

УДК 532.5.011.11:532.582.31

© 2000 г. О.М. КИСЕЛЕВ, С.И. ФИЛИППОВ

О ДВИЖЕНИИ ЦИЛИНДРА ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ФРУДА

Усовершенствован метод решения задачи о движении цилиндра заданной формы под свободной поверхностью бесконечно глубокой весомой жидкости при больших числах Фруда. Исследовано движение кругового цилиндра при малых отстояниях его от свободной поверхности. Приведены решения задачи для цилиндров с некруговыми профилями поперечного сечения.

Задача об обтекании тела потоком весомой жидкости со свободной поверхностью уже многие десятилетия привлекает к себе внимание ученых. Результаты, полученные при ее решении, в значительной мере отражены в обзорных работах [1–5].

Несмотря на существенный прогресс в развитии численных методов, задача об установившемся движении тела под свободной поверхностью весомой жидкости до настоящего времени решается, как правило, в приближенной постановке. При этом широкое распространение получили различные варианты численной реализации первого и второго приближений теории волн малой амплитуды (см., например, [6–8]).

Работа [9] стала отправной точкой исследований, основанных на линеаризации другого рода. В ней, как и в последующих работах [10–12], используется предположение о близости рассматриваемого течения к течению около заданного тела при наличии сверху плоской горизонтальной стенки (при числе Фруда $Fr = 0$), потенциал скорости ϕ_0 такого течения считается известным. Как и теория волн малой амплитуды, метод [9] основан на сносе граничных условий со свободной поверхности на невозмущенный уровень жидкости. Но если в теории волн малой амплитуды граничные условия получаются с помощью разложений потенциала скорости ϕ и возвышения свободной поверхности η в ряды по малому параметру, то в методе [9] функция $\phi_1 = \phi - \phi_0$ и ее производные раскладываются в ряды Тейлора по степеням η ; используются только линейные или линейные и квадратичные члены этих разложений.

Существуют отдельные попытки модернизировать подход [9] для получения решения задачи в точной нелинейной постановке (см. [12]). Однако эти попытки связаны с очень большими трудностями, которые возрастают с ростом числа Фруда [12].

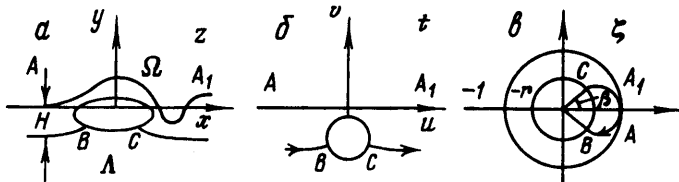
Таким образом, все обычно применяющиеся методы решения задачи связаны с переносом граничных условий на невозмущенный уровень жидкости и непригодны для исследования течений при больших числах Фруда, когда деформация свободной поверхности может быть весьма значительной.

В [13] был предложен новый подход к решению задачи о поступательном движении цилиндра заданной формы под свободной поверхностью бесконечно глубокой весомой жидкости. В нем процедура сноса граничных условий отсутствует, а используется аппроксимация граничного условия, основанная на допущении о том, что модуль скорости на свободной поверхности близок к своему значению в невозмущенном потоке. Это позволяет получать решения, переходящие в точные при $Fr \rightarrow \infty$, и делает метод привлекательным для исследования течений при больших числах Фруда. Однако использовавшиеся в [13] операции над медленно сходящимися рядами существ-

венно снижали эффективность метода, ограничивая область его применимости профилями, близкими к кругу и достаточно удаленными от его поверхности.

Ниже предлагается усовершенствованный вариант метода [13], свободный от указанных недостатков. Он применяется к исследованию обтекания кругового цилиндра при малых отстояниях его от свободной поверхности и больших числах Фруда. Приводятся решения задачи для цилиндров с различными профилями сечения.

1. Постановка задачи. Пусть плоский стационарный потенциальный поток весомой жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью Ω обтекает гладкий замкнутый контур Λ в плоскости $z = x + iy$ (фиг. 1, *a*). Ось y направлена вертикально вверх, ось x – вдоль невозмущенного уровня жидкости в направлении ее движения.



Фиг. 1. Область, занятая течением в плоскости z (*a*), и вспомогательные области в плоскостях t , ζ (*б*, *в*)

Будем считать, что критические точки потока лежат на контуре Λ , и обозначим через H расстояние от разветвляющейся на Λ линии тока до свободной поверхности при $x = -\infty$. Пусть α – угол между касательной к Λ и осью x , L – длина контура Λ , s – безразмерная (отнесенная к L) дуговая абсцисса контура, возрастающая при движении по Λ против часовой стрелки. Форму контура Λ определим с помощью соотношений

$$\alpha = 2\pi s + G(s), \quad L/H = l_0; \quad G(s+1) = G(s) \quad (1.1)$$

где $G(s)$ – заданная функция, l_0 – заданная постоянная.

Пусть V – модуль скорости, V_0 – значение V в невозмущенном потоке, g – ускорение силы тяжести, Γ – циркуляция скорости по контуру Λ . Будем считать, что

$$\gamma = \Gamma/2\pi V_0 H = \gamma_0, \quad Fr = V_0^2 / gH = f_0 \quad (1.2)$$

где Fr – число Фруда, γ_0, f_0 – заданные постоянные.

Интеграл Бернулли для свободной поверхности Ω можно записать в виде

$$\ln V - 1/2 \ln(1 - 2vy) = \ln V_0, \quad v = g / V_0^2, \quad z \in \Omega \quad (1.3)$$

Предположим, что на свободной поверхности V близко к V_0 ($|vy|$ мало), и заменим (1.3) на приближенное соотношение

$$\ln V + vy = \ln V_0, \quad z \in \Omega \quad (1.4)$$

Условие (1.4) можно рассматривать как интеграл Бернулли для свободной поверхности при движении жидкости в поле массовых сил, плотность которых имеет составляющие $F_x = 0$, $F_y = -g \exp(-2vy)$ вместо $F_x = 0$, $F_y = -g$ для обычного гравитационного поля [13].

Пусть p – давление в жидкости, p_0 – давление газа над свободной поверхностью, ρ – плотность жидкости, C_p – коэффициент давления. Нетрудно убедиться, что для обычного гравитационного поля при выполнении (1.4)

$$C_p = \frac{2(p - p_0)}{\rho V_0^2} = C_p(vy) = 1 - \exp(-2vy) - 2vy, \quad z \in \Omega \quad (1.5)$$

$$C_p|_{\Omega} = O(\eta^2), \quad \eta = vy|_{\Omega}, \quad \eta \rightarrow 0$$

В плоскости $t = u + iv$ области G_z , занятой течением, поставим в соответствие область G_t – нижнюю полуплоскость с удаленным из нее кругом

$$|t - t_0| < 2r/(1 - r^2), \quad t_0 = -i(1 + r^2)/(1 - r^2) \quad (1.6)$$

где r – некоторая постоянная из интервала $(0, 1)$. Пусть при этом бесконечно удаленные точки обеих областей соответствуют друг другу. Контуру Λ в плоскости t отвечает окружность Λ_r , описываемая уравнением

$$t = t_0 + \frac{2r}{1 - r^2} e^{i\omega}, \quad \text{Im } \omega = 0 \quad (1.7)$$

а свободной поверхности Ω – прямая $\Omega_t = \{-\infty < u < \infty, v = 0\}$ (фиг. 1, б).

Потребуем, чтобы функция $z(t)$, конформно отображающая G_t на G_z , удовлетворяла условиям

$$\text{Im } z(t) \rightarrow 0, \quad v = 0, \quad u \rightarrow -\infty \quad (1.8)$$

$$\frac{dw}{dt} \rightarrow K, \quad u \rightarrow -\infty \quad \text{или} \quad v \rightarrow -\infty \quad (1.9)$$

$$\text{Re} \left(\ln \frac{dz}{dt} + ivz \right) = \ln \left| \frac{dw}{dt} \right| - \ln V_0, \quad t \in \Omega_t \quad (1.10)$$

Здесь K – положительная постоянная, имеющая размерность длины, w – комплексный потенциал. Условия (1.8), (1.9) отражают характер затухания возмущений, условие (1.10) эквивалентно (1.4).

Таким образом, задача сводится к отысканию комплексного потенциала $w(t)$ и отображающей функции $z(t)$, обеспечивающей выполнение условий (1.1), (1.2), (1.8)–(1.10).

2. Комплексный потенциал $w(t)$. Л.М. Милн-Томсон в [14, с. 177] предлагает читателю доказать, что формулы

$$w = -iVz + 2iVa^2 z \left\{ \frac{1}{z^2 - b^2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n} \left[\prod_{k=0}^{n-1} (b + x_k)^2 (z^2 - x_n^2) \right]^{-1} \right\} \quad (2.1)$$

$$z = x + iy, \quad x_0 = b, \quad x_n = b - \frac{a^2}{b + x_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

определяют комплексный потенциал течения в области z , ограниченной осью y и окружностью $(x - b)^2 + y^2 = a^2$ ($b > a$), когда вектор скорости набегающего потока, равный по модулю V , направлен вдоль оси y .

Выполнив в (2.1) замены $V = KV_0$, $z = it$, $x_n = \xi_{n+1}$ и добавив член, отвечающий за циркуляцию скорости Γ , получим

$$w = KV_0 \left(t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n t}{t^2 + \xi_n^2} - i\delta \ln \frac{t+i}{t-i} \right), \quad \delta = \frac{\Gamma}{2\pi KV_0} \quad (2.2)$$

$$A_1 = 2a^2, \quad A_n = 2a^2 / \prod_{k=1}^{n-1} (b + \xi_k)^2, \quad n = 2, 3, \dots$$

Положив в (2.2) $a = 2r/(1 - r^2)$, $b = (1 + r^2)/(1 - r^2)$, будем иметь

$$\xi_n = \frac{1 + r^{2n}}{1 - r^{2n}}, \quad A_n = \frac{8r^{2n}}{(1 - r^{2n})^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Покажем, что выражения (2.2), (2.3) определяют искомый комплексный потенциал течения $w(t)$. Трудность представляет только доказательство того, что окружность Λ , (1.7) является линией тока.

Конформные отображения

$$t = i(\zeta + 1)/(\zeta - 1), \quad \zeta = (t + i)/(t - i) \quad (2.4)$$

устанавливают соответствие между областью G_t и кольцом $r < |\zeta| < 1$ (фиг. 1, в), при этом окружности Λ_t отвечает окружность $\zeta = re^{i\sigma}$ (σ – центральный угол в плоскости ζ). При $t \in \Lambda_t$ связь между ω и σ определяется формулами

$$\omega = -\frac{\pi}{2} + \sigma + 2 \operatorname{arctg} \frac{r \sin \sigma}{1 - r \cos \sigma}, \quad \sigma = \frac{\pi}{2} + \omega - 2 \operatorname{arctg} \frac{r \cos \omega}{1 - r \sin \omega} \quad (2.5)$$

Используя (2.4), из (2.2), (2.3) элементарными преобразованиями получим

$$g_0 = t|_{\Lambda_t} = -i \frac{1 + re^{i\sigma}}{1 - re^{i\sigma}} = -i \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ik\sigma} \right)$$

$$g_n = \frac{A_n t}{t^2 + \xi_n^2} \Big|_{\Lambda_t} = \frac{2ir^{2n-1} e^{-i\sigma} (1 - r^2 e^{2i\sigma})}{(1 - r^{2n-1} e^{i\sigma})(1 - r^{2n+1} e^{i\sigma})} = 2i \left(\sum_{k=1}^{\infty} r^{(2n-1)k} e^{-ik\sigma} - \sum_{k=1}^{\infty} r^{(2n+1)k} e^{ik\sigma} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n = -i + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{1 - r^{2n}} \sin n\sigma, \quad -i \delta \ln \frac{t+i}{t-i} \Big|_{\Lambda_t} = \delta(\sigma - i \ln r)$$

$$\varphi|_{\Lambda_t} = KV_0 \left(4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{1 - r^{2n}} \sin n\sigma + \delta\sigma \right), \quad \psi|_{\Lambda_t} = -KV_0(1 + \delta \ln r)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \varphi \Big|_{\Lambda_t} = KV_0 \left(4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nr^n}{1 - r^{2n}} \cos n\sigma + \delta \right) \quad (2.6)$$

Здесь φ – потенциал скорости, ψ – функция тока. Поскольку $\psi|_{\Lambda_t}$ не зависит от σ , окружность Λ_t действительно является линией тока.

Когда δ удовлетворяет условию

$$\delta_0^- < \delta < \delta_0^+, \quad \delta_0^- = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nr^n}{1 - r^{2n}}, \quad \delta_0^+ = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} nr^n}{1 - r^{2n}} \quad (2.7)$$

уравнение относительно σ , получаемое приравниванием нулю правой части выражения (2.6), имеет два корня: $\sigma = \beta \in (0, \pi)$ и $\sigma = 2\pi - \beta$. При этом в соответствии с (1.7), (2.5) формулы для определения критических точек t_b и t_c на контуре Λ_t имеют вид

$$t_c = t_0 + \frac{2r}{1 - r^2} e^{i\omega_\beta}, \quad t_b = t_0 - \frac{2r}{1 - r^2} e^{-i\omega_\beta}, \quad \omega_\beta = -\frac{\pi}{2} + \beta + 2 \operatorname{arctg} \frac{r \sin \beta}{1 - r \cos \beta} \quad (2.8)$$

Будем считать, что условие (2.7) выполнено и, следовательно, критические точки потока лежат на контуре Λ . Поскольку

$$H = (\psi|_{\Omega} - \psi|_{\Lambda}) / V_0, \quad \psi|_{\Omega} = 0, \quad \psi|_{\Lambda} = -KV_0(1 + \delta \ln r)$$

то

$$H = K(1 + \delta \ln r) = K(1 - \gamma \ln r)^{-1}, \quad \delta = \frac{\gamma}{1 - \gamma \ln r}, \quad \gamma = \frac{\delta}{1 + \delta \ln r} \quad (2.9)$$

Ниже приведены значения $\delta_0^-, \delta_0^+, 1 + \delta_0^+ \ln r$ для ряда значений r :

r	0,1	0,3	0,5	0,7	0,8
$-\delta_0^-$	0,4979	2,5738	8,8284	35,987	94,625
δ_0^+	0,3346	0,8231	1,4426	2,8037	4,4814
$1 + \delta_0^+ \ln r$	$2,95 \cdot 10^{-1}$	$9,02 \cdot 10^{-3}$	$3,73 \cdot 10^{-5}$	$1,06 \cdot 10^{-10}$	$5,51 \cdot 10^{-16}$

Эти данные подтверждают тот факт, что при условии (2.7) величина $1 + \delta \ln r$ положительна ($1 + \delta_0^+ \ln r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$) и, следовательно, $\psi|_\Lambda < 0$, $H > 0$, δ и γ имеют одинаковые знаки.

3. Отображающая функция $z(t)$ и гидродинамические коэффициенты. Согласно (2.2)

$$\frac{dw}{dt} = KV_0 P(t), \quad P(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\xi_n^2 - t^2}{(t^2 - \xi_n^2)^2} - \frac{2\delta}{1+t^2} \quad (3.1)$$

Подставив (3.1) в (1.10), получим

$$\operatorname{Re} \left(\ln \frac{dz}{dt} + ivz \right) = \ln K + \ln |P(t)|, \quad t \in \Omega, \quad (3.2)$$

В соответствии с (1.8), (1.9), (3.2)

$$\ln \frac{dz}{dt} + ivz = iat + ib + \ln K + \ln F(t) \quad (3.3)$$

$$a = vK = \frac{1}{\operatorname{Fr}} (1 - \gamma \ln r) = \frac{1}{\operatorname{Fr}} (1 + \delta \ln r)^{-1} \quad (3.4)$$

где b – произвольная вещественная постоянная, а $F(t)$ – аналитическая функция, удовлетворяющая условиям

$$0 < |F(t)| < \infty, \quad t \in \bar{G}_r; \quad |F(t)| = |P(t)|, \quad t \in \Omega; \quad F(\infty) = 1 \quad (3.5)$$

Функция $P(t)$ не принадлежит классу функций $F(t)$, поскольку $P(t_b) = P(t_c) = 0$.

Функцию $F(t)$ представим в виде

$$F(t) = P(t)Q(t)R(t), \quad Q(t) = (t - \bar{t}_b)(t - \bar{t}_c)(t - t_0)^2(t - t_b)^{-1}(t - t_c)^{-1}(t - \bar{t}_0)^{-2} \quad (3.6)$$

$$R(t) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t - t_0)^{-n} \right] / \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n(t - \bar{t}_0)^{-n} \right], \quad B_n = b_n + id_n$$

где b_n, d_n – вещественные коэффициенты. Нетрудно убедиться, что при таком представлении все условия (3.5) выполнены.

Решая дифференциальное уравнение (3.3) относительно $z(t)$, с учетом (1.8) найдем

$$vz = at + b - i \ln T(t), \quad \frac{dz}{dt} = KU(t), \quad U(t) = \frac{F(t)}{T(t)} \quad (3.7)$$

$$T(t) = 1 + ia e^{-iat} \int_{-\infty}^t e^{iat} (F(t) - 1) dt$$

Здесь интегрирование ведется от точки с координатами $v = 0, u = -\infty$.

Таким образом, задача (1.1), (1.2), (1.4) сводится к определению параметра r и коэффициентов b_n, d_n (параметры $\xi_n, A_n, t_0, t_b, t_c, \delta, a$, входящие в решение, выражаются через $r, \gamma, \operatorname{Fr}$ по формулам (1.6), (2.3), (2.8), (2.9), (3.4)).

Пусть R_x, R_y – составляющие главного вектора сил давления жидкости на контур Λ (без учета архимедовой силы), L_0 – главный момент названных сил относительно некоторой точки z_0 . Для коэффициентов сопротивления, подъемной силы и момента в соответствии с формулами Чаплыгина – Блазиуса будем иметь

$$C_x - iC_y = \frac{i}{V_0^2 H} \oint \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \frac{dt}{dz} dt \quad (3.8)$$

$$C_L = -\frac{1}{V_0^2 H^2} \operatorname{Re} \oint \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \frac{dt}{dz} (z - z_0) dt \quad (3.9)$$

$$C_x = \frac{2R_x}{\rho V_0^2 H}, \quad C_y = \frac{2P_y}{\rho V_0^2 H}, \quad C_L = \frac{2L_0}{\rho V_0^2 H^2}$$

Здесь интегрирование ведется по контуру Λ_r (1.7), $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Отметим значения функций $P(t), R(t), F(t), T(t), U(t)$ при $t \in \Lambda$, индексом 1. При этом (3.8) приводится к виду

$$C_x - iC_y = -\frac{2r}{1-r^2} (1 - \gamma \ln r) \int_0^{2\pi} \frac{P_1^2(\omega)}{U_1(\omega)} e^{i\omega} d\omega$$

Пусть $z_0 = z_a$, где z_a – точка на контуре Λ , для которой $\omega = \omega_a$. Из (3.7) и (3.9) получим

$$v(z - z_a)|_{\Lambda_r} = Z_a(\omega) = \frac{2ar}{1-r^2} (e^{i\omega} - e^{i\omega_a}) - i \ln \frac{T(\omega)}{T(\omega_a)}$$

$$C_L|_{z_0=z_a} = \operatorname{Fr} \frac{2r}{1-r^2} (1 - \gamma \ln r) \int_0^{2\pi} \frac{P_1^2(\omega)}{U_1(\omega)} Z_a(\omega) e^{i\omega} d\omega$$

Пусть $z_0 = z_d = z_a - (\lambda_x + i\lambda_y)H$, где λ_x, λ_y – заданные вещественные параметры. Тогда, как нетрудно убедиться

$$C_L|_{z_0=z_d} = C_L|_{z_0=z_a} + \lambda_x C_y - \lambda_y C_x$$

4. Алгоритм решения задачи. В соответствии с (3.7) зависимости $\alpha(\omega), s(\omega)$ выражаются формулами

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \omega + \arg U_1(\omega), \quad s = s_0 + \int_0^\omega |U_1(\omega)| d\omega \left[\int_0^{2\pi} |U_1(\omega)| d\omega \right]^{-1} \quad (4.1)$$

$$2\pi s + G(s) = \alpha_0 = \frac{\pi}{2} + \arg U_1(0) \quad (4.2)$$

где $s = s_0$ – корень уравнения (4.2).

Условия $L/H = l_0, \gamma = \gamma_0, \operatorname{Fr} = f_0$ приводят к равенствам

$$\frac{2r}{1-r^2} (1 - \gamma_0 \ln r) \int_0^{2\pi} |U_1(\omega)| d\omega = l_0 \quad (4.3)$$

$$\delta = \gamma_0 (1 - \gamma_0 \ln r)^{-1}, \quad a = f_0^{-1} (1 - \gamma_0 \ln r) \quad (4.4)$$

Положим $B_n = 0$ при $n \geq M$, где M – достаточно большое целое число, и введем обозначения: $\mu = \{r, \{\xi_n, A_n\}, t_0, t_b, t_c, \delta, a\}, \tau = \{b_1, b_2, \dots, b_{M-1}, d_1, d_2, \dots, d_{M-1}\}$. Таким образом, μ – это комплекс параметров, содержащий r и параметры, определяемые через r с помощью соот-

ношений (2.3), (1.6), (2.8), (4.4); τ – вектор, состоящий из коэффициентов b_n, d_n ($1 \leq n \leq M-1$). Учитывая зависимость рассматриваемых функций ω от μ и τ , будем при необходимости использовать для них обозначения $U_1(\omega; \mu, \tau), F_1(\omega; \mu, \tau), T_1(\omega; \mu, \tau)$.

Разделим окружность Λ , на N частей ($N > 2M$) точками t_j и введем в рассмотрение следующий функционал:

$$t_j = t_0 + \frac{2r \exp(i\omega_j)}{1-r^2}, \quad \omega_j = \frac{\pi j}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

$$W = \sum_{j=0}^{N-1} (\alpha_j - 2\pi s_j - G(s_j))^2, \quad \alpha_j = \alpha(\omega_j), \quad s_j = s(\omega_j) \quad (4.5)$$

Для определения μ и τ применим метод итераций. Пусть $\mu^{(k)}, \tau^{(k)}$ – k -е приближение для μ и τ . Положим в (4.3) $F_1(\omega) = F_1(\omega; \mu^{(k)}, \tau^{(k)})$, $T_1(\omega) = T_1(\omega; \mu^{(k)}, \tau^{(k)})$. Полученное соотношение совместно с (2.3), (1.6), (2.8), (4.4) используем для определения $\mu^{(k+1)}$.

Вектор $\tau^{(k+1)}$ найдем из условия $W = \min W$, полагая в (4.1), (4.2) $F_1(\omega) = F_1(\omega; \mu^{(k+1)}, \tau^{(k)})$, $T_1(\omega) = T_1(\omega; \mu^{(k+1)}, \tau^{(k)})$. Для минимизации функционала W (4.5) применим метод сопряженных градиентов, используя следующие выражения:

$$\frac{\partial W}{\partial c_n} = 2 \sum_{j=0}^{N-1} (\alpha_j - 2\pi s_j - G(s_j)) \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial c_n} - 2\pi \frac{\partial s_j}{\partial c_n} - G'(s_j) \frac{\partial s_j}{\partial c_n} \right), \quad c_n = b_n, d_n$$

$$\frac{\partial s_j}{\partial c_n} = \frac{\partial s_0}{\partial c_n} + \left(\int_0^{2\pi} |U_1| d\omega \int_0^{\omega_j} \frac{\partial |U_1|}{\partial c_n} d\omega - \int_0^{2\pi} \frac{\partial |U_1|}{\partial c_n} d\omega \int_0^{\omega_j} |U_1| d\omega \right) \left(\int_0^{2\pi} |U_1| d\omega \right)^{-2}$$

$$\frac{\partial s_0}{\partial c_n} = \frac{\partial \alpha_0}{\partial c_n} (2\pi + G'(s_0))^{-1}, \quad \frac{\partial \alpha_j}{\partial c_n} = \text{Im} \left(\frac{\partial R_1}{\partial c_n} / R_1 \right)$$

$$\frac{\partial |U_1|}{\partial c_n} = |U_1| \text{Re} \left(\frac{\partial R_1}{\partial c_n} / R_1 \right), \quad \frac{\partial R_1}{\partial b_n} = S_1 \left[(t_\omega - t_0)^{-n} - R_1 (t_\omega - \bar{t}_0)^{-n} \right]$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial d_n} = i S_1 \left[(t_\omega - t_0)^{-n} + R_1 (t_\omega - \bar{t}_0)^{-n} \right], \quad S_1 = \left[1 + \sum_{n=1}^{M-1} \bar{B}_n (t_\omega - \bar{t}_0)^{-n} \right]^{-1}$$

$$t_\omega = t_0 + 2r e^{i\omega} / (1-r^2)$$

Последний этап $(k+1)$ -го шага итерационного процесса заключается в нахождении $T(\omega; \mu^{(k+1)}, \tau^{(k+1)})$ в точках $\omega = \omega_j$, при этом определенные трудности представляет вычисление интеграла

$$D(t) = \int_{-\infty}^t e^{iat} (F(t) - 1) dt \quad (4.6)$$

Введем в рассмотрение интегралы

$$J_n(-u) = \int_{-\infty}^{-u} \frac{e^{iat}}{t^n} dt, \quad I_n(u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{iat}}{t^n} dt, \quad u > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Используя известные соотношения [15, 16], нетрудно показать, что

$$J_1(-u) = -E_1(iau) = C + i \frac{\pi}{2} + \ln(au) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (iau)^n}{n \cdot n!}$$

$$I_1(u) = E_1(-iau) = -C + i \frac{\pi}{2} - \ln(au) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iau)^n}{n \cdot n!}$$

H_R	γ_R	Fr_R	νy_d	νy_b	C_{pd}	C_{pb}
0,75	-1,5	10000	0,0003	0,0002	-0,0000	-0,0000
0,75	-1,5	1000	0,0031	0,0023	-0,0000	-0,0000
0,75	-1,5	100	0,0261	0,0235	-0,0001	-0,0001
0,75	-1,5	50	0,0483	0,0468	-0,0045	-0,0042
0,75	-1,5	25	0,0869	0,0926	-0,0142	-0,0161
0,75	-1,5	15	0,1303	0,1527	-0,0312	-0,0422
0,75	-1,5	10	0,1757	0,2286	-0,0551	-0,0902
0,75	-1,5	5	0,2843	0,5027	-0,1349	-0,3713
0,35	1	10000	-0,0002	0,0002	-0,0000	-0,0000
0,35	1	1000	-0,0001	0,0024	-0,0000	-0,0000
0,35	1	100	-0,0004	0,0244	-0,0000	-0,0001
0,35	1	50	0,0059	0,0481	-0,0000	-0,0044
0,35	1	25	0,0251	0,0940	-0,0012	-0,0166
0,35	1	15	0,0549	0,1479	-0,0058	-0,0397
0,35	1	10	0,0969	0,2072	-0,0176	-0,0751
0,35	1	5	0,2345	0,3235	-0,0946	-0,1706

где C – постоянная Эйлера ($C = 0,577215\dots$). Интегрированием по частям получим рекуррентные формулы, позволяющие выразить все $J_n(-u)$, $I_n(u)$ через $J_1(-u)$, $I_1(u)$ соответственно

$$J_{n+1}(-u) = \frac{(-1)^{n+1}}{nu^n} e^{-iau} + \frac{ia}{n} J_n(-u); \quad I_{n+1}(u) = \frac{1}{nu^n} e^{iau} + \frac{ia}{n} I_n(u), \quad n = 1, 2, \dots$$

Найдем коэффициенты σ_k в выражении

$$F(t) - 1 = \sum_{k=1}^5 \sigma_k t^{-k} + O(t^{-6}), \quad t \rightarrow \infty$$

Для вычисления $D(t)$ (4.6) в точке $t = -u_0 < 0$ используем приближенную формулу

$$D(-u_0) = \sum_{k=1}^5 \sigma_k J_k(-u_0) \quad (4.7)$$

Погрешность формулы (4.7) убывает с ростом u_0 и уменьшением a ; при $u_0 \geq 10$, $a < 0,2$ ею вполне можно пренебречь в расчетах (заметим, что большим числам Фруда соответствуют малые значения a).

Зная $D(-u_0)$, численным интегрированием найдем значения $D(t)$ на отрезках $v = 0$, $-u_0 \leq u \leq 0$ и $u = 0$, $-(1-r)/(1+r) \leq v \leq 0$, затем в точках t_j окружности Λ_r . После завершения итерационного процесса для определения формы свободной поверхности на участке $t \in [-u_0, u_1]$ ($u_1 \geq 10$) с помощью численного интегрирования найдем значения $D(t)$ еще и на отрезке $v = 0$, $0 \leq u \leq u_1$.

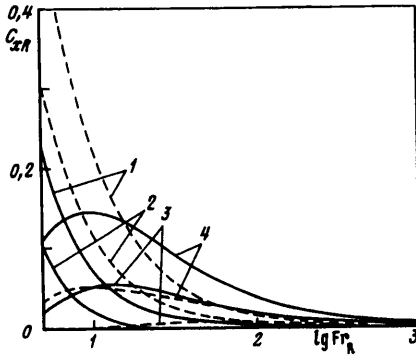
Из (3.7) при $v = 0$, $u \rightarrow \infty$ получается асимптотическое выражение для формы свободной поверхности при $x \rightarrow \infty$

$$\nu(x + iy) = au + b - i \ln(1 + ia e^{-iau} D(+\infty)) \quad (4.8)$$

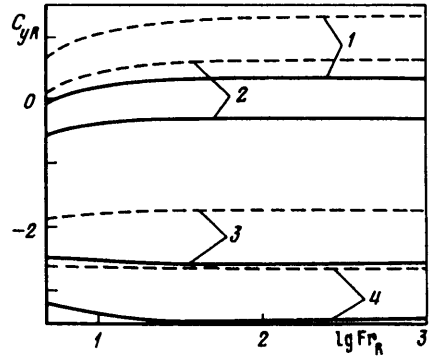
Для определения $D(+\infty)$ можно воспользоваться приближенной формулой

$$D(+\infty) = D(u_1) + \sum_{k=1}^5 \sigma_k I_k(u_1)$$

Выражение (4.8) описывает периодические волны. Пусть λ – длина волны, y_b и y_c – максимальное и минимальное значения y на Ω при $x \rightarrow \infty$, h и κ – высота и крутизна волны



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимость коэффициента сопротивления круглого цилиндра C_{xR} от числа Фруда Fr_R при $\gamma_R = -1,5; -1; 0,5; 1$ (кривые 1–4) и $H_R = 0,35; 0,75$ (сплошные и штриховые кривые)

Фиг. 3. Зависимость коэффициента подъемной силы круглого цилиндра C_{yR} от числа Фруда Fr_R . Обозначения те же, что для фиг. 2

($h = y_b - y_c$, $\kappa = h/\lambda$). Из (4.8) следует, что при аппроксимации (1.4), как и в теории волн малой амплитуды, $v\lambda = 2\pi$. Пусть $a|D(+\infty)| = q < 1$, тогда в соответствии с (4.8)

$$\begin{aligned} v y_b &= -\ln(1-q), \quad v y_c = -\ln(1+q) = -\ln(2 - e^{-v y_b}) \\ \kappa &= (2\pi)^{-1} [v y_b + \ln(2 - e^{-v y_b})] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Таким образом $y_b > 0$, $y_c < 0$, $|y_c| < |y_b|$, причем (см. (1.5)) $|C_p(v y_c)| < |C_p(v y_b)|$. С ростом $v y_b$ значение $v y_c$ монотонно убывает, а куртизна волны κ монотонно растет.

5. Результаты расчетов. В расчетах, которые проводились для цилиндров как кругового, так и некругового сечений, полагалось $N = 100-200$, $M = 20-65$, $u_0 = 10$, $u_1 = 20-100$.

На фиг. 2–6 и в табл. 1 представлены результаты расчетов, полученные при исследовании обтекания кругового цилиндра ($G(s) \equiv 0$). При этом в качестве масштаба длины выбран радиус поперечного сечения цилиндра R и использованы обозначения

$$H_R = \frac{H}{R}, \quad \gamma_R = \frac{\Gamma}{V_0 R}, \quad X = \frac{x}{R}, \quad Y = \frac{y}{R}, \quad Y_0 = \frac{y_0}{R}, \quad Fr_R = Fr H_R$$

$$C_{xR} = C_x H_R, \quad C_{yR} = C_y H_R$$

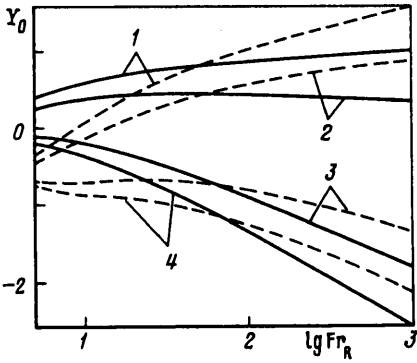
где y_0 – ордината центра круга.

Зависимость C_{xR} , C_{yR} , Y_0 от $\lg Fr_R$ ($5 \leq Fr_R \leq 10^3$) для некоторых значений γ_R и H_R показана на фиг. 2–4.

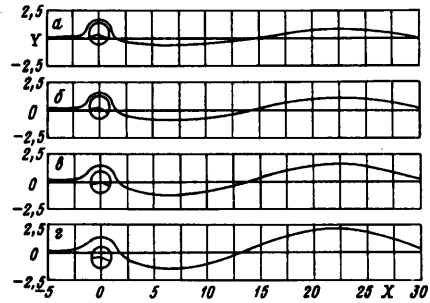
В рассматриваемом диапазоне изменения Fr_R и H_R коэффициент волнового сопротивления C_{xR} (фиг. 2) при $\gamma_R < 0$ монотонно убывает с ростом Fr_R и уменьшением H_R , при $\gamma_R > 0$ зависимость $C_{xR}(Fr_R)$ имеет максимум, значение которого растет с увеличением γ_R и уменьшением H_R .

Коэффициент подъемной силы C_{yR} (фиг. 3) имеет знак, противоположный знаку циркуляции γ_R , его значение возрастает с ростом H_R . С увеличением Fr_R при $Fr_R > 100$ C_{yR} практически не меняется.

Как видно из графиков на фиг. 4, с ростом Fr_R цилиндр неограниченно поднимается над свободной поверхностью при $\gamma_R < 0$ и неограниченно опускается под нее при $\gamma_R > 0$



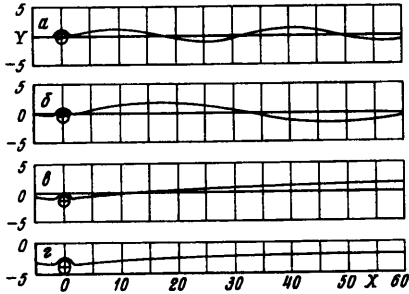
Фиг. 4



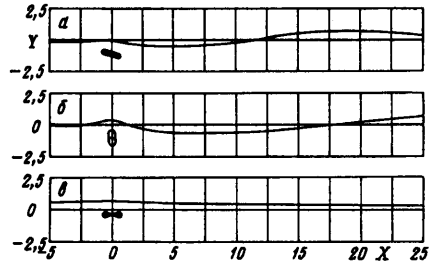
Фиг. 5

Фиг. 4. Зависимость безразмерной ординаты оси круглого цилиндра Y_0 от числа Фруда Fr_R . Обозначения те же, что для фиг. 2

Фиг. 5. Положение кругового контура и вид свободной поверхности при $Fr_R = 5$, $\gamma_R = -1$ для значений $H_R = 0,25; 0,35; 0,5; 0,75$ (варианты а, б, в, г)



Фиг. 6



Фиг. 7

Фиг. 6. Положение кругового контура и вид свободной поверхности при $\gamma_R = 1$, $H = 0,35$, $Fr_R = 5$, 10, 10^2 , 10^4 (варианты а, б, в, г)

Фиг. 7. Вид контура (5.1) и свободной поверхности для значений параметров, указанных в табл. 2

(при больших значениях Fr_R зависимость $Y_0(\lg Fr_R)$ становится практически линейной). Интересно, что характер зависимости $Y_0(H_R)$ для достаточно малых значений Fr_R противоположен тому, какой имеет место для достаточно больших значений Fr_R (переход происходит в некоторой окрестности точки $Fr_R = 100$).

На фиг. 5 и 6 показана форма свободной поверхности и положение кругового цилиндра для различных значений определяющих параметров. Ось y проведена через центр круга, положение точек разветвления и схода потока отмечено с помощью соответствующих радиусов.

На фиг. 5 видно, что в рассмотренном диапазоне изменения H_R амплитуда волн возрастает с увеличением погружения цилиндра.

Для фиг. 6 $\gamma_R = 1$, $H_R = 0,35$, вариантам а, б, в, г отвечают $Fr_R = 5, 10, 10^2, 10^4$. Видно, как с увеличением числа Фруда Fr_R понижается центр цилиндра, увеличивается длина волн и их амплитуда (крутизна волн убывает).

Пусть $v y = f(v x)$ – уравнение свободной поверхности Ω , $C_{pm} = \sup |C_p(f(v x))|$ при $-\infty < x < \infty$ (см. (1.5)). Очевидно, величина C_{pm} характеризует погрешность метода, основанного на аппроксимации (1.4).

Фигура 7	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	l_0	γ_0	f_0
<i>a</i>	-0,27	-0,87	0,3	-0,09	0,016	3,5	-0,025	5
<i>б</i>	0	0,45	0	0	0	3,5	-0,025	7
<i>в</i>	0	-1,1	0,25	-0,09	0,02	3,5	-0,025	100

Пусть y_d – ордината точки пересечения свободной поверхности с вертикальной осью, проходящей через центр кругового профиля (с осью y). В табл. 1 приводятся значения параметров νy_d , νy_b (см. (4.9)), $C_{pd} = C_p(\nu y_d)$, $C_{pb} = C_p(\nu y_b)$, полученные для различных чисел Фруда для $H_R = 0,75$, $\gamma_R = -1,5$ и $H_R = 0,35$, $\gamma_R = 1$. Из таблицы видно, что погрешность принятой аппроксимации достаточно мала по крайней мере при $Fr_R \geq 10$ и быстро убывает с ростом Fr_R .

С целью апробации развиваемого метода было рассмотрено обтекание ряда профилей с уравнением контура вида

$$\alpha = 2\pi s + a_0 + \sum_{k=1}^4 a_k \sin 4k\pi s \quad (5.1)$$

Вид профиля и свободной поверхности для трех вариантов задания определяющих параметров показан на фиг. 7 (здесь $X = x/H$, $Y = y/H$). Положение точек разветвления и схода потока отмечено с помощью отрезков, проведенных к ним из центра профиля. Значения коэффициентов a_k (5.1) и параметров l_0 (1.1), γ_0 и f_0 (1.2) для вариантов *a*, *б*, *в* приведены в табл. 2.

Заключение. Анализ известных авторам численных решений задачи об установившемся движении цилиндра под свободной поверхностью бесконечно глубокой жидкости показал, что все они, кроме решений работы [13], принадлежат области малых чисел Фруда, для которой максимальное значение безразмерной ординаты свободной поверхности νy возрастает с ростом числа Фруда Fr . Развиваемый в работе метод является удобным инструментом для получения решений в области больших чисел Фруда, где максимальное значение безразмерной ординаты свободной поверхности убывает с ростом Fr . Этот метод позволяет исследовать обтекание контуров различной формы как при больших, так и при малых погружениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99-01-00169, 99-01-00173).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wehausen J.V., Laitone E.V.* Surface waves // Handbuch der Physik. Berlin: Springer, 1960. Bd 9. P. 446–778.
2. *Wehausen J.V.* The wave resistance of ships // Advances in Applied Mechanics. N.Y.; L.: Acad. Press, 1973. V. 13. P. 93–245.
3. *Степаняц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э.В.* Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 21. С. 93–179.
4. *Стурова И.В.* Численные расчеты в задачах генерации плоских поверхностных волн: Препринт № 5. Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1990. 48 с.
5. *Yeung R.W.* Numerical methods in free-surface flows // Annual Review of Fluid Mechanics. Palo Alto, Calif.: Annu. Revs. Inc., 1982. V. 14. P. 395–442.
6. *Tuck E.O.* The effect on non-linearity at the free surface on flow past a submerged cylinder // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. Pt 2. P. 401–414.

7. *Giesing J.P., Smith A.M.O.* Potential flow about two-dimensional hydrofoils // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 28. Pt 1. P. 113–129.
8. *Eatock T.R., Wu G.X.* Wave resistance and lift on cylinders by a coupled element technique // *Intern. Shipbuild. Progr.* 1986. V. 33. № 377. P. 2–9.
9. *Dawson C.W.* A practical computer method for solving ship-wave problems // *Proc. 2nd Intern. Conf. on Numer. Ship Hydrodynamics.* Berkeley, 1977. P. 30–38.
10. *Maruo H., Ogivara S.* A method of computation for steady ship waves with non-linear free surface conditions // *Proc. 4th Intern. Conf. on Numer. Ship Hydrodynamics.* Washington: Nat. Acad. Sci., 1985. P. 218–233.
11. *Campana E., Lalli F., Bulgarelli U.* A boundary element method for a non-linear free surface problem // *Intern. J. Numer. Methods in Fluids.* 1989. V. 9. № 10. P. 1195–1206.
12. *Lalli F., Campana E., Bulgarelli U.* Numerical simulation of fully non-linear steady free surface flow // *Intern. J. Numer. Methods in Fluids.* 1992. V. 14. № 10. P. 1135–1149.
13. *Киселев О.М., Троепольская О.В.* О поступательном движении цилиндра под свободной поверхностью жидкости // *Изв. РАН. МЖГ.* 1996. № 6. С. 9–22.
14. *Милл-Томсон Л.М.* Теоретическая гидромеханика. М.: Мир, 1964. 665 с.
15. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.* М.: Наука, 1979. 830 с.
16. *Люк Ю.Л.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.

Казань

Поступила в редакцию
14.V.1999