

УДК 532.59:533.95

© 2000 г. А.А. ЖАРКОВ, А.Т. ИЛЬЧЕВ

**УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ
С ИЗОТЕРМИЧЕСКИМ ДАВЛЕНИЕМ**

Рассматриваются волновые резонансы в гидродинамической модели изотропной бесстолкновительной квазинейтральной нагретой плазмы с изотермическими ионами и электронами. Эти резонансы приводят к образованию двух типов уединенных волн: собственно уединенных и обобщенных уединенных волн. Последние являются продуктом нелинейного резонанса собственно уединенных волн с магнитозвуковыми и альфвеновскими периодическими волнами. Обсуждается возможность наблюдения этих волн в плазме магнитосферы Земли.

Исследуется существование семейств солитоноподобных решений уравнений, отвечающих гидродинамической модели изотропной бесстолкновительной квазинейтральной плазмы с нагретыми ионами и электронами, имеющими постоянные температуры. Система основных уравнений для одномерных движений такой плазмы достаточно сложна для исследования, в связи с чем известно лишь небольшое количество ее решений. В пределе холодной плазмы частные решения основных уравнений были получены в [1]. В [2, 3] было доказано существование семейств уединенных, обобщенных уединенных волн, а также уединенных волн огибающих в пределе холодной плазмы. Показано, что ответвляющаяся из состояния покоя ветвь магнитозвуковых уединенных волн существует лишь для очень узкого диапазона углов θ наклона магнитного поля к направлению распространения волны [2], а вовсе не для всех $0 < \theta \leq \pi/2$, как следовало из результатов работ, где рассмотрения проводились на основе асимптотических уравнений (см., например, [4, 5]). В работе [6] на основе применения численных методов к интегрированию основных уравнений в пределе холодной плазмы было показано, что в области параметра θ , где вместо уединенных волн имеют место обобщенные уединенные волны, локализованное возмущение будет убывать за счет излучения резонансной периодической волны. При этом интенсивность излучения будет тем больше, чем больше интенсивность самого возмущения. Ряд частных решений солитонного типа в плазме с нагретыми электронами был получен в [7, 8].

В настоящей работе доказано существование семейств косых уединенных и обобщенных уединенных волн, ответвляющихся от состояния покоя, в нагретой плазме с изотермическими ионами и электронами. Дисперсионное соотношение имеет три ветви, соответствующие быстрым магнитозвуковым, альфвеновским и медленным магнитозвуковым волнам. Будут рассмотрены лишь магнитозвуковые волны. Обсуждаются резонансы, приводящие к появлению бегущих волн типа уединенной волны. Показано, что классические уединенные волны, ответвляющиеся от нуля, существуют в неограниченной области физических параметров. Вне этой области уединенные волны не существуют, а имеют место нелокализованные обобщенные уединенные волны, являющиеся продуктом нелинейного резонанса уединенной волны и периодической волны. Для длинных быстрых магнитозвуковых волн резонансная периодическая волна является магнитозвуковой, а для медленных – альфвеновской. Обсуждается специфика нестационарных эффектов, связанная с отсутствием уединенных волн среди стационарных решений, а также области применения модели для описания волновых процессов в магнитосфере Земли.

1. Постановка задачи. Уравнения, описывающие плоские волны в изотропной бесстолкновительной квазинейтральной плазме с постоянными температурами ионов и электронов, выводятся из системы уравнений переноса для изотропной бесстолкновительной плазмы

с изотермическим давлением при следующих предположениях: характерная частота волновых процессов много меньше ленгмюровской частоты, альфвеновская и гибридная альфвеновская скорости много меньше скорости света, дебаевский радиус много меньше характерного линейного масштаба явления [7]. Полученная в результате этих предположений система имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dn}{dt} &= -n \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
 \frac{du}{dt} &= -\frac{n^{-1} \partial}{2} \frac{\partial (B_y^2 + B_z^2)}{\partial x} - \beta^2 n^{-1} \frac{\partial n}{\partial x} \\
 \frac{dv}{dt} &= n^{-1} B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} - R_e^{-1} \frac{d}{dt} \left(n^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\
 \frac{dw}{dt} &= n^{-1} B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + R_e^{-1} \frac{d}{dt} \left(n^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \\
 \frac{dB_y}{dt} &= B_x \frac{\partial v}{\partial x} - B_y \frac{\partial u}{\partial x} + R_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{dw}{dt} \\
 \frac{dB_z}{dt} &= B_x \frac{\partial w}{\partial x} - B_z \frac{\partial u}{\partial x} - R_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{dv}{dt} \\
 R_i &= \frac{\omega_{ic}}{\omega_0}, \quad R_e = \frac{\omega_{ec}}{\omega_0}, \quad \omega_{ic} = \frac{e |B_0|}{m_i c}, \quad \omega_{ec} = \frac{e |B_0|}{m_e c}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь пространственная и временная переменные (x, t) , плотность частиц ионов или электронов n , напряженность магнитного поля $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ и скорость ионов $\mathbf{v} = (u, v, w)$ отнесены соответственно к характерной длине L , частоте ω_0 , плотности n_0 невозмущенной плазмы, модулю вектора невозмущенного магнитного поля B_0 и альфвеновской скорости V_A , m_i и m_e – массы ионов и электронов, ω_{ic} и ω_{ec} – ионная и электронная циклотронные частоты, c – скорость света, а $\omega_0 = V_A/L$ – характерная частота явления. Параметр β определяется из соотношения

$$\beta^2 = \frac{m_i \beta_i^2 + m_e \beta_e^2}{m_i + m_e}, \quad \beta_i = \frac{1}{V_A} \sqrt{\frac{k_b T_i}{m_i}}, \quad \beta_e = \frac{1}{V_A} \sqrt{\frac{k_b T_e}{m_e}}$$

где β_i, β_e – тепловые скорости ионов и электронов, отнесенные к альфвеновской скорости, а T_i, T_e – температуры ионов и электронов и k_b – постоянная Больцмана.

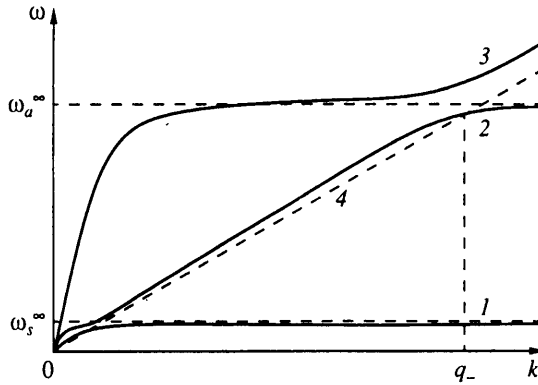
Для одномерных движений компонента B_x магнитного поля остается константой все время движения. Переменные $n, u, v, w, B_x, B_y, B_z$ в состоянии покоя имеют значения 1, 0, 0, 0, $\cos \theta$, $\sin \theta$, 0 соответственно, где θ – угол между \mathbf{B}_0 и направлением движения волн, совпадающим с осью x .

2. Линейная задача. Дисперсионное соотношение для системы уравнений (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
 (R_e R_i + k^2)^2 V^6 - \{R_e^2 R_i^2 + R_e^2 R_i^2 \cos^2 \theta + R_e R_i [1 + \cos^2 \theta (\rho + 1)] k^2 + \\
 + (R_e R_i + k^2)^2 \beta^2\} V^4 + \cos^2 \theta [R_e^2 R_i^2 + 2 R_e^2 R_i^2 \beta^2 + R_e R_i (\rho + 2) \beta^2 k^2] V^2 - \\
 - R_e^2 R_i^2 \cos^4 \theta \beta^2 = 0, \quad V = \frac{\omega}{k}, \quad \rho = \left(\sqrt{\frac{R_e}{R_i}} - \sqrt{\frac{R_i}{R_e}} \right)^2
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где ω, k – частота и волновое число нормальной моды.

Из (2.1) видно, что ветви дисперсионного соотношения $\omega = \omega(k)$ являются нечетными функциями волнового числа и симметричны относительно оси ω в плоскости $k\omega$; в силу этого достаточно рассмотреть случай $\omega \geq 0, k \geq 0$. Для значений параметра $\beta \neq 0$ у дисперсионного



Фиг. 1. Взаимное расположение графиков ветвей дисперсионного соотношения (2.1) ($\beta > \beta_c(\theta)$). Кривые 1–3 соответствуют медленной магнитозвуковой, альфвеновской и быстрой магнитозвуковой ветви. Имеет место резонанс длинной медленной и альфвеновской волн: прямая 4, касательная к 1 всегда пересекает 2 при $k = q^-$

соотношения есть три ветви: медленная магнитозвуковая $\omega_s = kV_s(k)$, быстрая магнитозвуковая $\omega_f = kV_f(k)$ и альфвеновская $\omega_a = kV_a(k)$ (фиг. 1). При $\beta = 0$ имеем «холодную» плазму и дисперсионная кривая имеет две ветви – альфвеновскую и магнитозвуковую.

Поскольку при заданном V соотношение (2.1) является биквадратным уравнением относительно k , при фиксированном значении фазовой скорости V прямая $\omega = kV$ на положительной полуоси k имеет не более двух общих точек со всеми ветвями (2.1). Значения ω альфвеновской и медленной звуковой ветвей в коротковолновом пределе ($k \rightarrow +\infty$) ограничены по модулю постоянными $\omega_\infty^a = R_e \cos \theta$ и $\omega_\infty^s = R_i \cos \theta$, которые не зависят от параметра β , а прямые $\omega = \omega_\infty^{a,s}$ являются горизонтальными асимптотами графиков этих ветвей (фиг. 1).

При $\beta \neq 0$ график быстрой магнитозвуковой ветви лежит всюду выше наклонной асимптоты $\omega = \beta k$, т.е. уравнение $\omega(k) = \beta k$ имеет решения

$$k^2 = \frac{R_e R_i}{\beta^2} (\cos^2 \theta - \beta^2)$$

и при $\beta < \cos \theta$ асимптота $\omega = \beta k$ единожды (для $k > 0$) пересекает альфвеновскую ветвь, для $\beta > \cos \theta$ пересечений с дисперсионной кривой нет. Фазовые скорости бесконечно длинных волн ($k \rightarrow 0$) для альфвеновской, быстрой и медленной ветвей даются выражениями

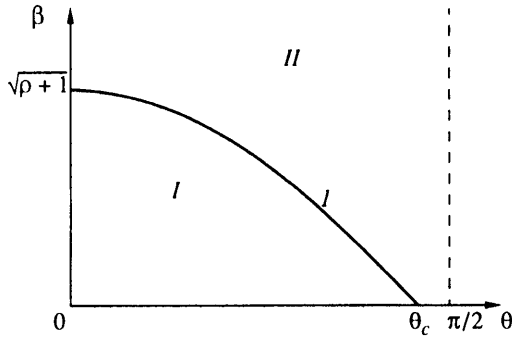
$$V_a(0) = \cos \theta, \quad V_f(0) = V^+, \quad V_s(0) = V^-$$

$$V^\pm = \sqrt{(1 + \beta^2 \pm \sqrt{(1 + \beta^2)^2 - 4 \cos^2 \theta \beta^2}) / 2}, \quad 0 < V^- < V_a < V^+ \quad (2.2)$$

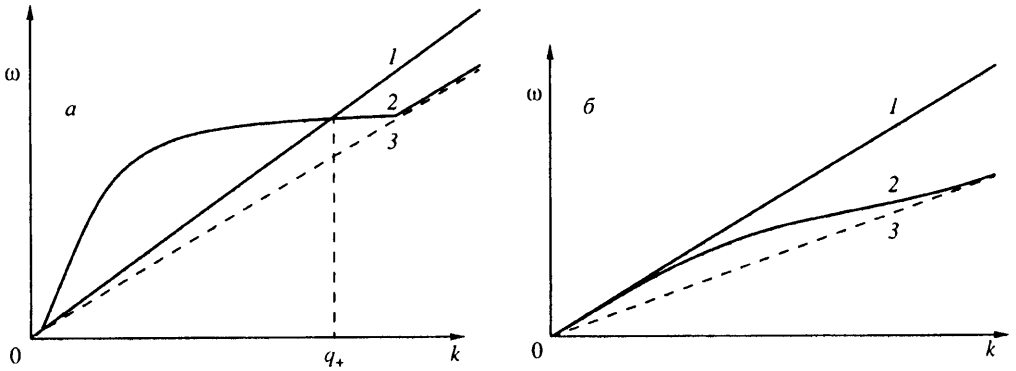
Кривая $\beta = \beta_c(\theta)$, где

$$\beta_c(\theta) = \sqrt{(\rho^{-1} + 1)(\rho + 1) \cos^2 \theta - 1}$$

разделяет плоскость θ, β на две области (фиг. 2). При $\beta > \beta_c(\theta)$ (область II на фиг. 2) прямая $\omega = V^+ k$, касательная к быстрой магнитозвуковой ветви в нуле, больше не пересекает дисперсионную кривую (простой резонанс, фиг. 3, б). При $\beta < \beta_c(\theta)$ (область I на фиг. 2) существуют дополнительные точки пересечения $k = \pm q^+$, $q^+ > 0$, этой прямой с быстрой магнитозвуковой ветвью дисперсионной кривой (фиг. 3, а), что соответствует линейному резонансу длинной и короткой волн. При $\beta = \beta_c(\theta)$ зануляется коэффициент при кубе волнового числа разложения ω при малых k , что приводит, в частности, к необходимости учитывать следующие члены в длинноволновом разложении частоты.



Фиг. 2. Кривая $\beta = \beta_c(\theta)$ (1), разделяющая область I существования обобщенных уединенных волн и II – уединенных волн



Фиг. 3. Кривая 2 быстрой магнитозвуковой ветви при $\beta < \beta_c(\theta)$ (а) и $\beta > \beta_c(\theta)$ (б), стремящаяся к асимптоте (пунктирная линия 3) при $k \rightarrow \infty$. На фигуре а имеем резонанс длинной и короткой магнитозвуковой волн: прямая 1, касательная к 2 в нуле, пересекает 2 при $k = q^+$. На фигуре б резонанс отсутствует

Прямая $\omega = V^-k$, касательная к медленной магнитозвуковой ветви, всегда пересекает альфвеновскую ветвь в одной точке $k = q^-$ (для $k > 0$) (фиг. 1), таким образом имеет место линейный резонанс длинной медленной магнитозвуковой и короткой альфвеновской волн.

Для $\beta < \beta_c(\theta)$ существует такая скорость $V = V_r$, при которой быстрая магнитозвуковая ветвь имеет точку $(k_r, \omega_r = V_r k)$, что прямая $\omega = V_r k$ и кривая быстрой магнитозвуковой ветви касаются в точке (k_r, ω_r) (1:1-резонанс).

Таким образом, для быстрой и медленной магнитозвуковых ветвей, имеем четыре типа резонансов: простой, длинной и короткой быстрых магнитозвуковых волн, длинной медленной магнитозвуковой и короткой альфвеновской волны и 1:1-резонанс. В настоящей работе будут рассмотрены лишь первые три резонанса.

3. Динамическая система. Решения системы уравнений (1.1) типа бегущей волны зависят от $\xi = x - Vt$. В настоящей работе будут рассматриваться волны, движущиеся со скоростью, близкой к одной из магнитозвуковых скоростей, т.е. для V примем $V = V^\pm + \mu$, где μ – малый параметр и V^\pm – одна из скоростей (2.2). Бегущие волны описываются системой уравнений, полученных однократным интегрированием из (1.1). Плотность n и x -компонента скорости выражаются через другие неизвестные функции по формулам

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\beta^2}{V^2} - \frac{B}{V^2} - \operatorname{sgn} \left(1 - \frac{\beta^2}{V^2} \right) \sqrt{\left(1 - \frac{B}{V^2} + \frac{\beta^2}{V^2} \right)^2 - 4 \frac{\beta^2}{V^2}} \right]$$

$$u = V \left(1 - \frac{1}{n} \right), \quad B = \frac{1}{2} (b_y^2 + 2 \sin \theta b_y + B_z^2), \quad b_y = B_y - \sin \theta$$

Константы интегрирования выбираются так, что состояние покоя удовлетворяет уравнениям для бегущих волн, а сами уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\xi} &= -R_i B_z - \frac{R_i \cos \theta}{V} n w, & \frac{dw}{d\xi} &= \frac{R_i \cos \theta}{V} n v + R_i b_y + R_i \sin \theta (1 - n) \\ \frac{db_y}{d\xi} &= R_e n w + n B_z \frac{R_e \cos \theta}{V}, & \frac{dB_z}{d\xi} &= -R_e n v - \frac{R_e \cos \theta}{V} n b_y \end{aligned} \quad (3.1)$$

В окрестности $V = V^\pm$ система (3.1) может быть представлена в виде

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\xi} = A\mathbf{w} + \mathbf{F}(\mu\mathbf{w}), \quad \mathbf{w} = (v, w, b_y, B_z)^T \quad (3.2)$$

$$A^\pm = \begin{pmatrix} 0 & -R_i C^\pm & 0 & -R_i \\ R_i C^\pm & 0 & R_i (1 - D^\pm) & 0 \\ 0 & R_e & 0 & R_e C^\pm \\ -R_e & 0 & -R_e C^\pm & 0 \end{pmatrix}, \quad C^\pm = \frac{\cos \theta}{V^\pm}, \quad D^\pm = \frac{\sin^2 \theta}{V^{\pm 2} - \beta^2}$$

а нелинейная вектор-функция $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)^T$, $F_i = O(\mu|\mathbf{w}|, |\mathbf{w}|^2)$, $i = 1, \dots, 4$, имеет вид ($C = \cos \theta/V$)

$$\begin{aligned} F_1 &= -R_i C^\pm n w + R_i C^\pm w, & F_2 &= R_i C^\pm n v - R_i C^\pm v + R_i \sin \theta (1 - n) \\ F_3 &= R_e n w - R_e w + R_e C^\pm n B_z - R_e C^\pm B_z, & F_4 &= -R_e n v + R_e v - R_e C^\pm n b_y + R_e C^\pm b_y \end{aligned}$$

Обратимость системы уравнений (3.2) подразумевает следующие равенства: $AR = -RA$, $\mathbf{F}(\mu, R\mathbf{w}) = -R\mathbf{F}(\mu, \mathbf{w})$, где R – диагональная матрица, $R = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$. Эти равенства означают, что среди решений (3.2) могут находиться решения с четными v и b_y и нечетными w и B_z .

Характеристическое уравнение $|A_1(V) - \lambda \mathbf{I}| = 0$, где \mathbf{I} – единичная матрица и $A_1(V)$ получена из A^\pm при замене V^\pm на V ($D^\pm \rightarrow D$), записывается в виде

$$\lambda^4 - R_i R_e (2 - D - (\rho + 2)C^2) \lambda^2 + (R_i R_e)^2 (1 - C^2)(1 - C^2 - D) = 0 \quad (3.3)$$

Резонансы при $V = V^\pm$ и $V = V_r$, описанные в предыдущем параграфе, обуславливают бифуркации из нулевого решения, которые в первом случае дают уединенные и обобщенные уединенные волны, а во втором – уединенные волны-пакеты.

При $V = V^\pm$ характеристическое уравнение (3.3) представляется в виде

$$\lambda^2 (\lambda^2 - \frac{R_e R_i}{V^{\pm 2}} [V^{\pm 2} - \cos^2 \theta - \rho \cos^2 \theta]) = 0 \quad (3.4)$$

На мнимой оси лежат следующие корни уравнения (3.4): при $V = V^+$, $\beta > \beta_c(\theta)$ ноль второго порядка, $V = V^+$, $\beta < \beta_c(\theta)$ или при $V = V^-$ – ноль второго порядка и два ненулевых значения $\lambda = \pm i q^\pm$, $q^\pm > 0$, где

$$q^{\pm 2} = -\frac{R_e R_i}{V^{\pm 2}} (V^{\pm 2} - \cos^2 \theta - \rho \cos^2 \theta) \quad (3.5)$$

4. Уединенные волны. Для $V = V^+$ и $\beta > \beta_c$ имеем простой резонанс. Представим $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1$, где $\mathbf{w}_0 \in E_0$, $\mathbf{w}_1 \in E_1$, а E_0 и E_1 – центральное и гиперболическое пространства нулевого собственного значения соответственно. Согласно теореме о центральном многообразии [9] для достаточно малых μ и \mathbf{w}_0 , $\mathbf{w}_1 = \Phi(\mu, \mathbf{w}_0)$, где функция $\Phi(\mu, \mathbf{w}_0) = O(\mu|\mathbf{w}_0|, |\alpha_0|^2)$. Представим далее \mathbf{w}_0 в виде

$$\mathbf{w}_0 = a_0 \Phi_0 + a_1 \Phi_1 \quad (4.1)$$

где ϕ_0 и ϕ_1 – собственный и присоединенный векторы матрицы A^+

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} -C^+ \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \frac{V^{+2}}{V^{+2} - \cos^2 \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ R_e^{-1} - R_i^{-1} C^{+2} \\ (R_i^{-1} - R_e^{-1}) C^+ \end{pmatrix}, \quad A\phi_0 = 0, \quad A\phi_1 = \phi_0$$

Для достаточно малых μ и $\mathbf{a} = (a_0, a_1)'$ в соответствии с теоремой о центральном многообразии динамическая система четвертого порядка (3.2) сводится к системе второго порядка, которая в переменных a_0 и a_1 имеет вид (точка обозначает дифференцирование по ξ)

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= a_1 + O(\mu |\mathbf{a}|, |\mathbf{a}|^2) \\ \dot{a}_1 &= \mu c_1^+ a_0 - c_2^+ a_0^2 + O(a_1^2) + o(\mu |\mathbf{a}|, |\mathbf{a}|^2) \\ c_1^+ &= 2 \frac{R_e R_i}{\Delta^+} \left(\frac{C^{+2}}{V^+} + \frac{V^+ D^\pm}{V^{+2} - \beta^2} \right) \\ c_2^+ &= \frac{R_e R_i \sin \theta}{\Delta^+ (V^{+2} - \beta^2)} \left(C^{+2} + \frac{1}{2} + \frac{V^{+2} D^\pm}{V^{+2} - \beta^2} \right) \\ \Delta^+ &= \frac{1 - (\rho + 1) C^{+2}}{1 - C^{+2}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Система (4.2) получена скалярным умножением (3.2) на присоединенный ψ_0 и собственный ψ_1 векторы сопряженной матрицы $(A^+)^*$: $(A^+)^* \psi_1 = 0$, $(A^+)^* \psi_0 = \psi_1$. Заметим, что векторы ψ_i , $i = 1, 2$, нормированы так, что $\langle \phi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$, δ_{ij} – символ Кронеккера, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает обычное скалярное произведение в \mathbb{C}^4 . В главном приближении по μ для $\mu > 0$ система уравнений (4.2) имеет решение

$$a_0 = \mu \frac{3c_1^+}{2c_2^+} \operatorname{ch}^{-2} \frac{\sqrt{c_1^+ \mu}}{2} \xi + O(\mu^2), \quad a_1 = \dot{a}_0 + O(\mu^2) \quad (4.3)$$

Более того, оказывается, что для малых μ (4.3) является точным решением полной системы (4.2) (а значит, и (3.2)), которое четно и экспоненциально убывает на обеих бесконечностях.

Выражение для главной части уединенной волны для физических переменных восстанавливается по формуле (4.1).

5. Быстрые и медленные обобщенные уединенные волны. В настоящем разделе рассмотрим нелокальные аналоги уединенных волн – обобщенные уединенные волны, которые образуются в результате бифуркаций, соответствующих резонансам длинной и короткой быстрых магнитозвуковых волн, а также длинной медленной магнитозвуковой и короткой альфвеновской волн. Иными словами, будем рассматривать волны со скоростями, находящимися в окрестности V^+ при $\beta < \beta_c(\theta)$ (случай дополнительный к рассмотренному в предыдущем параграфе), а также в окрестности V^- .

Как уже отмечалось, в рассматриваемых случаях все корни уравнения (3.4) чисто мнимые: ноль второго порядка и $\pm i q^\pm q^\pm > 0$, где q^\pm дается формулой (3.5). В уравнениях (3.2) сделаем замену переменных

$$\mathbf{w} = a_0(\xi) \phi_0 + a_1(\xi) \phi_1 + a_+(\xi) \phi_+ + a_-(\xi) \phi_- \quad (5.1)$$

где $a_- = \bar{a}_+$, $A^\pm \phi_0 = 0$, $A^\pm \phi_1 = \phi_0$, $A^\pm \phi_+ = i q^\pm \phi_+$, $A^\pm \phi_- = -i q^\pm \phi_-$. Собственные и присоединенные векторы матрицы A^\pm даются формулами

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} -C^\pm \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \frac{1}{1 - C^{\pm 2}} \begin{pmatrix} 0 \\ R_e^{-1} - R_i^{-1} C^{\pm 2} \\ 0 \\ (R_i^{-1} - R_e^{-1}) C^\pm \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{\pm} = \begin{pmatrix} R_i(q^{\pm})^{-1}(1 - R_i R_e^{-1} C^{\pm 2}) \\ i R_i R_e^{-1} C^{\pm} \\ q^{\pm-1}(R_i - R_e)C^{\pm} \\ -i \end{pmatrix}, \quad \Phi_{-} = \bar{\Phi}_{+}$$

Вектор-функция $\mathbf{a}_1 = (a_0, a_1, a_+, a_-)^T$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= a_1 + O(\mu | \mathbf{a}_1 |, | \mathbf{a}_1 |^2), \quad \dot{a}_1 = \mu c_1^{\pm} a_0 - c_2^{\pm} a_0^2 + f_1^{\pm}(a_0, a_1, a_+, a_-) \\ \dot{a}_+ &= i q^{\pm} a_+ + i(\mu d_1^{\pm} a_0 + d_2^{\pm} a_0^2) + g_1^{\pm}(a_0, a_1, a_+, a_-) \\ \dot{a}_- &= -i q^{\pm} a_- + i(\mu d_1^{\pm} a_0 + d_2^{\pm} a_0^2) + \bar{g}_1^{\pm}(a_0, a_1, a_+, a_-) \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} c_1^{\pm} &= 2 \frac{R_e R_i}{\Delta^{\pm}} \left(\frac{C^{\pm 2}}{V^{\pm}} + \frac{V^{\pm} D^{\pm}}{V^{\pm 2} - \beta^2} \right) \\ c_2^{\pm} &= \frac{R_e R_i \sin \theta}{\Delta^{\pm} (V^{\pm 2} - \beta^2)} \left(C^{\pm 2} + \frac{1}{2} + \frac{V^{\pm 2} D^{\pm}}{V^{\pm 2} - \beta^2} \right) \\ \Delta^{\pm} &= \frac{1 - (\rho + 1) C^{\pm 2}}{1 - C^{\pm 2}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} d_1^{\pm} &= -\frac{R_e^2 C^{\pm} (R_i - R_e C^{\pm 2})}{2q^{\pm 2} V^{\pm 3}} + \frac{R_i R_e (R_e - R_i) C^{\pm}}{2q^{\pm 2}} \left(\frac{C^{\pm 2}}{V^{\pm}} + \frac{2V^{\pm} D^{\pm}}{V^{\pm 2} - \beta^2} \right) \\ d_2^{\pm} &= \frac{R_e R_i (R_i - R_e) C^{\pm} \sin \theta}{2q^{\pm 2} (V^{\pm 2} - \beta^2)} \left[C^{\pm 2} + \frac{1}{2} + \frac{V^{\pm 2} D^{\pm}}{V^{\pm 2} - \beta^2} \right] \end{aligned}$$

а $f_1^{\pm}(a_0, a_1, a_+, a_-)$ и $g_1^{\pm}(a_0, a_1, a_+, a_-)$ – комплексные нелинейные функции своих аргументов, причем $f_1, (a_0, 0, 0, 0) = g_1(a_0, 0, 0, 0) = 0$.

Как и прежде, уравнения (5.2) получены скалярным умножением (3.2) на собственные и присоединенный векторы $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_+, \Psi_-$ сопряженной матрицы $(\mathbf{A}^{\pm})^*$: $(\mathbf{A}^{\pm})^* \Psi_1 = 0, (\mathbf{A}^{\pm})^* \Psi_0 = \Psi_1, (\mathbf{A}^{\pm})^* \Psi_+ = -i q^{\pm} \Psi_+, (\mathbf{A}^{\pm})^* \Psi_- = i q^{\pm} \Psi_-$. Нормировка этих векторов выбирается из условия

$$\begin{aligned} \langle \Phi_i, \Psi_j \rangle &= \delta_{ij}, \quad j = 1, 2, \quad \langle \Phi_+, \Psi_j \rangle = \langle \Psi_+, \Phi_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \\ \langle \Phi_+, \Psi_+ \rangle &= 1, \quad \langle \Phi_+, \Psi_- \rangle = 0. \end{aligned}$$

Векторы сопряженного базиса имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= (\Delta^{\pm} R_i (1 - C^{\pm 2}))^{-1} \begin{pmatrix} (R_e - R_i) C^{\pm} \\ 0 \\ R_i (1 - R_i R_e^{-1} C^{\pm 2}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_1 = \Delta^{\pm-1} \begin{pmatrix} 0 \\ R_e \\ 0 \\ R_i C^{\pm} \end{pmatrix} \\ \Psi_+ &= -\frac{R_e}{2q^{\pm}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i(q^{\pm})^{-1}(R_i - R_e)C^{\pm} \\ C^{\pm} \\ -iR_i(q^{\pm})^{-1}(1 - R_i R_e^{-1} C^{\pm 2}) \end{pmatrix}, \quad \Psi_- = \bar{\Psi}_+ \end{aligned}$$

Преимущество замены координат (5.1) состоит в декомпозиции неизвестной вектор функции \mathbf{w} на длинноволновую (a_0, a_1) и коротковолновую a_{\pm} части. В связи с этим естественно сделать в (5.2) следующее масштабное преобразование:

$$a_0 = \mu b_0, \quad a_1 = \mu | \mu |^{1/2} b_1, \quad a_+ = \mu^2 z, \quad \zeta = | \mu |^{1/2} \xi$$

В новых переменных уравнения (5.2) запишутся в виде

$$\begin{aligned} b'_0 &= b_1 + O(\mu), \quad b'_1 = \text{sgn}(\mu)(c_1^\pm b_0 - c_2^\pm b_0^2) + O(\mu) \\ \dot{z} &= iq^\pm z + i(d_1^\pm b_0 + d_2^\pm b_0^2) + O(|\mu|^{1/2}) \\ \dot{\bar{z}} &= -iq^\pm \bar{z} - i(d_1^\pm b_0 + d_2^\pm b_0^2) + O(|\mu|^{1/2}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

где штрих обозначает производную по ζ . Из (5.4) следует, что в низшем порядке по μ система уравнений (5.2) имеет решение

$$a_0^\pm = \mu \frac{3}{2} \frac{c_1^\pm}{c_2^\pm} \text{ch}^{-2} \frac{\sqrt{c_1^\pm} \mu}{2} \xi, \quad a_1^\pm = \dot{a}_0^\pm \quad (5.5)$$

В рассматриваемом случае $\Delta^+ < 0$, $c_1^+ < 0$ и $c_1^- < 0$, а $\Delta^- > 0$, $c_2^- < 0$ и $c_1^- > 0$ в (5.3). Отсюда имеем, что в (5.5) $\mu < 0$ для быстрых магнитозвуковых и $\mu > 0$ для медленных магнитозвуковых волн.

Для подсчета a_+ в низшем порядке по μ определим $a = a_+ + a_-$, $b = a_+ - a_-$. Из последней пары уравнений (5.2) получим с точностью до $o(\mu^2)$:

$$\ddot{a} + q^{\pm 2} a = -2q^\pm (\mu d_1^\pm a_0^\pm + d_2^\pm a_0^{\pm 2}) \quad (5.6)$$

Исходя из вида уравнения (5.6), представим a в виде линейной комбинации синуса и косинуса с переменными коэффициентами

$$a = 2(C_1(\xi) \sin q^\pm \xi + C_2(\xi) \cos q^\pm \xi), \quad b = -2i(C_1(\xi) \cos q^\pm \xi - C_2(\xi) \sin q^\pm \xi)$$

Подставляя $a_+ = 0,5(a + b)$ в третье уравнение (5.2) и решая его методом вариации произвольного постоянного с точностью до $O(\mu^2)$, получим

$$C_1^\pm = -\frac{1}{2} \int_{-\xi}^{\xi} (\mu d_1^\pm a_0^\pm + d_2^\pm a_0^{\pm 2}) \cos q^\pm \xi d\xi$$

$$C_2^\pm = \int_{-\xi}^{\xi} (\mu d_1^\pm a_0^\pm + d_2^\pm a_0^{\pm 2}) \sin q^\pm \xi d\xi$$

где C_1^\pm – нечетные, а C_2^\pm – четные функции ξ . Легко видеть, что $C_2^\pm(\infty) = 0$, а

$$C_1^\pm(\infty) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu d_1^\pm a_0^\pm + d_2^\pm a_0^{\pm 2}) \cos q^\pm \xi d\xi \approx \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{c_1^\pm} \mu}\right) \quad (5.7)$$

в низшем порядке по μ (интеграл (5.7) может быть подсчитан при помощи использования контура интегрирования в нижней полуплоскости комплексной плоскости ξ). Формула преобразования (5.1) дает

$$\mathbf{w}^{\pm(+\infty)} = \mathbf{D}^\pm \exp\left(-\pi \frac{1}{\sqrt{c_1^\pm} \mu}\right) \sin q^\pm x + O\left[\mu \exp\left(-\pi \frac{1}{\sqrt{c_1^\pm} \mu}\right)\right] \quad (5.8)$$

Точное значение компонент постоянных векторов \mathbf{D}^\pm может быть вычислено только с учетом членов всех порядков по μ в (5.2). Решение, в низшем приближении по μ описываемое (5.5), с асимптотикой (5.8) представляет собой обобщенную уединенную волну.

6. Обсуждение результатов. В изотропной бесстолкновительной квазинейтральной плазме с изотермическими ионами и электронами существует два однопараметрических семейства уединенных волн двух разных типов. В области параметров $\{\beta > \beta_c(\theta), 0 < \theta \leq \pi/2\}$ имеют место

быстрые уединенные волны, распространяющиеся со скоростями в окрестности характеристической фазовой скорости быстрой магнитозвуковой волны. Эта скорость стремится к альфвеновской в пределе холодной плазмы. Из (4.3), (4.1) следует, что быстрые уединенные волны являются волнами сжатия. Величины n , u , v , B_y в такой волне симметричны, а w , B_z – антисимметричны. Для водородной плазмы, например, при $\beta \sim 1$ критический угол θ_c , такой, что при $\theta < \theta_c$ уединенные волны перестают существовать, очень близок к 90° (отличие порядка 1°). Наличие уединенных волн в указанной области параметров обуславливает ряд особенностей развития начальных возмущений. Численные расчеты показывают, что эволюция локализованных (солитоноподобных) возмущений сжатия в этом случае приводит к образованию одной или нескольких уединенных волн, которые и являются конечным продуктом этой эволюции.

В области $\{\beta < \beta_c(\theta), 0 < \theta \leq \pi/2\}$ имеем обобщенные уединенные волны, которые являются продуктом нелинейного резонанса быстрой уединенной волны с периодической магнитозвуковой волной. Из (5.5), (5.1) следует, что обобщенная уединенная волна в этом случае является волной разрежения. Неизвестные функции имеют ту же четность, как и в случае существования обычных уединенных волн. Численные расчеты показывают, что наличие обобщенных уединенных волн вместо обычных уединенных волн в указанной области параметров приводит к распаду локализованных возмущений разрежения. Эти возмущения убывают, излучая периодическую волну, длина которой близка к резонансной. Процесс излучения является квазистационарным.

При всех $\{\beta > 0, 0 < \theta \leq \pi/2\}$ существуют обобщенные уединенные волны, являющиеся продуктом нелинейного резонанса медленной уединенной волны сжатия с периодической альфвеновской волной. Из численного эксперимента следует, что распад локализованных структур в этом случае происходит за счет механизмов, отличных от излучения резонансных волн.

В плазме магнитосферы Земли температуры ионов и электронов могут изменяться в пределах от 1 до 50 кэВ и значение параметра β лежит в диапазоне от 0,1 до 2 [10]. В этом случае тепловые скорости ионов могут оказаться сравнимыми с фазовыми скоростями крупномасштабных быстрых магнитозвуковых волн, в результате чего эти волны будут испытывать затухание Ландау, связанное с обменом энергией между частицами и волной. Затухание Ландау будет отсутствовать лишь в малой окрестности $\pi/2$. Такие волны могут наблюдаться в плазме магнитосферы Земли. Так как θ_c очень близок к $\pi/2$, то в числе этих волн могут оказаться как обычные уединенные волны, образовавшиеся в результате распада локализованных возмущений сжатия, так и излучающие периодическую структуру волны разрежения.

Характеристическая фазовая скорость мелкомасштабных медленных магнитозвуковых волн при близких температурах ионов и электронов сравнима с тепловыми скоростями, в связи с чем эти волны почти сразу затухают [11].

Заключение. Доказано существование уединенных волн и обобщенных уединенных волн в изотропной бесстолкновительной квазинейтральной плазме с постоянными температурами ионов и электронов. Обобщенные уединенные волны, являющиеся продуктом нелинейного резонанса уединенной волны с периодической волной, существуют в области физических параметров, где отсутствуют уединенные волны. Асимптотически (по малой амплитуде) определены формы этих волн.

Настоящая работа поддержана проектом № 99-01-00277 Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saffman P.G.* On hydromagnetic waves of finite amplitude in a cold plasma // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 11. Pt 4. P. 552–566.
2. *Il'ichev A.* Steady waves in a cold plasma // *J. Plasma Phys.* 1995. V. 55. № 2. P. 181–194.
3. *Ильичев А.Т.* Уединенные волны-пакеты в холодной плазме // *Изв. РАН МЖГ.* 1996. № 3. С. 154–161.
4. *Kakutani T., Ono H.* Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // *J. Phys. Soc. Japan* 1969. V. 26. № 5. P. 1305–1318.
5. *Kakutani T., Ono H., Taniuti T., Wei C.* Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation. II. Application to hydromagnetic waves in cold plasma // *J. Phys. Soc. Japan.* 1968. V. 24. № 5. P. 1159–1166.

6. *Bakholdin I., Il'ichev A.* Solitary wave decay in a cold plasma // *J. Plasma Phys.* 1998. V. 60. № 3. P. 569–580.
7. *Kakutani T., Kawahara T., Taniuti T.* Nonlinear hydromagnetic solitary waves in a collision-free plasma with isothermal electron pressure // *J. Phys. Soc. Japan.* 1967. V. 23. № 5. P. 1138–1149.
8. *Kawahara T.* Oblique nonlinear hydromagnetic waves in a collision-free plasma with isothermal electron pressure // *J. Phys. Soc. Japan.* 1969. V. 27. № 5. P. 1331–1340.
9. *Iooss G., Adelmeyer M.* Topics on bifurcation theory and applications. Singapore: World Scientific, 1992. 160 p.
10. *Patel V., Dasgupta B.* Theory and observations of Alfvén solitons in the finite beta magnetospheric plasma // *Physica D.* 1987. V. 27. № 3. P. 387–398.
11. *Пикельнер С.Б.* Основы космической электродинамики. М.: Наука, 1966. 407 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.XI.1999