МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 2000

УДК 532.517.9.04 : 536.24

© 2000 г. Г.И. МАЙКАПАР

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

Приведено аналитическое решение уравнений движения невязкой несжимаемой жидкости (внешнее течение), служащее асимптотой для численного решения уравнений движения жидкости вязкой (внутреннее течение). С помощью этого решения можно исследовать влияние растекания и завихренности внешнего течения на теплообмен ("пики" теплового потока).

В исследованиях аэродинамического нагревания моделей летательных аппаратов при сверхзвуковых скоростях были обнаружены "пики" – узкие области на поверхности, в которых тепловой поток сравним, а может и значительно превосходить тепловой поток к тупым носовым частям и кромкам. Пики – следствие встречи с поверхностями струй и слоев смешения, образующихся при интерференции ударных волн и отрыве. Как и максимумы теплового потока в безотрывных течениях, они располагаются вблизи критических точек и линий. Течение вихревое, что обычно в теории пограничного слоя не учитывается. Метод расчета пиков можно получить путем корреляции результатов систематических экспериментов и расчетов (особенно необходимых для учета натурных условий), но таких материалов недостаточно и получение их требует больших затрат. Для уменьшения затрат времени и средств может быть полезной "модель" внутреннего течения в окрестности критической точки с параметрами, характеризующими растекание и завихренность внешнего течения невязкой жидкости. В качестве такой модели предлагается точное решение уравнений Навье – Стокса, получаемое как численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Это возможно при линейной зависимости составляющих скорости от декартовых координат x, z на твердой поверхности. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в окрестности критической точки. Для внутреннего течения размерной величиной, характеризующей растекание, является производная $(\partial u/\partial x)_0 = a$. Воспользуемся уравнениями в безразмерных величинах: составляющие скорости u, v, w отнесены к $\sqrt{a\nu}$, линейные размеры – к $\sqrt{\nu/a}$, давление p – к $\rho a\nu$, где ν – кинематическая вязкость, ρ – плотность

$$u_x + v_y + w_z = 0 \tag{1}$$

$$uu_x + vu_y + wu_z + p_x = \Delta u$$

$$uv_x + vv_y + wv_z + p_y = \Delta v$$

$$uw_x + vw_y + ww_z + p_z = \Delta w \tag{2}$$

Представим составляющие скорости в виде, удовлетворяющем уравнению неразрывности (1)

$$u = (F' + f)x + gz + P, \quad v = -2F$$

$$w = (F' - f)z + hx + Q$$

Здесь F, f, g, h, P, Q – функции y, в отличие от [1] добавлены члены gz, hx. В случае осесимметричного течения $f = g + h = P = Q = 0$. Подставив эти выражения в уравнения движения (2), получим

$$[(F'+f)^2 - 2F(F''+f') - (F'''+f'') + gh]x + [2(F''g - Fg') - g'']z +$$
$$+(F'+f)P - 2FP' - P'' + gQ + p_x = 0$$
$$2(2FF' - F'') + p_y = 0$$
$$[(F'-f)^2 - 2F(F''-f') - (F'''-f'') + gh]z + [2(F'h - Fh') - h']x +$$
$$+(F'-f)Q - 2FQ' - Q'' + Ph + p_z = 0 \qquad (3)$$

Из второго уравнения (3) очевидно, что $p_{yx} = p_{yz} = 0$, поэтому и $p_{xy} = p_{zy} = 0$, и так как эти производные должны быть равны нулю при любых x, z, то множители при x, z и свободные члены должны быть постоянными, т.е.

$$(F'+f)^2 - 2F(F''+f') - (F'''+f'') + gh = \text{const}$$

$$(F'-f)^2 - 2F(F''-f') - (F'''-f'') + gh = \text{const}$$
$$2(F'g - Fg') - g'' = \text{const}$$
$$2(F'h - Fh') - h'' = \text{const}$$
$$(F'+f)P - 2FP' - P'' + gQ = \text{const}$$
$$(F'-f)Q - 2FQ' - Q'' + hP = \text{const}$$

Кроме того, $p_{xz} = p_{zx}$, следовательно

$$2(F'g - Fg') - g'' = 2(F'h - Fh') - h''$$

Складывая и вычитая первые два уравнения, получим систему уравнений с пятью постоянными

$$F''' + 2FF'' - (F')^2 - f^2 - gh = a_1 \qquad (4)$$
$$f''/2 + Ff' - F'f = a_2, \quad g''/2 + Fg' - F'g = h''/2 + Fh' - F'h = a_3 \qquad (5)$$
$$P'' + 2FP' - (F'+f)P - gQ = a_4$$
$$Q'' + 2FQ' - (F'-f)Q - hP = a_5 \qquad (6)$$

Предположим, что при $y \to \infty$ влияние вязкости исчезает, т.е. вторые производные от составляющих скоростей или вихрь обращается в нуль, тогда из (4)–(6) получим уравнения, решение которых будет асимптотическим условием для (4)–(6) и, конечно, должно им удовлетворять при $y \to \infty$

$$2FF'' - (F')^2 - f^2 - gh = a_1 \qquad (7)$$
$$Ff' - F'f = a_2, \quad Fg' - F'g = Fh' - F'h = a_3 \qquad (8)$$
$$2FP' - (F'+f)P - gQ = a_4, \quad 2FQ' - (F'-f)Q - hP = a_5 \qquad (9)$$

Решения уравнений (8) отличаются только постоянными

$$f = F\left(b_1 + a_2 \int \frac{dy}{F^2}\right)$$
$$g = F\left(b_2 + a_3 \int \frac{dy}{F^2}\right) \qquad h = F\left(b_3 + a_3 \int \frac{dy}{F^2}\right)$$

Подставляя их в (7), получаем

$$2FF'' - (F')^2 - F^2\left\{b_1^2 + b_2b_3 + [2a_2b_1 + a_3(b_2 + b_3)]\int\frac{dy}{F^2} + (a_2^2 + a_3^2)\left(\int\frac{dy}{F^2}\right)^2\right\} = a_1 \qquad (10)$$

Предположим, что $F = \alpha y^n$ ($\alpha = 1$ – присоединение, $\alpha = -1$ – отрыв, в дальнейшем будем считать $\alpha = 1$), тогда (10) перейдет в

$$n(n-2)y^{2(n-1)} - (b_1^2 + b_2b_3)y^{2n} - \frac{2a_2b_1 + a_3(b_2 + b_3)}{1-2n} - \frac{a_2^2 + a_3^2}{(1-2h)^2}y^{2(1-n)} = a_1 \qquad (11)$$

Уравнение (11) должно удовлетворяться при любых значениях y, что возможно при $n = 1$ (первый член равен –1) и $n = 2$ (первый член равен 0), второе значение n не удовлетворяет асимптотическому условию $\partial^2 v / \partial y^2 \neq 0$, а при $n = 1$ уравнение (11) удовлетворяется, если

$$b_1 + b_2b_3 = 2a_2b_1 + a_3(b_2 + b_3) = a_1 + a_2^2 + a_3^2 + 1 = 0 \qquad (12)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
&f = b_1y - a_2, \quad g = b_2y - a_3, \quad h = b_3y - a_3\\
&u = (1 - a_2 + b_1y)x + (b_2y - a_3)z + P\\
&v = -2y\\
&w = (1 + a_2 - b_1y)z + (b_3y - a_3)x + Q\\
&\omega_x = b_3x - b_1z + Q'\\
&\omega_y = (b_2 - b_3)y\\
&\omega_2 = b_1x + b_2z + P'
\end{aligned} \qquad (13)$$

В критической точке течения невязкой жидкости на твердой поверхности вихрь $\omega = 0$, если $P'(0) = Q'(0) = 0$. В общем случае для регулярного течения это доказано в [2].

Функции от y для течения вязкой жидкости различные, для сокращения числа постоянных могут быть использованы только зависимости (12). В частном случае для упрощения выражений (13) может быть использован поворот системы координат относительно оси y на угол β, так как движения он не изменяет.

Уравнения, связывающие координаты и составляющие скорости исходной системы и повернутой x_1, z_1, u_1, w_1, имеют вид

$$x = x_1\cos\beta - z_1\sin\beta, \quad z = x_1\sin\beta + z_1\cos\beta$$

$$u_1 = u\cos\beta + w\sin\beta, \quad w_1 = w\cos\beta - u\sin\beta$$

подставляя их в (13), получим

$$u_1 = (1 - A_2 + B_1y)x_1 + (B_2y - A_3)z_1 + P_1$$

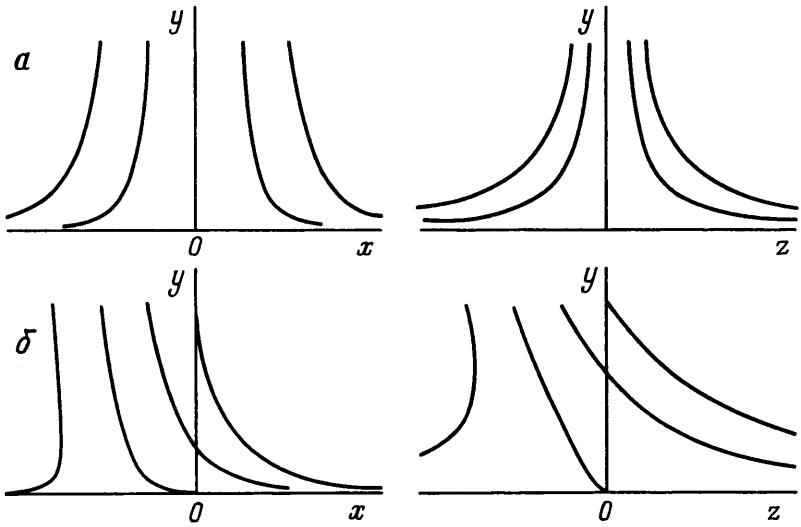
$$w_1 = (1 + A_2 - B_1y)z_1 + (B_3y - A_3)x_1 + Q_1$$

$$A_2 = a_2\cos 2\beta + a_3\sin 2\beta, \quad A_3 = a_3\cos 2\beta - a_2\sin 2\beta$$

$$B_1 = \tfrac{1}{2}(b_2 + b_3)\sin 2\beta + b_1\cos 2\beta$$

$$B_2 = \tfrac{1}{2}(b_3 - b_2) + \tfrac{1}{2}(b_2 + b_3)\cos 2\beta - b_1\sin 2\beta$$

$$B_3 = \tfrac{1}{2}(b_3 - b_2) + \tfrac{1}{2}(b_2 + b_3)\cos 2\beta - b_1\sin 2\beta$$



Проекции линий тока $a = 0{,}5$:
$a - \omega = 0$, $б - \omega \neq 0$

Новые коэффициенты A_i, B_i должны удовлетворять тем же уравнениям (12).

Если все a_i, b_i не равны нулю, то β, при котором $\operatorname{tg} 2\beta = -a_2/a_3$ $A_2 = 0$; при $\operatorname{tg} 2\beta = a_3/a_2$ $A_3 = 0$, при $\operatorname{tg} 2\beta = -2b_1/(b_2 + b_3)$ $B_1 = 0$. В последнем случае при $A_3 \neq 0$ из (12) следует, что и $B_2 = B_3 = 0$. Поэтому имеют смысл только случаи $b_2 \neq 0$ или $b_3 \neq 0$ и, как следует из (12), при этом $a_3 = 0$. Указанные два случая эквивалентны, поэтому можно ограничиться случаем $b_2 \neq 0$. Когда все b_i равны нулю, а a_2 и a_3 нулю не равны, то поворотом системы координат a_3 тоже сводится к нулю, так как это частный случай предыдущего. Если только $a_3 \neq 0$, то его можно заменить на $a_2 \neq 0$ поворотом системы координат на угол $\beta = \pi/4$. Значит, это будет тоже частный случай единственного общего решения, когда не равны нулю a_2 и b_2.

Обратимся к уравнениям (9), которые после подстановки F перейдут в

$$P' - \frac{1-a}{2y}P - \frac{bQ}{2} = 0, \quad Q' - \frac{1+a}{2y}Q = 0 \tag{14}$$

индексы опускаем, постоянные a_4, a_5 сводятся к нулю переносом системы координат.

Интегралы этих уравнений следующие:

$$P = \omega_2 y^{(1-a)/2} + \frac{\omega_1 b}{2(1+a)} y^{(3+a)/2}, \quad Q = \omega_1 y^{(1+a)/2} \tag{15}$$

Если постоянная ω_2 не равна нулю, то вихрь на стенке при $a > -1$ бесконечен (нерегулярное течение), так как $a_1 < 1$ из условия исчезновения влияния вязкости при $y \to \infty$. Представление о течении невязкой жидкости дают линии тока; на стенке ($y = 0$, предельные линии тока)

$$z = \psi x^{(1+a)/1-a}, \quad \psi = \text{const}$$

образуют узел. Решение для проекций линий тока следующее:

$$x = \psi_2 y^{-(1-a)/2} - \frac{b\psi_1 + \omega_2}{2(1-a)} y^{(1-a)/2} \qquad z = \psi_1 y^{(1+a)/2} - \frac{\omega_1 y^{(1+a)/2}}{2(1+a)}$$

где ψ_1, ψ_2 – параметры линий тока. Вид линий тока представлен на фигуре.

Уравнение энергии в безразмерных переменных имеет вид

$$u\theta_x + v\theta_y + w\theta_z = P^{-1}(\theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}) + m^2\Phi$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{c(T_\delta - T_0)}, \quad m^2 = \frac{a\nu}{c(T_\delta - T_0)}, \quad P = \frac{c\rho\nu}{\lambda}$$

Здесь P – число Прандтля, T – температура жидкости, T_c – температура стенки, c – теплоемкость, λ – коэффициент теплопроводности жидкости, Φ – функция диссипации.

Представляя θ полиномом

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 z + \theta_3 xz + \theta_4 x^2 + \theta_5 z^2$$

$$\theta_i = \theta_i(y)$$

нетрудно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для θ_i. Если пренебречь энергией диссипации, то все $\theta_i = 0$, кроме θ_0, тогда

$$\theta_0 = \text{const} \int \exp\left(-2P\int F dy\right) dy \tag{16}$$

и в области течения, где влияние вязкости исчезает, интеграл (16) переходит в интеграл вероятности ошибок, стремящийся уже при небольших y к постоянной величине, при этом можно считать температуру T_δ заданной на бесконечности. Если же диссипация учитывается, то $T \to \infty$ при $y \to \infty$, поэтому следует рассматривать слой конечной толщины δ и принять T_δ равной температуре на конечном расстоянии $y = \delta$, начиная с которого исчезает влияние вязкости. Во внешнем течении диссипация всегда не учитывается. Тепловой поток

$$q = \rho c(T_\delta - T_0)\sqrt{a\nu}P^{-1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_0$$

вообще максимума достигает не в критической точке.

Заключение. Предложено более общее, чем рассмотренное в [1], решение уравнений вихревого движения невязкой несжимаемой жидкости в окрестности критической точки. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений движения и энергии для жидкости вязкой, для которых полученное решение служит асимптотическим условием, можно применить для разработки метода расчета пиков теплового потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хейз У.Д.* Вихревые течения невязкой жидкости вблизи критической точки // ПММ. 1969. Т. 28. Вып. 4. С. 684–687.
2. *Петухов И.В.* Структура течения невязкого газа в окрестности изолированной критической точки // Учен. зап. ЦАГИ. 1982. Т. 13. № 2. С. 1–14.
3. *Howarth L.* The boundary layers in three-dimensional flow // Phil. Mag. 1951. V. 42. Ser. 7. Pt 1. № 326. P. 239–243; Pt 2. № 335. P. 1433–1440.

Москва

Поступила в редакцию
25.III.1998