}{2}\alpha(se^{i2\Theta}) + \frac{1}{2}\alpha(se^{-i2\Theta}) - s\alpha'(s) \cos 2\Theta \quad (3.3)$$

Подстановка в него выражения $\alpha(s) = s^n$ и интегрирование по s при $n \neq -1$ дают

$$\gamma(s) = 2(\cos 2\Theta) \ln s + c_6 \quad (3.4)$$

Далее, подстановка $\alpha(s) = s^n$ и (3.4) в равенство (1.5) определяет функцию тока

$$\psi = 2i(\vartheta \cos 2\Theta - \sin 2\Theta) \equiv 2i\psi_7 \quad (3.5)$$

Функция ψ_7 отвечает течению Гамеля. Все линии тока этого течения направлены по лучам $\vartheta = \text{const}$, жидкость течет к полюсу полярных координат $r = 0$ и прилипает к стенкам $\vartheta = \pm\Theta$. Если в выражении для ψ_7 изменить знак, что допустимо из-за однородности уравнения (0.1), то поток изменит направление на противоположное. Течение Гамеля будет использовано несколько позже.

Подстановка выражения $\alpha(s) = s^n$ при $n \neq -1$ в равенство (3.3) и интегрирование по s приводят к равенствам

$$\gamma(s) = -(M + iN)s^{p+1+iq} \quad (3.6)$$

$$M = \frac{(p+1) \operatorname{ch} 2q\Theta \sin 2(p-1)\Theta + q \operatorname{sh} 2q\Theta \cos 2(p-1)\Theta}{[(p+1)^2 + q^2] \sin 2\Theta}$$

$$N = \frac{(p+1) \operatorname{sh} 2q\Theta \cos 2(p-1)\Theta - q \operatorname{ch} 2q\Theta \sin 2(p-1)\Theta}{[(p+1)^2 + q^2] \sin 2\Theta}$$

Из выражения (1.5) находим

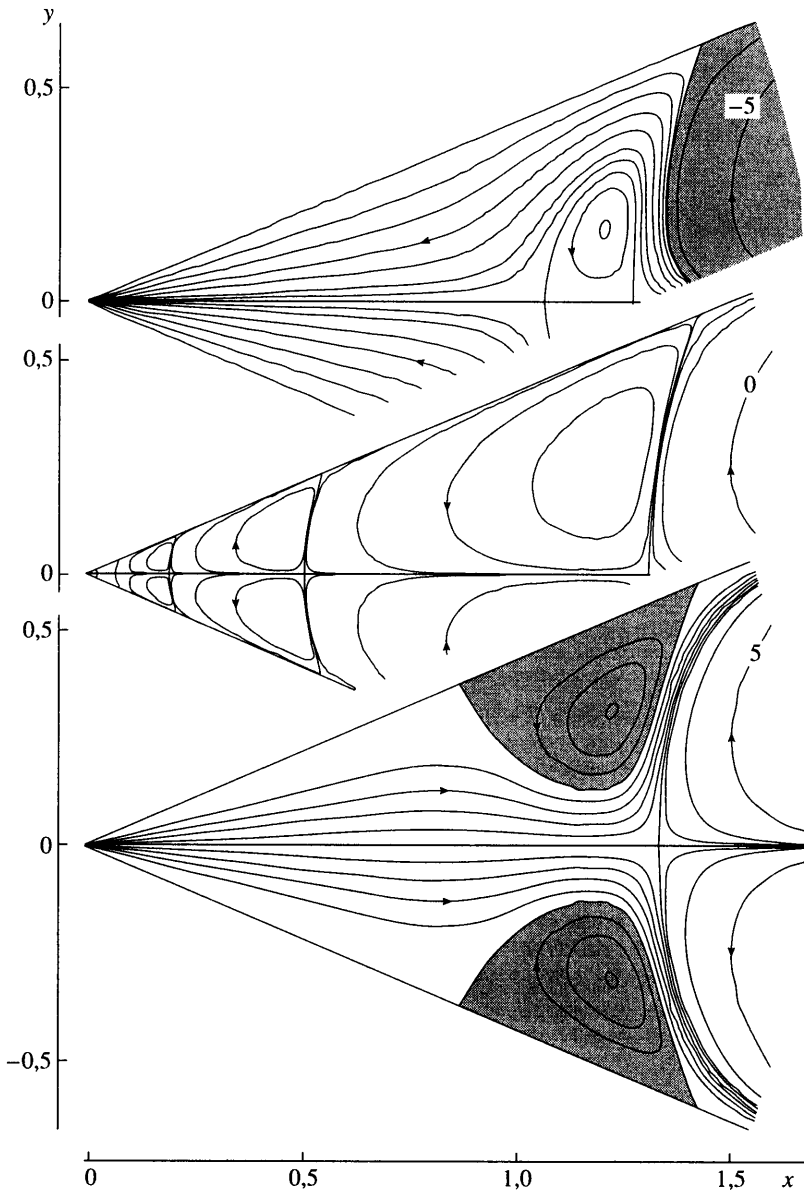
$$\Psi = \Psi_8 + i\Psi_9$$

$$\Psi_8 = 2r^{p+1} \cos(q \ln r) \{ [M \cos(p+1)\vartheta - \cos(p-1)\vartheta] \operatorname{sh} q\vartheta + N \sin(p+1)\vartheta \operatorname{ch} q\vartheta \} +$$

$$+ 2r^{p+1} \sin(q \ln r) \{ [M \sin(p+1)\vartheta - \sin(p-1)\vartheta] \operatorname{ch} q\vartheta - N \cos(p+1)\vartheta \operatorname{sh} q\vartheta \}$$

$$\Psi_9 = 2r^{p+1} \cos(q \ln r) \{ [-M \sin(p+1)\vartheta + \sin(p-1)\vartheta] \operatorname{ch} q\vartheta + N \cos(p+1)\vartheta \operatorname{sh} q\vartheta \} +$$

$$+ 2r^{p+1} \sin(q \ln r) \{ [M \cos(p+1)\vartheta - \cos(p-1)\vartheta] \operatorname{sh} q\vartheta + N \sin(p+1)\vartheta \operatorname{ch} q\vartheta \}$$



Фиг. 4. Линии тока $\psi_{10} = \text{const}$ при $p = 9,39$, $q = 3,32$ и различных W

Рассмотрим взаимодействие течения Гамеля (3.5) с вихревыми образованиями решения $\psi = \psi_8$. Образум сумму $\psi_{10} = W\psi_7 + \psi_8$, где W – постоянная величина. На фиг. 4 при $p = 9,39$, $q = 3,32$ и различных W изображены линии $\psi_{10} = \text{const}$. При $W = 0$ представлена система вихрей, которая оказывается идентичной системе, изображенной на фиг. 1. В рассматриваемом течении последовательность вихревых образований при $r \rightarrow 0$ бесконечна.

На той же фигуре показаны линии $\psi_{10} = \text{const}$ при двух ненулевых значениях W , хотя в действительности разнообразие течений богаче. Помимо изображенных возможны переходные зоны, в которых при втекании последними вихревыми образованиями на пути проходящего потока являются отрывные течения, а при вытекании

первым встречается парный вихрь. Структуры течений аналогичны соответствующим структурам течений в каналах с параллельными стенками. Здесь снова возникают переходные зоны, разделяющие течение, близкое к течению Гамеля, и область интенсивных вихревых образований.

Отметим, что в упомянутой статье [3] на с. 1000 в формулах для u и v должно быть не вычитание величин $\sin(\varphi/2)$ и $\cos(\varphi/2)$, а умножение на них. Эти опечатки содержатся и в указанной в [4] книге на с. 220 и 221.

Заключение. В стоковском приближении возможно возникновение в потоке жидкости отрывных течений и парных вихрей. На примерах изучены структуры потоков в областях вторжения течения Пуазейля или течения Гамеля в зону господства интенсивных вихревых образований и при выходе жидкости из этой зоны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Папкович П.Ф. Два вопроса теории изгиба тонких упругих плит // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 3. С. 359–374.
2. Гринберг Г.А. О методе, предложенном П.Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 2. С. 211–228.
3. Шмыглевский Ю.Д. Два примера обтекания пластинок в приближении Стокса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35. № 6. С. 997–1000.
4. Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Изд-во УРСС, 1999. 231 с.

Москва

Поступила в редакцию
31.VIII.1999