

УДК 532.135+536.25

© 2000 г. Е.Н. КРАПИВИНА, Т.П. ЛЮБИМОВА

## НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЖИМЫ КОНВЕКЦИИ УПРУГОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОЙ ПОЛОСТИ, ПОДОГРЕВАЕМОЙ СНИЗУ

Исследуется двумерная тепловая конвекция упруговязкой жидкости в горизонтальном цилиндре квадратного сечения при подогреве снизу. Для описания реологических свойств жидкости используется модель Олдройда с верхней конвективной производной. Исследование проводится численно методом конечных разностей. Определены границы неустойчивости механического равновесия относительно монотонных и колебательных возмущений. Численно исследованы надкритические режимы конвекции.

Механическое равновесие подогреваемой снизу ньютоновской жидкости устойчиво лишь при сравнительно малой разности температур. Увеличение температурного градиента приводит к неустойчивости, причем потеря устойчивости равновесия в ньютоновской жидкости происходит относительно монотонных возмущений. Сложная реология жидкостей приводит к качественному отличию их поведения при подогреве снизу от поведения ньютоновской жидкости. В случае дилатантной степенной жидкости при сколько угодно малом градиенте температуры развитие возмущений приводит к стационарному конечно-амплитудному движению, а в случае псевдопластика конвекция при числах Рэлея, больших порогового, возбуждается жестко [1]. Существует много работ, в которых рассматривается линейная устойчивость равновесия горизонтального слоя вязкоупругой или упруговязкой жидкости при подогреве снизу (см., например, [2, 3]). В [2] для описания реологических свойств жидкости применяется модель Максвелла, в [3] – модель Олдройда. Показано, что наличие упругих свойств жидкости приводит к существованию двух типов неустойчивости – относительно монотонных и колебательных возмущений. Потеря устойчивости равновесия по отношению к монотонным возмущениям происходит при тех же значениях числа Грасгофа, что и для ньютоновской жидкости. Появляется, однако, область значений параметров, где более опасными являются колебательные возмущения.

В настоящей работе численно исследуются конвективная устойчивость равновесия и надкритические конвективные движения упруговязкой жидкости в замкнутой полости при подогреве снизу. Для определения границ устойчивости равновесия линеаризованные уравнения малых возмущений решаются численно методом конечных разностей, а изучение надкритических конвективных движений осуществляется путем численного решения задачи в полной нелинейной постановке.

**1. Постановка задачи. Метод численного решения.** Рассмотрим плоское конвективное движение упруговязкой жидкости в квадратной полости со стороны  $h$ . Ось  $x$  направлена вдоль нижней границы, ось  $y$  – вдоль левой стенки полости. Границы области твердые, на горизонтальных границах поддерживаются постоянные разные температуры (температура верхней границы принята за начало отсчета, разность между температурами верхней и нижней границ равна  $\theta$ ). Вертикальные границы теплоизолированы.

Для описания реологических свойств жидкости будем использовать модель Олдройда "В" [4]

$$\sigma_{ij} + \lambda \sigma'_{ij} = \nu D_{ij} + \lambda_r D'_{ij}$$

$$D_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $D_{ij}$  – тензор скоростей деформации,  $\lambda_r$  – время запаздывания,  $\lambda$  – время релаксации  $\sigma'_{ij}$ ,  $D'_{ij}$  – конвективные производные, например

$$D'_{ij} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial t} + v_m \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_m} - \frac{\partial v_i}{\partial x_m} D_{mj} - \frac{\partial v_j}{\partial x_m} D_{im}$$

Запишем уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска в терминах функции тока  $\psi$  и  $z$  – составляющей вихря скорости  $\varphi$

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varphi = \text{rot}_z \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \text{Cr} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x \partial y} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T \quad (1.2)$$

$$\varphi = -\Delta \psi \quad (1.3)$$

Реологические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \tau \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \sigma_{xx} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \sigma_{xy} \right) = \\ = 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \tau_r \left( \frac{\partial D_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial D_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial D_{xx}}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} D_{xx} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} D_{xy} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} + \tau \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \sigma_{yy} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \sigma_{xy} \right) = \\ = -2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \tau_r \left( \frac{\partial D_{yy}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial D_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial D_{yy}}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} D_{yy} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} D_{xy} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} + \tau \left( \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \sigma_{xx} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \sigma_{yy} \right) = \\ = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \tau_r \left( \frac{\partial D_{xy}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial D_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial D_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} D_{xx} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} D_{yy} \right) \end{aligned}$$

$$D_{xx} = 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad D_{yy} = -2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad D_{xy} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Уравнения (1.1)–(1.4) записаны в безразмерной форме. В качестве единиц измерения скорости, времени и температуры приняты соответственно  $\nu/h$ ,  $h^2/\nu$ ,  $\theta$ . Опреде-

люющими параметрами задачи являются безразмерные времена запаздывания и релаксации  $\tau_r$  и  $\tau$ , число Грасгофа  $Gr$  и Прандтля  $Pr$

$$\tau_r = \frac{\lambda_r \nu}{h^2}, \quad \tau = \frac{\lambda \nu}{h^2}, \quad Gr = \frac{g\beta\theta h^3}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}$$

Гидродинамические и тепловые граничные условия имеют следующий вид:

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (x = 0, 1) \quad (1.5)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad T = 0 \quad (y = 1)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad T = 1 \quad (y = 0)$$

В состоянии механического равновесия движение отсутствует, градиент температуры постоянен

$$\psi_0 = 0, \quad T_0 = 1 - y$$

Будем рассматривать устойчивость равновесия по отношению к малым возмущениям

$$\psi = \psi_0 + \psi', \quad T = T_0 + T', \quad \phi = \phi_0 + \phi', \quad \sigma_{ij} = \sigma_{0ij} + \sigma'_{ij} \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.1)–(1.5) и опуская квадратичные по возмущениям члены, получим систему линейных уравнений и граничных условий для возмущений в виде

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} = Gr \frac{\partial T'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \sigma'_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma'_{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma'_{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma'_{yy}}{\partial x \partial y} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \Delta T' + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \quad (1.8)$$

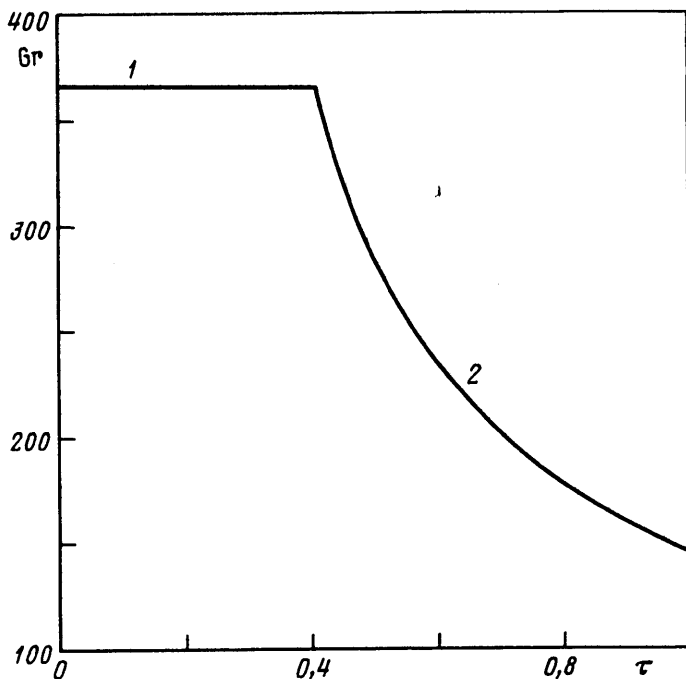
$$\sigma'_{ij} + \tau \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial t} = D'_{ij} + \tau_r \frac{\partial D'_{ij}}{\partial t} \quad (1.9)$$

$$\psi' = \frac{\partial \psi'}{\partial n} = 0, \quad T' = 0 \quad (1.10)$$

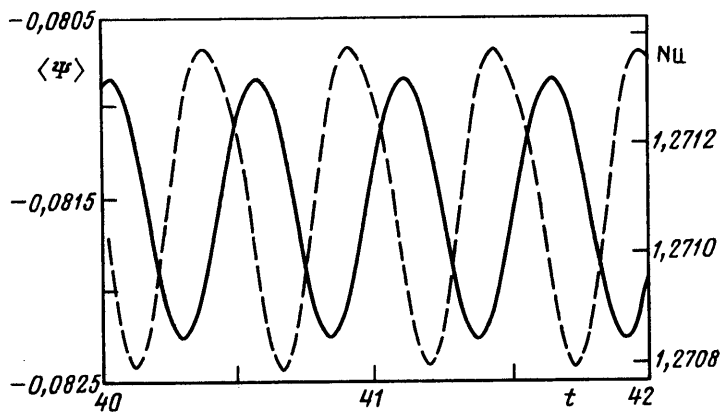
Для определения границ линейной устойчивости равновесия по отношению к малым возмущениям уравнения (1.7)–(1.9) с граничными условиями (1.10) решались численно методом конечных разностей. Используемый метод подробно описан в [5]. В качестве начального приближения задавалось одновихревое движение.

Изучение надкритических конвективных движений осуществлялось путем численного решения полных нелинейных уравнений (1.1)–(1.4) с граничными условиями (1.5) методом конечных разностей. Использовалась неявная схема продольно-поперечной прогонки. Для обеспечения устойчивости счета при аппроксимации конвективных членов использовались разности против потока. Уравнение Пуассона решалось по схеме последовательной верхней релаксации. Значения вихря скорости на границе находились по формуле Пирсона. Расчеты проводились при  $Pr = 7$  и отношения времен запаздывания и релаксации  $\tau_r/\tau = 0,1$ . Основные вычисления производились на равномерной сетке  $30 \times 30$ .

Численное решение нестационарных уравнений позволяло проследить за временной эволюцией возмущений при различных параметрах задачи. В качестве инте-



Фиг. 1. Границы устойчивости равновесия относительно 1 – монотонных, 2 – колебательных возмущений

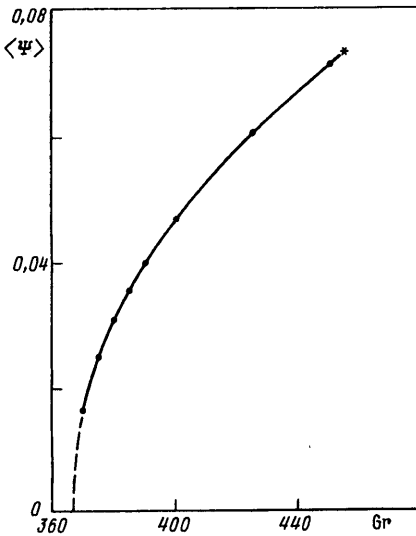


Фиг. 2. Временная эволюция среднего по полости значения функции тока  $\langle \Psi \rangle$  (сплошная линия) и число Нуссельта (штриховая линия) для  $Gr = 470, \tau = 0,3$

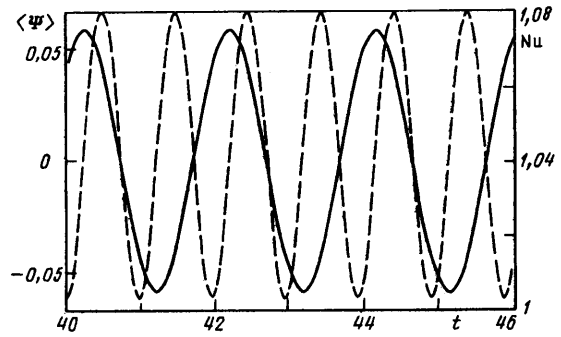
гральных характеристик интенсивности конвективного движения и теплопереноса использовались среднее значение функции тока в полости  $\langle \Psi \rangle$  и число Нуссельта

$$Nu = \oint \left| \frac{\partial T}{\partial n} \right| dl$$

**2. Результаты численного исследования линейной устойчивости равновесия и нелинейных режимов конвекции.** Границы устойчивости равновесия на плоскости параметров число Грасгофа – безразмерное время релаксации показаны на фиг. 1.



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Зависимость среднего по полости значения функции тока  $\langle \Psi \rangle$  от числа Грасгофа  $Gr$  для  $\tau = 0,3$

Фиг. 4. Временная эволюция среднего по полости значения функции тока (сплошная линия) и числа Нуссельта (штриховая линия) для  $Gr = 245$ ,  $\tau = 0,6$

При малых значениях  $\tau$  потеря устойчивости равновесия происходит монотонным образом при тех же значениях числа Грасгофа, что и в случае ньютоновской жидкости (кривая 1). При достижении критического значения  $\tau = \tau_*$  наиболее опасными становятся колебательные возмущения (кривая 2).

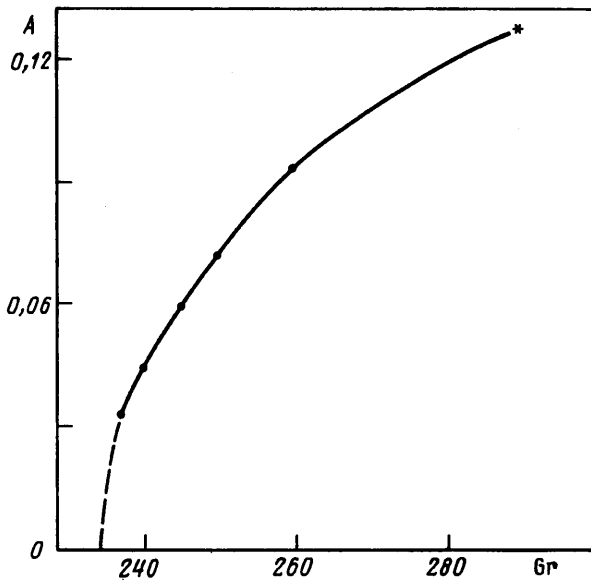
Рассмотрим поведение жидкости при  $\tau < \tau_*$ . Как показали расчеты, при значениях параметра  $Gr$ , меньших критического  $Gr_1$ , любые начальные возмущения, внесенные в систему, затухают, приводя к равновесию. При  $Gr > Gr_1$  возмущения нарастают, в жидкости устанавливаются стационарные конечного-амплитудные движения, обладающие инверсионной симметрией.

Дальнейший рост  $Gr$  приводит к потере устойчивости стационарного движения. При  $Gr > Gr_2$  в результате переходного процесса устанавливаются стационарные колебания с малой амплитудой и ненулевым средним. На основании численных данных можно заключить, что при  $Gr = Gr_2$  имеет место прямая бифуркация Хопфа. На фиг. 2 показана временная эволюция среднего по полости значения функции тока и теплопотока. Видно, что периоды колебаний  $\langle \Psi \rangle$  и  $Nu$  совпадают, однако имеется сдвиг фаз.

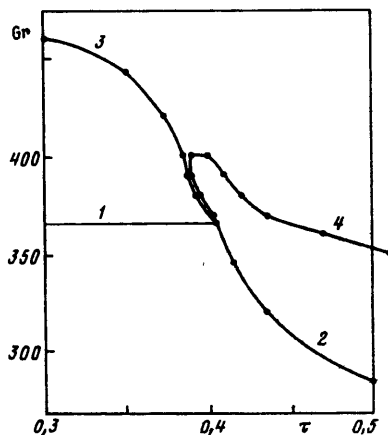
При дальнейшем возрастании числа  $Gr$  стационарные колебания становятся модулированными (рождение инвариантного устойчивого тора), а затем сменяются непериодическими движениями (разрушение тора).

На фиг. 3 представлена зависимость  $\langle \Psi \rangle$  ( $Gr$ ). Штриховой линией показана экстраполяция этой кривой на нулевое значение  $\langle \Psi \rangle$ , позволяющая определить критическое значение  $Gr_1$ , выше которого равновесие неустойчиво. Концевая точка кривой, отмеченная звездочкой, соответствует возникновению стационарных колебаний.

Обсудим поведение системы при  $\tau > \tau_*$ . При значениях  $Gr$  меньших некоторого критического  $Gr_k$ , равновесие устойчиво. При  $Gr > Gr_{k1}$  в результате переходного процесса устанавливаются периодические колебания с нулевым средним (фиг. 4). Период колебаний функции тока в 2 раза больше периода колебаний теплопотока. Интенсивность колебаний увеличивается как при возрастании  $Gr$ , так и при увеличении



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 5. Зависимость амплитуды колебаний функции тока  $A$  от числа Грасгофа  $G^*$  для  $\tau = 0,6$

Фиг. 6. Бифуркационные кривые на плоскости параметров безразмерное время релаксации  $\tau$  – число Грасгофа  $G^*$ . Границы устойчивости равновесия относительно монотонных (1) и колебательных (2) возмущений, границы устойчивости стационарных движений (3) и стационарных колебаний с нулевым средним (4)

времени релаксации. В качестве интегральной характеристики колебательного режима была выбрана величина  $A$ , равная амплитуде колебаний  $\langle \Psi \rangle$ . На фиг. 5 показана зависимость  $A$  ( $G^*$ ). Штриховая линия экстраполирует кривую на нулевое значение  $A$ , соответствующее числу Грасгофа  $G^*_{к1}$ , при котором происходит потеря устойчивости равновесия.

При дальнейшем возрастании  $G^*$  стационарные периодические колебания с нулевым средним переходят в стационарные периодические колебания с ненулевым средним. При еще больших числах Грасгофа стационарные колебания с ненулевым средним становятся модулированными, а затем сменяются неперiodическими движениями.

На фиг. 6 приведены бифуркационные кривые на плоскости параметров  $\tau$ ,  $G^*$ . Кривые 1 и 2 представляют собой границы монотонной и колебательной неустойчивости равновесия. Кривая 3 – граница неустойчивости стационарных движений и возникновения стационарных колебаний с малой амплитудой и ненулевым средним. Кривая 4 представляет границу неустойчивости стационарных колебаний с нулевым средним. Таким образом, равновесие устойчиво в области значений параметров, лежащих ниже кривых 1 и 2. В области, ограниченной кривыми 1 и 3, устойчивы стационарные конечно-амплитудные движения, в области, ограниченной кривыми 2 и 4, устойчивы стационарные колебания с нулевым средним.

При малых  $\tau$  форма линий тока, изотерм и компонент тензора напряжений для случая упруговязкой жидкости качественно подобны наблюдающимся для ньютоновской жидкости. При увеличении параметра релаксации происходит значительное деформирование полей.

**Заключение.** Определены границы механического равновесия упруговязкой жидкости в замкнутой полости, подогреваемой снизу, относительно монотонных и коле-

бательных возмущений. Найдены критические значения параметров, при которых наиболее опасными становятся колебательные возмущения.

Исследованы надкритические режимы конвекции. Обнаружено, что для значений параметров в области, где наиболее опасными являются монотонные возмущения, переход  $G\Gamma$  через критическое значение приводит к появлению стационарных движений, затем происходит последовательная смена следующих типов движений: периодические колебания с ненулевым средним, модулированные колебания и непериодические движения. В области значений параметров, где наиболее опасными являются колебательные возмущения, при  $G\Gamma > G\Gamma_c$  устанавливаются стационарные периодические движения с нулевым средним. При дальнейшем росте числа Грасгофа возникают стационарные периодические колебания с ненулевым средним, затем модулированные колебания, которые в свою очередь сменяются непериодическими.

Представленная работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы финансирования ведущих научных школ (№ 96-15-96084).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Любимова Т.П. О конвективных движениях неньютоновской жидкости в замкнутой полости подогреваемой снизу // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 2. С. 181–184.
2. Vest C.M., Arraci V.S. Overstability of a viscoelastic fluid layer heated from below // J. Fluid Mech. 1969. V. 36. Pt 3. P. 613–623.
3. Takashima M. Thermal instability in a viscoelastic fluid layer.I. // J. Phys. Soc. Japan. 1972. V. 33. № 2. P. 511–518.
4. Артюшков Л.С. Динамика неньютоновских жидкостей. СПб.: Изд. центр СПб. мор. техн. ун-та. 1997. 459 с.
5. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.

Пермь

Поступила в редакцию  
13.VII.1999