

УДК 532.59:532.516.5

© 2000 г. Ю.В. САНОЧКИН

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА СВОБОДНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТЯХ

Определены частоты и коэффициенты затухания гравитационно-капиллярных волн в широкой области значений определяющих безразмерных параметров. Исследован переход к предельным случаям глубокой воды и идеальной жидкости. На плоскости параметров построена граница между областями колебательных и аперiodических возмущений и указана область слабого затухания волн. Рассмотрено равновесное состояние тонких пленок жидкости с учетом действия сил Ван-дер-Ваальса и выведено дисперсионное уравнение для капиллярно-ван-дер-ваальсовых поверхностных волн. Оно совпадает при надлежащем выборе масштаба частоты с уравнением гравитационно-капиллярных волн. Проведена оценка физических условий, при которых возможно наблюдение капиллярных и ван-дер-ваальсовых волн в тонких слоях жидкостей.

Затухание гравитационно-капиллярных поверхностных волн на глубокой воде рассмотрено в [1]. Случай стоячих волн в тяжелой вязкой жидкости бесконечной глубины, включая режим аперiodического затухания, изучен в [2]. На глубокой воде трение жидкости о дно является несущественным и затухание обусловлено вязкими напряжениями в волне. Физический анализ механизмов диссипации энергии при затухании имеется в [3]. Затухание для маловязких жидкостей на глубокой воде, если исключить очень короткие волны, оказывается малым.

Представляет интерес рассмотреть вопрос о влиянии вязкости на свободные поверхностные волны в общем случае, отказавшись от ограничений на величины коэффициента вязкости и длины волны. Целью работы является определение частот колебаний и коэффициентов затухания из полного дисперсионного уравнения, которое в отличие от теории Ламба или случая идеальной жидкости является двухпараметрическим. Отдельный интерес представляет рассмотрение поверхностных волн в тонких слоях жидкости, когда становятся существенными ван-дер-ваальсовы силы, а силой тяжести можно пренебречь. Учет влияния вязкости имеет в этом случае принципиальный характер, ибо касается вопроса о возможности обнаружения указанных волн.

1. Гравитационно-капиллярные волны. Рассматриваются двумерные волны в горизонтальном слое жидкости постоянной толщины. Ось x декартовой системы координат ориентирована в направлении распространения волн, ось y – вертикальна. Плоскость $y = -l$ есть твердая граница слоя, $y = 0$ – невозмущенная свободная граница жидкости. Смещение свободной поверхности в волне обозначается $y = \zeta(x, t)$, отличны от нуля горизонтальная u (вдоль оси x) и вертикальная v составляющие скорости.

Исходная система уравнений и граничных условий имеет вид [1]

$$\Delta\varphi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = v\Delta\psi \quad (1.1)$$

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{p}{\rho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - gy \quad (1.2)$$

$$y = \zeta, \quad v = \frac{\partial\zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad -\frac{p}{\rho} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

$$y = -l, \quad u = v = 0$$

Здесь ρ – плотность, p – давление, ν – кинематическая вязкость, g – ускорение силы тяжести, α – коэффициент поверхностного натяжения, Δ – оператор Лапласа, φ – потенциал скорости, функция ψ описывает завихренность движения. Искомые решения (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi &= (A \operatorname{sh} ky + B \operatorname{ch} ky) \exp(ikx + st) \\ \psi &= (C \operatorname{sh} my + SD \operatorname{ch} my) \exp(ikx + st) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$m = \left(k^2 + \frac{s}{\nu}\right)^{1/2}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны, s – комплексная частота колебаний, параметр m – главное значение радикала. Удовлетворяя выражениями (1.4) граничным условиям (1.3), можно получить четыре однородных алгебраических уравнения для коэффициентов A, B, C, D . Условие разрешимости системы приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(a\sqrt{q})[(4b^2 + (w + 2b)^2) \operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a] &= 4b(w + 2b) + \\ + \frac{\operatorname{sh}(a/\sqrt{1+q})}{\sqrt{1+q}} [\operatorname{ch} a + (4b(w+b) + (w+2b)^2) \operatorname{sh} a] \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$q = \frac{w}{b}, \quad w = \frac{s}{\omega_0} = -\gamma \pm i\omega \quad (\omega > 0)$$

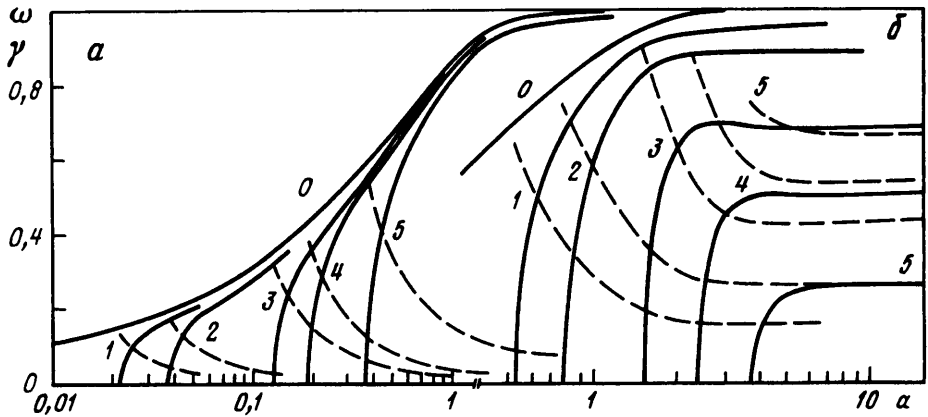
$$a = kl, \quad b = \frac{\nu k^2}{\omega_0}$$

$$\omega_0 = \left(gk + \frac{\alpha k^3}{\rho}\right)^{1/2}$$

В (1.5) входят два независимых безразмерных параметра a, b . Относительная толщина слоя жидкости a будет называться для краткости глубиной, относительная вязкость b – вязкостью. В качестве единицы измерения частоты и коэффициента затухания выбрана частота гравитационно-капиллярных волн в идеальной жидкости на глубокой воде ω_0 .

Будут исследоваться только решения w уравнения (1.5) с отрицательной действительной частью ($\gamma > 0$). Затухание и частота не зависят от направления распространения волны. Из этого с учетом вещественности и симметрии дисперсионного уравнения следует, что если w есть решение (1.5), то и комплексно-сопряженная величина \bar{w} также является его корнем.

Исследование асимптотики решений (1.5) при $a \rightarrow 0$ лишено смысла. Влияние вязкости в этом случае наиболее сильно и физически очевидно, что для любого фиксированного значения параметра b найдется такое значение параметра $a = a_*$, что при $a < a_*$ волновое движение будет невозможно и возмущения будут исчезать монотонно со временем. Поэтому одной из целей работы является определение функции $a_*(b)$, которая может принимать не только малые значения.



Фиг. 1. Зависимость частоты ω (сплошные линии) и коэффициента затухания γ (штриховые линии) от относительной глубины $a = kl$. Кривая 0 – частота гравитационно-капиллярных волн в идеальной жидкости ($\omega = \sqrt{ga}$): a – для вязкостей $b = \nu k^2/\omega_0 = 5 \cdot 10^{-5}, 2 \cdot 10^{-4}, 4 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-2}$, δ – для вязкостей $b = \nu k^2/\omega_0 = 0, 1, 0, 2, 0, 5, 0, 85, 1, 2$ (кривые 1–5)

При $a \rightarrow \infty$ уравнение (1.5) упрощается

$$[4b^2 + (w + 2b)^2 + 1] \sqrt{1 + \frac{w}{b}} = [1 + 4b(w + b) + (w + 2b)^2]$$

Алгебраические преобразования приводят его к известному дисперсионному уравнению для волн на глубокой воде [1]

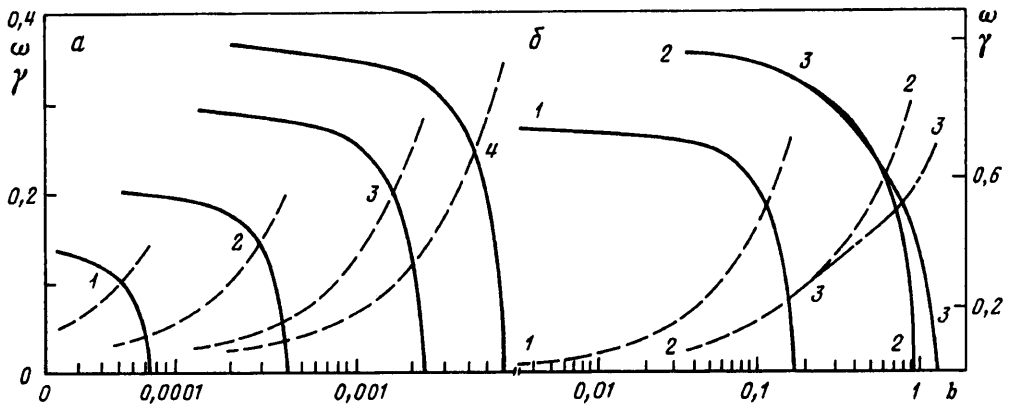
$$(w + 2b)^2 + 1 = 4b^2 \sqrt{1 + \frac{w}{b}} \quad (1.6)$$

В предельном случае исчезающей вязкости ($b \rightarrow 0$) решение (1.6) представляет закон дисперсии гравитационно-капиллярных волн в идеальной жидкости. Если a конечно, указанный предельный переход не имеет места. Равномерного приближения "вязкого" решения при $b \rightarrow 0$ к решению задачи для идеальной жидкости быть не может. Частота колебаний ω не может стремиться к частоте в идеальной жидкости равномерно относительно параметров a и b .

Уравнение (1.5) решалось численно с помощью стандартных процедур. На фиг. 1 демонстрируется зависимость частоты колебаний ω и коэффициента затухания γ от глубины a при фиксированных значениях вязкости b .

Значению $\omega = 0$ и наибольшему значению γ каждой пары кривых соответствует одна и та же координата $a = a_*(b)$. Для каждого фиксированного значения b волновое движение возможно, если $a > a_*(b)$. При изменении знака неравенства пара комплексных решений (1.5) превращается в вещественные, описывающие аперриодическое затухание. Если провести на графиках прямую $a = \text{const}$, то она пересечет только те решения, которые возникли слева от нее. Указанные колебательные решения отвечают значениям параметров $b < b_*$, где величина $b_*(a)$ соответствует решению, начинающемуся в точке a , т.е. волновое движение возможно, если $b < b_*(a)$, где $b_*(a)$ – функция, обратная $a_*(b)$.

Частоты ω и декременты γ с ростом a выходят на постоянные значения, зависящие от b . При этом функция $\omega(a)$ может меняться немонотонно (кривые 3, 4 на фиг. 1, б). Предельные значения корней (1.5) $\omega_\infty, \gamma_\infty$ ($a \gg 1$) могут быть вычислены из асимпт-

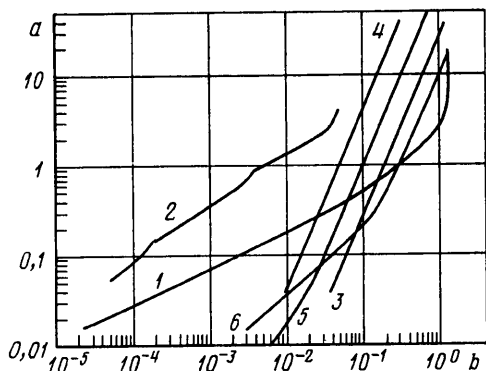


Фиг. 2. Зависимость частоты ω (сплошные линии) и коэффициента затухания γ (штриховые линии) от относительной вязкости $b = \nu k^2/\omega_0$: а – для глубин $a = kl = 0,025, 0,05, 0,1, 0,15$ (кривые 1–4), б – для глубин $a = kl = 0,7, 2,6, 9$ (кривые 1–3)

тотического уравнения (1.6), при этом они являются монотонными функциями параметра b . При увеличении b частота ω уменьшается и в точке $b_m = 1,31146$ обращается в ноль, а декремент γ увеличивается до значения $\gamma(b_m) = 0,701$. Решая уравнение (1.6) с последующей проверкой корней по полному уравнению (1.5), можно убедиться, что при $b > b_m$ возможны лишь монотонные возмущения. Иными словами, на глубокой воде волновое движение может существовать, если $b < b_m$, т.е. при $a \gg 1$ $b_* = b_m$. Для коэффициента затухания γ , согласно (1.6), при $b \rightarrow 0$ главный член асимптотики дается выражением $\gamma = 2b$. Такой декремент приписывают волнам в маловязкой жидкости на глубокой воде, когда $\gamma \ll 1$, и связывают его с внутренним трением в волне. С ростом вязкости b помимо указанных потерь увеличиваются потери из-за трения о дно. Казалось бы, что с ростом b коэффициент γ должен увеличиваться по более быстрому закону, чем предписывает асимптотическое выражение. Варианты кривые (5 – фиг. 1, а и 1, 2 – фиг. 1, б) удовлетворяют условию слабого затухания $\gamma \ll \omega$, где γ и ω – предельные значения, соответствующие случаю глубокой воды. Однако значения коэффициентов затухания оказываются меньше ожидаемых $\gamma < 2b$. Для сильно затухающих волн на глубокой воде (кривые 3–5 на фиг. 2), как показывает расчет, также $\gamma < 2b$.

На фиг. 2 демонстрируются зависимости $\omega(b)$ и $\gamma(b)$ при фиксированных значениях глубины a . С увеличением b колебательное решение исчезает в точке $b = b_*$, где $\gamma(b_*) = \max \gamma(b)$, а $\omega(b_*) = 0$. При переходе через точку b_* пара комплексносопряженных корней (1.5) превращается в пару отрицательных. С уменьшением b частота и декремент выходят на постоянные значения, монотонно растущие с параметром a . При $a \rightarrow \infty$ функции $\omega(b)$ и $\gamma(b)$ стремятся к предельным, так, при $a > 9$ их графики на фиг. 2, б совпадают с кривой 3. При этом колебательные решения при различных $a > 9$ перестают существовать при $b_* \approx b_m$.

Частота гравитационно-капиллярных волн в вязкой жидкости близка к ω_0 , если $a \geq 2$, $b \leq 0,1$ (фиг. 1, б, 2, б). Пользоваться выражением $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{th a}$ для частоты в вязкой жидкости при $a < 1$ можно, если значение параметра вязкости b меньше некоторого $b_1 < b_*(a)$, которое определяется из графиков фиг. 1 в соответствии с выбранным отклонением $\omega_1 - \omega$. Указанным "невязким" значениям частоты колебаний отвечают не обязательно пренебрежимые коэффициенты затухания γ .



Фиг. 3. Границы областей: 1 – колебательных возмущений, 2 – слабого затухания волн. Зависимость $a(b)$ для тонких слоев жидкостей: 3 – H_2O , $l = 4 \cdot 10^{-5}$ см, 4 – CO_2 , $4 \cdot 10^{-5}$ см, 5 – CO_2 , 10^{-5} см, 6 – углеводороды, 10^{-6} см

Символами a_* , b_* выше обозначались координаты точек, в которых возникают или исчезают колебательные решения дисперсионного уравнения. На фиг. 3 линия 1 изображает на плоскости (b, a) функции $a_*(b)$ и $b_*(a)$. Прямолинейный участок $b < 0,01$ кривой 1 описывается выражением $\lg a = c + (\frac{2}{5}) \lg b$, где c – константа. С ростом a линия 1 выходит на асимптоту $b = b_m$. Ниже и правее от кривой 1 расположена область монотонных возмущений, выше и левее – колебательных. Переход от одного режима к другому имеет мягкий, непрерывный характер. С математической точки зрения линия 1 составлена из точек бифуркации решений спектральной задачи, в которую параметр входит нелинейно.

2. Капиллярно-ван-дер-ваальсовы волны. При толщине слоя $l \leq 10^{-5}$ см необходимо учитывать силы Ван-дер-Ваальса [4]. Во многих работах, посвященных численному моделированию молекулярной динамики, установлено, что объемы жидкости подобной толщины суть макроскопические объекты, к которым правомочно применять гидродинамическое описание. Например, в [5] изучено движение ансамбля из 1536 молекул (с потенциалом парного взаимодействия Ленарда – Джонса) в области размером $10^{-6} \times 10^{-6}$ см между стенками, отстоящими друг от друга на $4 \cdot 10^{-7}$ см. Показано, что рассматриваемая система ведет себя как континуальная жидкость, описываемая уравнениями Навье – Стокса.

Химический потенциал μ жидкой пленки, разделяющей произвольные тела 1 и 2, отличается от потенциала μ_∞ толстого слоя на величину $\Delta\mu(l) = \mu - \mu_\infty$ [6]. Отнесенная к единице объема добавка $\Delta\mu$ равна по модулю силе, действующей на единицу площади каждого из двух тел. Изменение химического потенциала с утоньшением слоя вызывает соответствующие изменения других параметров. Появляется, в частности, дополнительное давление p_d в прослойке жидкости. Поскольку размеры переходных зон между фазами порядка молекулярных и поправки к плотности жидкости, обусловленные ван-дер-ваальсовым взаимодействием, малы [6], плотность жидкости в первом приближении можно считать постоянной. Удобно относить химический потенциал к массе жидкости ρ . Тогда из справедливого при постоянной температуре термодинамического равенства $d\mu = dp$ следует, что $\Delta\mu = p_d$. Эффект возникновения в пленке добавочного давления p_d был еще ранее обнаружен экспериментально [7, 8] и назван "раскливающим" давлением. (Введенная выше величина p_d отличается знаком от раскливающего давления, фигурирующего в [8]). Следует отметить, что $\Delta\mu$ – алгебраическая величина, притяжению сред 1 и 2 соответствует положительное добавочное давление p_d .

Если l мало по сравнению с основными длинами волн в спектрах поглощения тел, то [6]

$$p_d = \frac{\hbar\Omega}{8\pi^2 l^3}, \quad \Omega = \int_0^\infty \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_3)(\epsilon_2 - \epsilon_3)}{(\epsilon_1 + \epsilon_3)(\epsilon_2 + \epsilon_3)} d\sigma \quad (2.1)$$

Здесь \hbar – постоянная Планка, ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 – диэлектрические проницаемости сред 1, 2 и жидкости, берущиеся на мнимой оси частот $i\sigma$. Использование макроскопической теории [6] затруднено из-за недостаточности данных о законе дисперсии диэлектрической проницаемости $\epsilon(\sigma)$. Для некоторых сочетаний взаимодействующих сред константы Ω приведены в [9].

Если l велико по сравнению с длинами волн в спектрах поглощения, то для диэлектрических жидких прослоек справедливо выражение [6, 9]

$$p_d = \frac{R}{l^4}, \quad R = \frac{3\hbar c}{16\pi^2 \sqrt{\epsilon_{03}}} \frac{(\epsilon_{01} - \epsilon_{03})(\epsilon_{02} - \epsilon_{03})}{(\epsilon_{01} + \epsilon_{03})(\epsilon_{02} + \epsilon_{03})} \quad (2.2)$$

где c – скорость света, ϵ_{01} , ϵ_{02} , ϵ_{03} – статистические диэлектрические проницаемости (при $\sigma = 0$). Выражением (2.1) можно пользоваться при $l \leq 10^{-6}$ см, (2.2) – при $l > 3 \cdot 10^{-6}$ см [9]. Имеются также другие составляющие расклинивающего давления и соответствующие зависимости $p_d(l)$, которые не рассматриваются.

Условие термодинамической устойчивости пленки $(\partial\mu/\partial l)_T > 0$ выполняется, если $p_d < 0$. В этом случае, согласно (2.1), (2.2), разности $\epsilon_1 - \epsilon_3$ и $\epsilon_2 - \epsilon_3$ должны иметь разные знаки в существенной области частот. Градиент давления в жидкости при постоянной температуре равен

$$\nabla p = \nabla(\mu_\infty + \Delta\mu) = \nabla(p_\infty + p_d)$$

где p_∞ – давление без учета ван-дер-ваальсовой составляющей. В рассматриваемой модели плоского слоя неограниченной протяженности пленка не сообщается с объемной фазой жидкости. Под воздействием атмосферы и ван-дер-ваальсовых сил жидкость подвергается сжатию (растяжению), фактически одностороннему, поскольку площадь контакта жидкой и твердой фаз не меняется. Возникающее вследствие малой упругой деформации жидкости давление p° компенсирует в состоянии равновесия действующие на слой силы

$$p^\circ = p_\infty^\circ + p_d^\circ = p_g + p_d(l)$$

Здесь p_g – постоянное давление газа, $p_d(l)$ – равновесное расклинивающее давление. Возмущение давления также складывается из двух частей

$$p' = p_\infty' + p_d' = p + \frac{dp_d}{dl} \zeta \quad (2.3)$$

где $p' = p_\infty'$ – возмущение, не связанное с ван-дер-ваальсовым взаимодействием. Подстановка (2.3) в уравнения Навье – Стокса с отсутствующими квадратичными членами приводит к исходным уравнениям для волн

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g_{\text{ef}} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g + v\Delta v \\ g_{\text{ef}} &= \frac{1}{\rho} \frac{dp_d}{dl} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Эффективное ван-дер-ваальсово ускорение $g_{\text{ef}} > 0$, если $p_d < 0$. Ускорение g оставлено в (2.4) для описания перехода от $g_{\text{ef}} \ll g$ (гравитационно-капиллярные волны) к случаю, когда силой тяжести можно пренебречь ($\rho g l \ll |p_d|$). Соответствующие ускорения силы оказываются взаимно перпендикулярными.

Решение (2.4) и уравнения непрерывности для скорости выражаются через ϕ и ψ прежними формулами (1.2), а решение для p видоизменяется

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} - gy - g_{ef} \zeta \quad (2.5)$$

Подстановка (2.5) в третье граничное условие (1.3) при $y = \zeta$ с учетом экспоненциальной зависимости от x (1.4) приводит к выражению

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(g + g_{ef} + \frac{\alpha k^2}{\rho} \right) \zeta + 2v \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Оно отличается от соответствующего условия для гравитационно-капиллярных волн наличием в скобке дополнительного слагаемого g_{ef} . Другие граничные условия приводят к прежним выражениям. Следовательно, дисперсионное уравнение для волн в тонких пленках с учетом сил Ван-дер-Ваальса совпадает по форме с (1.5). Отличие заключается в том, что фигурирующая в (1.5) величина ω_0 заменяется на

$$\omega_d = \left(gk + g_{ef}k + \frac{\alpha k^3}{\rho} \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

Таким образом, все результаты, полученные для гравитационно-капиллярных волн, переносятся на случай капиллярно-ван-дер-ваальсовых волн с заменой $\omega_0 \rightarrow \omega_d$ при переходе к размерным величинам.

Случай термодинамически неустойчивой пленки малоинтересен. Если $g + g_{ef} < 0$, то для длинных волн ω_d становится мнимым. Это означает, что указанное состояние оказывается также динамически неустойчивым и скорее всего такая пленка не может быть создана.

Если $g_{ef} \gg g$, то (2.6) есть частота волн в идеальной жидкости, в которую вместо силы тяжести подставлена ван-дер-ваальсова сила. Естественно именовать их капиллярно-ван-дер-ваальсовыми. Для больших длин волн $\alpha k^2 \ll \rho g_{ef}$ они становятся чисто ван-дер-ваальсовыми. Возбуждения с таким законом дисперсии наблюдались в тонких ($l \sim 2 \cdot 10^{-6}$ см) пленках сверхтекучего гелия, у которого очень малый коэффициент поверхностного натяжения. Они были названы третьим звуком [10].

Чтобы ответить на вопрос об условиях наблюдения капиллярно-ван-дер-ваальсовых волн в обычных классических жидкостях, достаточно определить, при каких длинах волн параметры $a(k)$, $b(k)$ для некоторого сочетания взаимодействующих сред попадают в область колебательных возмущений на фиг. 3.

Результаты расчетов для слоя воды толщиной $l = 4 \cdot 10^{-5}$ см на металле при нормальных условиях ($T = 20^\circ\text{C}$, $p = 1$ атм) представляет линия 3 на фиг. 3. В случае металлической подложки выражения (2.1) и (2.2) упрощаются, поскольку диэлектрическая проницаемость металла велика по модулю при небольших частотах ($\epsilon \sim (1/\sigma) \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow 0$). Согласно (2.2), для $\epsilon_{01} = \infty$, $\epsilon_{02} = 1$, $\epsilon_{03} = 81$ ван-дер-ваальсово ускорение составляет $g_{ef} = 2,5 \cdot 10^3$ см/с². При расчетах использовались величины $\alpha = 72$ эрг/см², $v = 0,01$ см²/с. Как видно из графика, в пленке воды возможны сильно затухающие волны в небольшом интервале длин волн. Имеются указания [11], что в тонких слоях воды наблюдается существенное (на порядок) уменьшение вязкости по сравнению с объемными значениями. Если это так, то параллельный перенос линии 3 влево показывает, что возможны слабо затухающие волны в более широком диапазоне длин волн.

Основная трудность в определении условий наблюдения капиллярно-ван-дер-ваальсовых волн заключается в отсутствии в литературе экспериментальных данных, необходимых для проведения соответствующих оценок. Даже для столь популярного

объекта исследований, как жидкая углекислота, имеется весьма разрозненный набор параметров: динамическая вязкость $\eta = 6,7 \cdot 10^{-4}$ П ($T = 20^\circ\text{C}$, $p = 56$ атм), $\rho = 1,19$ г/см³ ($T = -60^\circ\text{C}$, $p = 1$ атм), $\alpha = 16,5$ эрг/см² ($T = -52^\circ\text{C}$), коэффициент теплового расширения $\beta = 5 \cdot 10^{-3}$ град⁻¹ ($T = -50^\circ\text{C}$, $p = 1$ атм), коэффициент сжимаемости $\chi = 1,74 \cdot 10^{-3}$ атм⁻¹ ($T = 13^\circ\text{C}$, $p = 60$ атм). Приведение параметров к термодинамическим условиям $T = 20^\circ\text{C}$, $p = 56$ атм, недалеко от критической точки, дает приближенные значения $\rho = 0,94$ г/см³, $v = 7,1 \cdot 10^{-4}$ см²/с, $\alpha = 4,87$ эрг/см². С их использованием рассчитывались параметры a и b для слоя углекислоты прежней толщины $l = 4 \cdot 10^{-5}$ см на металле. Величина ϵ_{03} принималась равной 4, что дает $g_{ef} = 8,4 \cdot 10^3$ см/с². (Как будет отмечено ниже, неопределенность g_{ef} в рассматриваемом случае не имеет значения.) Результаты расчетов, представленные линией 4 на фиг. 3, показывают, что возможны волны с небольшим затуханием при $a \sim 10$.

Линия 5 относится к слою углекислоты толщиной $l = 10^{-5}$ см при тех же термодинамических условиях. Она демонстрирует небольшое увеличение затухания с уменьшением l , обусловленное в основном увеличением трения о дно.

Линия 6 относится к $l = 10^{-6}$ см, когда надо применять формулу (2.1) для определения g_{ef} . Согласно расчетам [9], для слоя углеводородов на металле $\hbar\Omega = 8,4 \cdot 10^{-12}$ эрг. В качестве других параметров взяты типичные величины для углеводородов с малыми числами атомов углерода $\eta = 6 \cdot 10^{-4}$ П, $\rho = 0,5$ г/см³, $\alpha = 7,5$ эрг/см², а $g_{ef} = 6,4 \cdot 10^{11}$ см/с².

На участках линий 3–6 внутри области колебательных возмущений выполняется условие $\alpha k^2 \gg \rho g_{ef}$, почему собственно они и являются параллельными прямыми $\lg a = c_i + 2 \lg b$. Это означает, что влиянием ван-дер-ваальсовых сил можно пренебречь и рассмотренные волны являются капиллярными. На частях линий 5, 6, находящихся в области монотонных возмущений, видны участки, имеющие меньший наклон к оси абсцисс. На них, напротив, пренебрежимы капиллярные силы. Экстраполяция изображенных на диаграмме данных позволяет заключить, что слабо затухающие ван-дер-ваальсовы волны возможны в тонких пленках жидкостей, у которых кинематическая вязкость $v \leq 10^{-4}$ см²/с. Для наблюдения капиллярных волн с малым затуханием требуются условия, когда значения вязкости $v \leq 10^{-3}$ см²/с или достаточно велико поверхностное натяжение при $v \sim 10^{-2}$ см²/с. Учитывая сильную зависимость динамической вязкости от температуры, указанные условия не представляются нереализуемыми.

Заключение. Определена верхняя граница значений вязкости как функции глубины, за которой возможны лишь монотонные возмущения заданной длины волны. Выявлены области изменения параметров, в пределах которых можно с контролируемой ошибкой использовать выражение для "невязкой" частоты гравитационно-капиллярных волн. Найдено, что коэффициенты затухания волн на глубокой воде могут быть меньше, чем по теории Ламба, в том числе и для сильно затухающих волн. Выведено дисперсионное уравнение, и для термодинамически устойчивой пленки показана возможность существования капиллярно-ван-дер-ваальсовых волн. Оценены физические условия, при которых возможно их обнаружение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947, 928 с.
2. Сретенский Л.Н. О волнах на поверхности вязкой жидкости. Ч. 1 // Тр. ЦАГИ. 1941. № 541. С. 1–33.
3. Лайтхилл Д. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981, 589 с.
4. Бараш Ю.С. Силы Ван-дер-Ваальса. М.: Наука, 1988. 344 с.

5. *Koplik J., Banavar J.R., Willemsen J.F.* Molecular dynamics of Poiseuille flow and moving contact lines // *Phys. Rev. Lett.* 1988. V. 60. № 13. P. 1281–1285.
6. *Дзялошинский И.Е., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Ван-дер-ваальсовы силы в жидких пленках // *ЖЭТФ.* 1959. Т. 37. Вып. 1. С. 229–241.
7. *Дерягин Б., Обухов Е.* Аномальные свойства тонких слоев жидкостей // *Коллоид. журн.* 1935. Т. 1. Вып. 5. С. 385–398.
8. *Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М.* Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 399 с.
9. *Чураев Н.В.* Физико-химия процессов массопереноса в пористых телах. М.: Химия, 1990. 271 с.
10. *Паттерман С.* Гидродинамика сверхтекучей жидкости. М.: Мир, 1978. 520 с.
11. *Дерягин Б.В., Федакин Н.Н.* Скольжение жидкостей в капиллярах // *Докл. АН СССР.* 1968. Т. 182. № 6. С. 1300–1302.

Москва

Поступила в редакцию
7.V.1999