

УДК 532.5.013.4:539.4

© 2000 г. Б.Н. КЛОЧКОВ, Е.А. КУЗНЕЦОВА

## НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЖИМЫ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ УПРУГОЙ ТРУБКИ С ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ В НЕЙ

Проведен линейный и нелинейный анализ распределенных колебаний упругой трубки с текущей по ней жидкостью. Найден критическая скорость потока, длина волны и частота колебаний при возникновении неустойчивости в системе трубка – поток. Рассмотрены геометрическая и физическая, связанная с увеличением модуля Юнга материала стенки трубки с ростом деформации, нелинейности. Показано, что возможны четыре характерных режима изменения формы трубки: локальное расширение, схлопывание, изгиб и распределенные автоколебания. Проведен численный анализ колебаний трубки в неосесимметричном случае. Рассмотрены условия существования данных эффектов в кровеносных сосудах.

В экспериментах на моделирующих кровеносные сосуды мягких упругих трубках, через которые прокачивалась жидкость, при превышении скоростью потока некоторого критического значения наблюдались осцилляции трубки [1–3], в последующих работах [4, 5] рассматривались волновые особенности данных эффектов. Высокочастотные колебания имеют место в дыхательных путях [6, 7], с ними связывают возникновение хриплых звуков, зачастую имеющих место при ускоренном дыхании или при некоторых заболеваниях [8, 9]. В экспериментах существуют, как правило, два различных режима колебаний трубки. Первый режим, флаттер, представляет собой высокочастотные вибрации стенки трубки относительно малой амплитуды, в то время как второй режим, квазистатический, называемый еще волновой дивергенцией, характеризуется значительно меньшими частотами колебаний и относительно большими отклонениями стенки от равновесия [10, 11]. Оба описанных режима вполне аналогичны процессам при обтекании упругих пластинок потоками жидкости или газа. При этом флаттер, связанный с динамической неустойчивостью, наблюдается на пластинах с малыми потерями в материале пластины и характеризуется фазовыми скоростями волн  $V_p \approx (0,3-0,4)U$  ( $U$  – скорость постоянного потока), а дивергенция возникает в результате квазистатической потери устойчивости на пластинах с достаточно большими потерями и характеризуется фазовыми скоростями волн  $V_p \approx 0,01U$  [11, 12].

Существуют два подхода к описанию самовозбуждающихся осцилляций в упругих трубках. В первом в качестве характеристики течения выбирается средний расход, а геометрия трубки задается, например, площадью поперечного сечения в наиболее узкой ее части. Упругие свойства материала стенки характеризуются однозначной зависимостью объема сегмента трубки или площади поперечного сечения в некоторой точке от трансмурального давления (разности между давлениями внутри трубки и снаружи) [2]. В качестве основных уравнений используются уравнения неразрывности и Навье–Стокса в интегральной форме. При этом переменные зависят только от времени. Подобные модели предсказывают самовозбуждающиеся колебания при определенных условиях, однако они не учитывают распространение волн в трубке, поэтому не могут адекватно описывать наблюдающиеся в эксперименте распределенные колебания. Другой подход состоит в построении распределенной модели,

учитывающей баланс сил инерции и сил, действующих со стороны жидкости и в стенке трубки, для каждого достаточно малого элемента трубки [9, 10]. Согласно ему осцилляции возникают при превышении усредненной по поперечному сечению скоростью потока некоторого критического значения. Помимо определения критической скорости распределенная модель способна также определить характерную длину волны осцилляций. Фактически целью большинства предыдущих работ являлось нахождение критической скорости, характерных длины волны и частоты колебаний, т.е. линейный анализ модели. Аналогичный анализ для вязкоупругих пластин был проведен в [13, 14]. Существуют также работы, посвященные анализу нелинейной стадии развития неустойчивости, ведущей к флаттеру [15, 16]. В [16] учет члена третьей степени геометрической нелинейности пластины приводит к ограничению роста радиуса и выходу амплитуды его колебаний на постоянное значение.

Возникновение колебаний рассматривается по отношению к мягким трубкам, способным схлопываться при трансмуральном давлении, близком к нулю. Вены и некоторые участки дыхательных путей являются примерами подобных трубок, в то время как артерии являются более жесткими и подвержены схлопыванию в меньшей степени.

В настоящей работе исследуется устойчивость на основе распределенной модели упругой трубки, подобной артерии или вене, неограниченной длины с потоком в ней несжимаемой жидкости. Модель учитывает не только осесимметричные, но и неосесимметричные деформации трубки. Цель – нахождение критической скорости, при которой развивается неустойчивость, характерных частот и длин волн, а также анализ нелинейной стадии развития неустойчивости с учетом нелинейных упругих деформаций. При этом модуль Юнга материала стенки трубки растет с ростом окружающей деформации в кровеносных сосудах и дыхательных путях.

1. В качестве уравнений движения стенки трубки выберем уравнения тонкостенной оболочки [11]. Материал стенки считаем несжимаемым. Пренебрегаем продольными и угловыми смещениями элемента оболочки по сравнению с радиальными. Линеаризованное уравнение движения элемента стенки с учетом неосесимметричных деформаций имеет вид

$$\frac{Eh^3}{9} \left( \frac{\partial^4 R}{\partial x^4} + \frac{2}{R_0^2} \frac{\partial^4 R}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R_0^4} \frac{\partial^4 R}{\partial \theta^4} \right) + \frac{4Eh}{3} \frac{R - R_0}{R_0^2} + 2\lambda_w \frac{\partial R}{\partial t} - S \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{T}{R_0^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2} =$$

$$= p - p_0 - \rho h \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

Здесь  $t$  – время;  $x$  – продольная,  $\theta$  – азимутальная координаты;  $E$  – модуль упругости материала стенки;  $S$  – продольное,  $T$  – окружное постоянные натяжения;  $h$  – толщина стенки;  $R$  – текущий,  $R_0$  – недеформированный радиусы;  $p$  – текущее,  $p_0$  – постоянное во времени внутреннее давления;  $\rho$  – плотность материала стенки;  $\lambda_w$  – затухание в материале стенки.

Выражение для разности давлений  $p - p_0$  следует из анализа гидродинамических уравнений [9, 11]. Считая жидкость несжимаемой, а скорость жидкости  $\mathbf{V} = \nabla\phi + \mathbf{U}$ , где  $\phi$  – потенциал скоростей,  $\mathbf{U}$  – постоянная, усредненная по сечению составляющая скорости, имеем уравнение для потенциала скоростей  $\Delta\phi = 0$ . Используем граничное условие на внутренней поверхности стенка–жидкость

$$V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}(R) = \frac{\partial R}{\partial t} + U \frac{\partial R}{\partial x} \quad (1.2)$$

а также линеаризованную связь разности давлений  $p - p_0$  и потенциала скоростей  $\phi$

$$p - p_0|_{r=R} = -\rho_0 \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + U \frac{\partial\phi}{\partial x} + 2\lambda_{,r}\phi \right) \Big|_{r=R} \quad (1.3)$$

которая представляет собой нестационарное уравнение с вязкими потерями, моделируемые при помощи линейного фактора потерь Дарси  $\lambda_f$  [9, 10, 16],  $\rho_0$  – плотность жидкости. Учет вязкости жидкости с помощью фактора потерь Дарси приводит к тому же дисперсионному уравнению для малых отклонений стенки трубки от состояния равновесия, что и использование уравнения Орра–Зоммерфельда и граничных условий для функции тока малых возмущений скорости в случае плоского основного течения и малой вязкости жидкости [16]. Это дает основание использовать уравнение (1.3) в рассматриваемом случае.

Решая уравнение Лапласа для  $\Phi \sim \exp(-i(kx + n\theta))$  с граничным условием (1.2) и подставляя решение в (1.3), получим

$$p - p_0|_{r=R} = -\rho_0 R_0 \Phi \left( \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 R}{\partial t \partial x} + U^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right) - 2\lambda_f \rho_0 R_0 \Phi \left( \frac{\partial R}{\partial t} + U \frac{\partial R}{\partial x} \right) \quad (1.4)$$

$$\Phi = \frac{2I_n(kR_0)}{kR_0(I_{n-1}(kR_0) + I_{n+1}(kR_0))}$$

где  $I_n$  – модифицированные функции Бесселя.

Введем безразмерные параметры

$$\delta = \frac{h^2}{12R_0^2}, \quad U^o = \frac{U}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{4E}{3\rho}}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_0 R_0}{\rho h} \Phi$$

$$\gamma = \frac{3T}{4Eh}, \quad \beta = \frac{3S}{4Eh}, \quad d = \frac{\lambda_w R_0}{c\rho h}, \quad \kappa = \frac{\lambda_f R_0}{c}$$

Из (1.1), (1.4), считая  $R - R_0 \sim \exp(i(\Omega t - kx - n\theta))$ , получим дисперсионное уравнение для малых неосесимметричных отклонений от стационарного состояния  $R = R_0$ ,  $p = p_0$ , связывающее безразмерную частоту  $\zeta = \Omega R_0/c$  и безразмерное волновое число  $\alpha = kR_0$

$$\zeta(\alpha) = \frac{\varepsilon U^o \alpha}{1 + \varepsilon} \left( 1 \pm \frac{d - \kappa}{\Delta(1 + \varepsilon)} \right) + i \left( \frac{d + \varepsilon \kappa}{1 + \varepsilon} \pm \Delta \right) \quad (1.5)$$

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left( \left( N - \frac{(d + \varepsilon \kappa)^2}{(1 + \varepsilon)^2} \right)^2 + \frac{4((d - \kappa)\varepsilon U^o \alpha)^2}{(1 + \varepsilon)^4} \right)^{1/2} + \frac{(d + \varepsilon \kappa)^2}{(1 + \varepsilon)^2} - N \right)^{1/2}$$

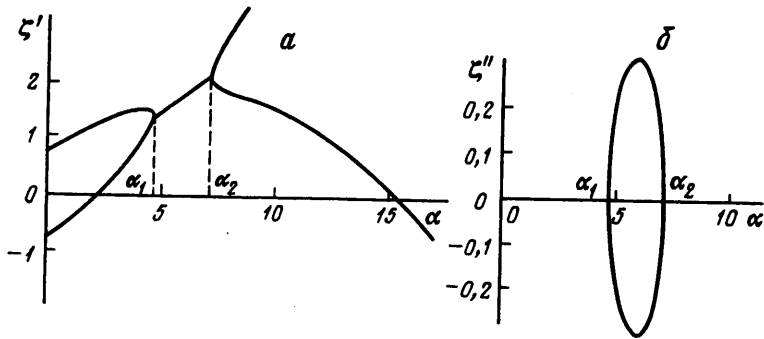
$$N = -\frac{\varepsilon(U^o \alpha)^2}{(1 + \varepsilon)^2} + \frac{1 + \delta(n^2 + \alpha^2)^2 + \gamma n^2 + \alpha^2 \beta}{1 + \varepsilon}$$

При отсутствии диссипации ( $d = 0$ ,  $\kappa = 0$ ) имеем

$$\zeta(\alpha) = \frac{\varepsilon U^o \alpha}{1 + \varepsilon} \pm \sqrt{N} \quad (1.6)$$

При  $N < 0$  возникает вызванная потоком неустойчивость, которая имеет место в некотором диапазоне волновых чисел  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$  при  $U > U_*$ , где критическая скорость потока равна

$$U_* = c \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} (\beta + 2\delta n^2 + 2\sqrt{\delta(1 + \gamma n^2 + \delta n^4)})}$$



Фиг. 1. Действительная (а) и мнимая (б) части комплексной частоты в бездиссипативном случае для  $U^0 = 0,6$ ;  $\delta = 0,001$ ;  $\gamma = 0,1$ ;  $\beta = 0,1$ ;  $\varepsilon = 1$ ;  $n = 1$

Величина  $U_*$  монотонно растет с ростом безразмерного продольного натяжения  $\beta$ , модуля Юнга  $E$  и номера  $n$  угловой моды. При  $U = U_*$  ( $N = 0$ ) имеем

$$\alpha_* = \left( \frac{1 + \gamma n^2 + \delta n^4}{\delta} \right)^{1/4}, \quad \zeta_* = \frac{\varepsilon U^0 \alpha_*}{1 + \varepsilon}$$

На фиг. 1 представлены дисперсионные кривые  $\zeta(\alpha) = \zeta'(\alpha) + i\zeta''(\alpha)$  для случая  $d = 0$ ,  $\kappa = 0$ . Если затухание в материале стенки значительно превышает затухание, связанное с вязкостью жидкости, т.е.  $d/\kappa \gg 1$ , то область неустойчивости для нижней ветви при этом расширяется. Как видно из (1.5), граница неустойчивой области  $\zeta''(\alpha) = 0$  в случае  $d/\kappa \gg 1$  соответствует условию  $\zeta'(\alpha) = 0$ , т.е. при достижении скоростью потока критической скорости  $U_*$  комплексная частота обращается в ноль (статический режим). При небольшом превышении скорости потока над порогом образуется медленная бегущая волна.

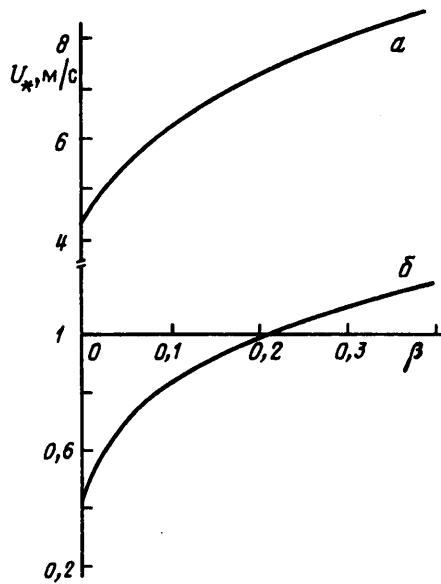
В случае, когда затухания в материале стенки и в жидкости близки, т.е.  $\kappa \approx d$ , дисперсионная зависимость близка к зависимости (1.6) в бездиссипативном случае

$$\zeta(\alpha) = \frac{\varepsilon U^0 \alpha}{1 + \varepsilon} + i \left( \kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - N} \right)$$

При этом критическая скорость потока и волновое число определяются теми же выражениями, что и в случае  $d = 0$ ,  $\kappa = 0$ , реализуется режим флаттера.

Сделаем некоторые оценки для крупных кровеносных сосудов. Количественные значения параметров равны [17]:  $\rho \approx \rho_0 \approx 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, для крупных артерий  $h/R_0 \sim 0,12-0,18$ ,  $E \sim 5 \cdot 10^5-10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $(1 + \varepsilon)/\varepsilon \approx 1,5$ ; для крупных вен  $h/R_0 \sim 0,02-0,04$ ,  $E \sim 4 \cdot 10^4-10^5$  Н/м<sup>2</sup>,  $(1 + \varepsilon)/\varepsilon \sim 1,2-1,4$ . Величина постоянного продольного натяжения  $S$  определяется как  $S/h = E\Delta L/L$ , где  $\Delta L/L \sim 0,1-0,4$  – относительное изменение длины сосуда при вырезании его из живой ткани, а постоянное окружное натяжение  $T$  – как  $T = p, R_0$ , где трансмуральное давление для крупных артерий  $p_t \approx 1,3 \cdot 10^4$  Н/м<sup>2</sup>, для крупных вен  $p_t \approx 10^3$  Н/м<sup>2</sup>. Безразмерные параметры задачи имеют значения: применительно к артериям  $\delta \sim (1-3) \cdot 10^{-3}$ ,  $\gamma \sim 0,05-0,2$ ,  $\beta \sim 0,1-0,4$ , а к венам  $\delta \sim (3-13) \cdot 10^{-5}$ ,  $\gamma \sim 0,3-0,7$ ,  $\beta \sim 0,1-0,4$ .

На фиг. 2 представлена зависимость  $U_*(\beta)$  при  $d/\kappa \gg 1$  в осесимметричном случае ( $n = 0$ ) для артерий и вен, причем в этом случае  $U_*(\beta)$  не зависит от  $d$ . В нормальных условиях скорость крови даже в самых крупных артериях не превышает 1 м/с, что меньше критической скорости. Однако при некоторых патологиях средняя скорость течения крови в них может достигать



Фиг. 2. Критическая скорость  $U_*$  при  $d \geq \kappa$  для артерий (а) ( $\epsilon = 2$ ;  $\delta = 0,001$ ;  $c = 24$  м/с) и вен (б) ( $\epsilon = 5$ ;  $\delta = 0,00003$ ;  $c = 7,4$  м/с) в осесимметричном случае

4–10 м/с, что уже превышает  $U_*$  при малых  $\beta$  [17]. Максимальная скорость крови в крупных венах составляет 0,1–0,4 м/с, что близко  $U_*$  для вен при малых  $\beta$  даже в нормальных условиях.

Критическая скорость повышается с ростом отношения  $\kappa/d$  и в случае  $\kappa \approx d$  при малых  $\beta$  составляет 5–7 м/с для артерий и 0,5–0,8 м/с для вен. Критическая скорость в артериях может, кроме того, достигаться при заболеваниях, связанных с уменьшением модуля Юнга материала стенки сосуда [9, 17]. Критическое волновое число  $\alpha_*$  для артерий соответствует характерной длине возмущения  $\lambda \approx R_0$ , для вен  $\lambda \approx 0,6R_0$ . Из выражения  $\lambda_f = 4\nu/R_0^2$  [10], где  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости, при  $\nu \sim (4-5) \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с для крупных артерий и вен следует  $\lambda_f \sim 0,4-3,5$  с<sup>-1</sup>. Поскольку  $2\lambda_w/\rho h \sim 0,5-5$  с<sup>-1</sup> [9], то  $d/\kappa = \lambda_w/\lambda_f \rho h \sim 0,1-6$ . Характерная частота колебаний при  $d \approx \kappa$  равна: для артерий  $f \sim 570-1100$  Гц, для вен  $\sim 230-550$  Гц, что соответствует измеряемым в опыте значениям [18].

2. Рассмотрим нелинейную стадию развития неустойчивости. В качестве простейшей модели будем учитывать в (1.1) комбинацию квадратичной  $\sim (R - R_0)^2$  и кубичной  $\sim (R - R_0)^3$  физической нелинейности как следствие зависимости модуля упругости материала стенки трубки от окружной деформации. Подобная зависимость характерна для стенок кровеносных сосудов и дыхательных путей [9, 19]. Исследуем для простоты осесимметричный случай при  $d = 0$ ,  $\kappa = 0$ . Исключив из (1.1) с учетом нелинейных членов разность давлений  $p - p_0$  с помощью (1.3), получим нелинейное уравнение движения элемента стенки в безразмерном виде

$$\delta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + w + A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (1 + \epsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Gw^2 + Fw^3 \quad (2.1)$$

$$w = \frac{R - R_0}{h}, \quad t \rightarrow \frac{ct}{R_0}, \quad x \rightarrow \frac{x}{R_0}, \quad A = \epsilon(U^0)^2 - \beta, \quad C = 2\epsilon U^0$$

где  $G$  и  $F$  – малые параметры нелинейности.

Предполагая, что превышение потоком критической скорости мало, воспользуемся методом медленно меняющихся амплитуд. Представим  $w$  в виде

$$w = u \exp(i(\zeta_0 t - \alpha x)) + \text{к.с.} = u e^{i\psi} + \text{к.с.}$$

где  $u$  – медленно меняющаяся амплитуда,  $\zeta_0$  и  $\alpha$  – действительная часть частоты и волновое число, соответствующие моде с максимальным инкрементом. Для простоты рассматриваются только эффекты самовоздействия, т.е. пренебрегается взаимодействием осесимметричной моды с более высокими модами, которые становятся неустойчивыми при больших по сравнению с осесимметричной модой скоростях. Предполагаем, что  $u = u_0 + u_1 e^{i\psi} + u_2 e^{2i\psi} + \dots$ , причем по сравнению с  $u_0$  все остальные гармоники малы. Из (2.1) получим укороченное уравнение для  $u_0$ . Переходя в систему координат, движущуюся с групповой скоростью  $V_g = \varepsilon U^0 / (1 + \varepsilon)$ , совпадающей с фазовой, и предполагая, что характерный пространственный масштаб  $L$  медленной амплитуды удовлетворяет условию  $L\alpha \gg 1$ , запишем уравнение для  $u_0$  в виде

$$(1 + \varepsilon) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - 4\delta\alpha^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = (1 + \varepsilon)\zeta_1^2 u_0 + \chi |u_0|^2 u_0 \quad (2.2)$$

$$\chi = 3F + 4G^2 \left( 2 + \frac{1}{4\beta\alpha^2 + 1 + 16\delta\alpha^4 - 4\varepsilon(U^0\alpha)^2 / (1 + \varepsilon)} \right)$$

где  $\zeta_1$  – максимальный инкремент. В дальнейшем будем считать  $u_0$  действительным.

Сначала рассмотрим случай  $\chi > 0$ . Пренебрежем малым членом  $\sim \delta\alpha^2 \partial^2 u_0 / \partial x^2$ . При этом решение уравнения (2.2) зависит от  $x$  как от параметра и имеет вид

$$u_0(x, t) = u_0(x, 0) \frac{\exp(\zeta_1 t)}{1 - \exp(2\zeta_1(t - t_0(x)))}$$

$$t_0(x) = \frac{1}{2\zeta_1} \ln \frac{8\zeta_1^2(1 + \varepsilon)}{\chi u_0^2(x, 0)}$$

В предельном случае имеем

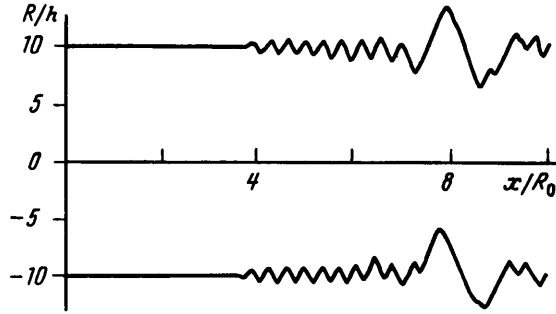
$$\zeta_1(t_0(x) - t) \ll 1, \quad u_0(x, t) = u_0(x, 0) \frac{\exp(\zeta_1 t)}{2\zeta_1(t_0(x) - t)}$$

т.е. амплитуда за конечное время обращается в бесконечность прежде всего в точке минимума  $t_0(x)$ , а значит, в точке максимума начальной амплитуды. Характерная ширина волнового пакета вблизи момента коллапса ведет себя как  $\sim \sqrt{t_m - t}$  (здесь  $t_m$  – минимальное значение  $t_0(x)$ ). Ширина обращается в нуль за конечное время, в результате происходит локальное (в окрестности одной точки) схлопывание или расширение трубки. Можно показать, что на нелинейной стадии отброшенный член  $\sim \partial^2 u_0 / \partial x^2$  не может ограничить нелинейный рост. Рост амплитуды может быть ограничен учетом нелинейных членов более высоких порядков, в частности члена  $\sim |u_0|^4 u_0$ .

В случае  $\chi < 0$  происходит ограничение роста радиуса. Уравнение (2.2) в этом случае имеет устойчивое однородное решение и устойчивое решение в виде стационарной ударной волны

$$u_0 = \pm \zeta_1 \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{|\chi|}}, \quad u_0(x, t) = \pm \zeta_1 \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{|\chi|}} \operatorname{th} \frac{\zeta_1(x - V_0 t)}{\sqrt{2(4\delta\alpha^2 - V_0^2)}}$$

где  $V_0$  – скорость волны.



Фиг. 3. Случай локального изгиба ( $A = 0,8$ ;  $\gamma = 0,05$ ;  
 $C = 1,3$ ;  $\delta = 0,001$ ;  $G = 0,02$ ;  $F = 0,01$ )

Таким образом, возможны три нелинейных режима колебаний трубки в зависимости от коэффициентов перед нелинейными членами: локальное взрывное схлопывание или расширение, а также распределенные колебания ограниченной амплитуды, причем поскольку  $\zeta_1 \sim \sqrt{U^0 - U_*^0}$ , то в данном случае происходит мягкое возбуждение колебаний при превышении скоростью порогового значения.

Оценим величину  $\chi$  для артерий. При скорости  $U = U_*$  и  $\alpha = \alpha_*$

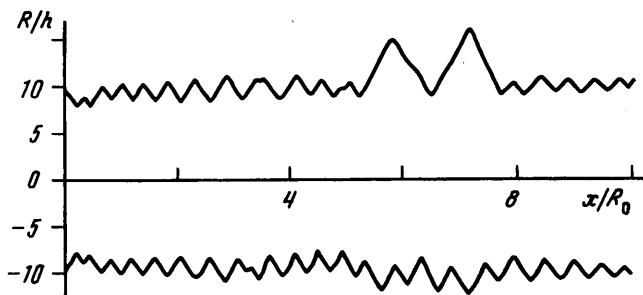
$$\chi = 3F + 4G^2 \left( 2 + \frac{1}{(4\alpha_*^2 \sqrt{\delta} - 1)^2} \right) \approx 3F + 8,4G^2 \quad (2.3)$$

где  $\alpha_* = 6$ ,  $\delta = 0,001$ . Согласно [19],  $F = -0,2$ ,  $G = -0,4$ . После подстановки этих значений в (2.3) получим  $\chi \approx 0,74$ . Таким образом,  $\chi > 0$ ,  $G < 0$ , в этом случае реализуется режим схлопывания трубки. По-видимому, в крупных кровеносных сосудах при превышении скоростью порогового значения реализуется либо режим локального схлопывания, либо колебания с ограниченной амплитудой.

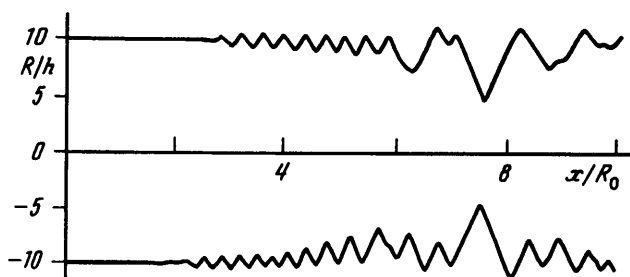
3. Проведем численные расчеты изменения формы трубки на основе исходного неукороченного нелинейного уравнения с учетом рассмотренной выше физической, а также геометрической нелинейности, включающей члены второй и третьей степени, и с учетом неосесимметричных деформаций

$$\begin{aligned} & \delta \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) + w + A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (1 + \varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Gw^2 + Fw^3 + \\ & + \sqrt{3\delta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} w + \frac{\sqrt{3\delta}}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\sqrt{3\delta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} w + \sqrt{3\delta} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + 18\delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ & + 6\delta \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 24\delta \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + 18\delta \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + 6\delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

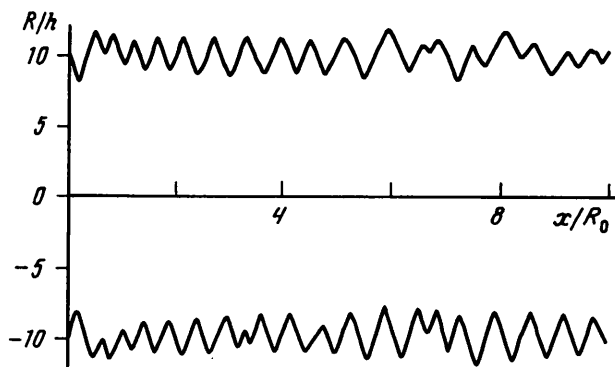
В отличие от (2.1) здесь учтены зависимость от азимутальной координаты  $\theta$  и слагаемые геометрической нелинейности. Скорость потока превышала критическую скорость, при которой становилась неустойчивой изгибная мода ( $n = 1$ ), поэтому режимы, полученные при численном исследовании (3.1), являются неосесимметричными. Наблюдались четыре различных режима изменения формы трубки: локальный изгиб, локальные расширения, схлопывание и колебания ограниченной амплитуды. Случай локального изгиба представлен на фиг. 3. Изгиб образуется из малого неосесимметричного начального условия, амплитуда его растет, и он сносится



Фиг. 4. Случай локального расширения ( $A = 0,8$ ;  $\gamma = 0,05$ ;  $C = 1,3$ ;  $\delta = 0,001$ ;  $G = 0,4$ ;  $F = -0,01$ )



Фиг. 5. Случай локального схлопывания ( $A = 0,8$ ;  $\gamma = 0,05$ ;  $C = 1,3$ ;  $\delta = 0,001$ ;  $G = -0,4$ ;  $F = 0,1$ )



Фиг. 6. Случай распределенных автоколебаний ( $A = 0,8$ ;  $\gamma = 0,05$ ;  $C = 1,3$ ;  $\delta = 0,001$ ;  $G = 0,1$ ;  $F = -0,2$ )

вниз по течению. Данный и последующие графики представлены в безразмерном виде, причем длина трубки считается равной  $L = 10R_0$ .

На фиг. 4 изображена форма трубки в случае неосесимметричного расширения, которое развивается из малого осесимметричного возмущения, расположенного в начальный момент в точке  $L/2$ . Форма трубки в случае неосесимметричного схлопывания приведена на фиг. 5, начальное условие при этом такое же, как в предыдущем случае. Из численного расчета следует, что скорость сноса растущего возмущения в случае изгиба, расширения и схлопывания равна  $V_f \sim (0,4-0,6)$  с, что близко полученной выше групповой скорости  $V_g = \epsilon U / (1 + \epsilon) \sim (0,2-0,5)$  с (для артерий). Изгиб,



расширение и схлопывание соответствуют случаю  $\chi > 0$ . Случай  $\chi < 0$  представлен на фиг. 6, при этом гофрировка расплзается по всей длине трубки, оставаясь ограниченной по амплитуде.

**Заключение.** Рассмотренная распределенная модель упругой трубки, учитывающая как осесимметричные, так и неосесимметричные деформации, позволяет определить критическую скорость, при которой становится неустойчивой та или иная угловая мода, а также критическую длину волны и частоту растущих колебаний. Проведенные для крупных кровеносных сосудов оценки показывают возможность возникновения в них неустойчивости как в виде квазистатического режима, так и в виде флаттера. Последний режим, по-видимому, реализуется при заболеваниях, характеризующихся значительно большей, чем в обычных условиях, скоростью течения крови либо меньшей упругостью сосуда.

Проведенный для бездиссипативного осесимметричного случая анализ нелинейной стадии развития неустойчивости показывает возможность существования трех основных режимов колебаний трубки: локальных расширения, схлопывания и распределенных автоколебаний. В кровеносных сосудах, по-видимому, реализуются два последних режима. Результаты численного анализа согласуются с выводами нелинейного аналитического анализа. Поскольку в численных расчетах рассматривается неосесимметричный случай, то реализуется дополнительный режим локального изгиба.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-02-18612).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Conrad W.A.* Pressure-flow relationships in collapsible tubes // *IEEE Trans. Biomed. Engng.* 1969. V. 16. № 4. P. 284–295.
2. *Катц А.И., Чен Ю., Морено А.Г.* Течение в мягкой трубке (экспериментальное исследование и математическая модель) // *Гидродинамика кровообращения / Под ред. С.А. Регирера.* М.: Мир, 1971. С. 111–130.
3. *Ur A., Gordon M.* Origin of Korotkoff sounds // *Amer. J. Physiol.* 1970. V. 218. № 2. P. 524–529.
4. *Griffiths D.J.* Oscillations in the outflow from a collapsible tube // *Med. Biol. Engng. and Comput.* 1977. V. 15. № 4. P. 357–362.
5. *Brower R.W., Scholten C.* Experimental evidence on the mechanism for the instability of flow in collapsible vessels // *Med. Biol. Engng.* 1975. V. 13. № 6. P. 839–845.
6. *Gavriely N., Palti Y., Alroy G., Grotberg J.B.* Measurements and theory of wheezing breath sounds // *J. Appl. Physiol.* 1984. V. 57. № 2. P. 481–492.
7. *Gavriely N., Grotberg J.B.* Flow limitation and wheezes in a constant flow and volume lung preparation // *J. Appl. Physiol.* 1988. V. 64. № 1. P. 17–20.
8. *Gavriely N., Shee T.R., Cugell D.W., Grotberg J.B.* Flutter in flow-limited collapsible tubes: a mechanism for generation of wheezes // *J. Appl. Physiol.* 1989. V. 66. № 5. P. 2251–2261.
9. *Grotberg J.B., Gavriely N.* Flutter in collapsible tubes: a theoretical model of wheezes // *J. Appl. Physiol.* 1989. V. 66. № 5. P. 2262–2273.
10. *Cancelli C., Pedley T.J.* A separated-flow model for collapsible-tube oscillations // *J. Fluid. Mech.* 1985. V. 157. P. 375–404.
11. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320 с.
12. *Gad-el-Hak M.* Boundary layer interactions with compliant coatings: An overview // *Appl. Mech. Rev.* 1986. V. 39. № 4. P. 511–523.
13. *Carpenter P.W., Garrad A.D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Pt 1. Tollmien-Schlichting instabilities // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 155. P. 465–510.
14. *Carpenter P.W., Garrad A.D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Pt 2. Flow-induced surface instabilities // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 170. P. 199–232.

15. *Groberg J.B., Reiss E.L.* Subsonic flapping flutter // *J. Sound Vibrat.* 1984. V. 92. № 3. P. 349–361.
16. *Groberg J.B., Shee T.R.* Compressible-flow channel flutter // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 159. P. 175–193.
17. *Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У.* Механика кровообращения. М.: Мир, 1981. 642 с.
18. *Чичагов П.К.* Экспериментальное исследование механических колебаний в венозном русле // *Механика композит. материалов.* 1979. № 4. С. 733–735.
19. *Кудряшов А.В., Розенблюм Л.А., Хурлапова Т.В., Яхно В.Г.* Анализ колебательных режимов сосудистой стенки // *Механика композит. материалов.* 1979. № 6. С. 1067–1075.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию  
20.I.1999

E-mail: klochkov @ appl.sci-nnov.ru.