

УДК 532.59

© 2000 г. Ю.А. ДРОЗДОВА

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СОЛИТОНА В ШИРОКОМ КАНАЛЕ С НЕРОВНЫМ ДНОМ

Рассматриваются нелинейные волны малой амплитуды в широких горизонтальных каналах. Считается, что глубина канала является функцией, слабо зависящей от поперечной координаты. Для описания волн используются двумерные уравнения Буссинеска в форме, полученной в этой работе. Найдены стационарные решения, имеющие вид солитона со следующей за ним системой синусоидальных волн. Фазовая скорость этих волн в направлении канала совпадает со скоростью солитона.

Изучению солитонов на поверхности жидкости посвящено большое количество работ. Классическое решение, имеющее вид уединенной волны, получено для случая постоянной глубины [1, 2]. В ряде работ рассматривалось распространение солитона над неровным дном. В частности, в [3] численно исследовалось изменение формы и амплитуды уединенной волны при ее движении к берегу на шельфе с постоянным уклоном дна. В [4] изучалось распространение солитона вдоль подводного хребта в безграничном бассейне. При некоторых ограничениях на форму хребта авторы нашли искажение профиля волны в поперечном к хребту направлении. При этом в системе уравнений не были учтены малые члены, которые приводят к излучению волн. Движение солитона над неровным дном в модельной постановке, когда элемент солитона характеризовался энергией и направлением движения, рассматривалось в [5, 6].

В данной работе рассмотрено распространение солитона вдоль неровности дна в бассейне, имеющем форму канала, т.е. при наличии двух берегов. Показано, что наличие неровности дна и берегов приводит к тому, что в хвостовой части уединенной волны образуется система синусоидальных волн. Излучение этих волн приводит к потере энергии солитоном и его затуханию.

1. Двумерные уравнения Буссинеска. Распространение волн малой амплитуды в широких каналах с переменной по ширине канала глубиной исследуется в этой работе с помощью двумерных уравнений Буссинеска.

Для случая постоянной глубины двумерные уравнения Буссинеска приводятся, например, в книге [7]. Для переменной глубины двумерные уравнения Буссинеска получены в [3], где в качестве основных искомым переменных взяты средняя по глубине скорость и возмущение глубины. При этом средняя скорость не обладает потенциалом. В [4] двумерные уравнения Буссинеска получены только при дополнительном условии, что невозмущенная глубина мало отличается от константы.

Дадим здесь вывод двумерного уравнения Буссинеска в форме, содержащей в качестве искомой функции некоторый потенциал скорости. Обозначим координату вдоль оси канала через x , поперечную через y , вертикальную через z , невозмущенную глубину через $H(x, y)$, уравнение свободной поверхности $z = \zeta(x, y, t)$, Φ – потенциал скорости. Начало координат выбираем на невозмущенной поверхности.

Введем параметры $\mu = h/L$, $\varepsilon = A/h$. Здесь h , L , A – характерная глубина канала и характерные длина и амплитуда волны. Будем считать, что $\mu \ll 1$, $\varepsilon \ll 1$, причем, как

обычно, будут учитываться члены, порядок которых ε и μ^2 по отношению к главным членам. Для вывода двумерных уравнений Буссинеска введем масштабированные переменные [7]

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x}{L}, & y_1 &= \frac{y}{L}, & z_1 &= \frac{z}{h}, & H_1 &= \frac{H}{h}, & t_1 &= \frac{c_0 t}{L} \\ \Phi_1 &= \frac{\Phi h}{ALc_0}, & \zeta_1 &= \frac{\zeta}{A}, & c_0 &= \sqrt{gh} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнения гидродинамики, а также условия на свободной поверхности и на дне в этих переменных имеют вид (индекс 1 опущен)

$$\mu^2 \Delta \Phi + \Phi_{zz} = 0 \quad (-H < z < \varepsilon \zeta) \quad (1.2)$$

$$\mu^2 (\zeta_t + \varepsilon \nabla \Phi \nabla \zeta) = \Phi_z \quad (z = \varepsilon \zeta) \quad (1.3)$$

$$\mu^2 (\Phi_t + \zeta) + \frac{1}{2} \varepsilon (\mu^2 \nabla \Phi^2 + \Phi_z^2) = 0 \quad (z = \varepsilon \zeta) \quad (1.4)$$

$$\Phi_z = -\mu^2 (\nabla H \nabla \Phi) \quad (z = -H(x, y)) \quad (1.5)$$

Здесь $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, $\Delta = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$.

Потенциал скорости представим в виде ряда

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x, y, t) z^m / m! \quad (1.6)$$

Подставим ряд (1.6) в уравнение (1.2). Так как оно должно выполняться для всех z , то, приравняв коэффициенты ряда при одинаковых степенях z , получим

$$\Phi_2 = -\mu^2 \Delta \varphi, \quad \Phi_3 = -\mu^2 \Delta \varphi, \quad \Phi_4 = \mu^4 \Delta^2 \varphi \quad (1.7)$$

Для получения выражения для Φ_1 используем граничное условие на дне (1.5) с учетом соотношений (1.7). Будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi_1 + \mu^2 H \Delta \varphi - \frac{1}{2} \mu^2 H^2 \Delta \Phi_1 - \frac{1}{6} \mu^4 H^3 \Delta^2 \varphi = \\ = -\mu^2 \nabla H (\nabla \varphi - H \nabla \Phi_1 - \frac{1}{2} \mu^2 H^2 \nabla \Delta \varphi) + O(\mu^6) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Отсюда следует, что $\Phi_1 = -\mu^2 \nabla (H \nabla \varphi) + O(\mu^4)$, поэтому (1.8) можно переписать в виде

$$\Phi_1 = -\mu^2 \nabla (H \nabla \varphi) + \mu^4 \nabla \left(\frac{H^3}{6} \nabla \Delta \varphi - \frac{H^2}{2} \nabla (\nabla (H \nabla \varphi)) \right) + O(\mu^6) \quad (1.9)$$

Используем теперь граничные условия на поверхности (1.3), (1.4). Из (1.3) с учетом (1.7) и (1.9) получим

$$\zeta_t + \nabla (H \nabla \varphi) = -\varepsilon \nabla \zeta \nabla \varphi + \mu^2 \nabla \left(\frac{H^3}{6} \nabla \Delta \varphi - \frac{H^2}{2} \nabla (\nabla (H \nabla \varphi)) \right) \quad (1.10)$$

Аналогично из (1.4) получим

$$\varphi_t + \zeta + \frac{1}{2} \varepsilon (\nabla \varphi)^2 = 0 \quad (1.11)$$

Выразим ζ из (1.11) и подставим в (1.10), сохраняя слагаемые порядка ε и μ^2

$$\nabla (H \nabla \varphi) - \varphi_{tt} = \frac{1}{2} \varepsilon (\nabla \varphi)^2 + \varepsilon \nabla \varphi_t \nabla \varphi +$$

$$+\mu^2 \nabla \left(\frac{H^3}{6} \nabla \Delta \varphi - \frac{H^2}{2} \nabla (\nabla (H \nabla \varphi)) \right) + \varepsilon \varphi_t \Delta \varphi \quad (1.12)$$

Из (1.12) следует, что

$$\nabla (H \nabla \varphi) = \varphi_{tt} + O(\mu^2) \quad (1.13)$$

Поэтому в принятом приближении уравнение для потенциала φ можно записать в виде

$$\nabla (H \nabla \varphi) - \varphi_{tt} = \frac{1}{2} \varepsilon (\nabla \varphi)_t^2 + \mu^2 \nabla \left(\frac{H^3}{6} \nabla \Delta \varphi - \frac{H^2}{2} \nabla \varphi_{tt} \right) + \varepsilon \nabla (\varphi_t \nabla \varphi) \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14) представляет собой уравнение типа Буссинеска для φ , так как нелинейность и дисперсия учтены в нем в соответствующем порядке малости. В размерной форме (1.14) имеет вид

$$g \nabla (H \nabla \varphi) - \varphi_{tt} = \frac{1}{2} (\nabla \varphi)_t^2 + g \nabla \left(\frac{H^3}{6} \nabla \Delta \varphi - \frac{H^2}{2g} \nabla \varphi_{tt} \right) + \nabla (\varphi_t \nabla \varphi) \quad (1.15)$$

2. Солитон в канале с неровным дном. Используя полученное двумерное уравнение Буссинеска (1.15), изучим влияние слабой неровности дна на распространение солитона в цилиндрическом горизонтальном канале. Пусть x – координата вдоль оси канала, y – поперечная горизонтальная координата, а дно канала мало отличается от плоского, т.е.

$$H = H_0 + \sigma h(y), \quad H_0 = \text{const}, \quad \sigma \ll 1 \quad (2.1)$$

Предполагая, что боковые стенки канала вертикальные, будем использовать граничные условия вида

$$v_y = 0 \quad (y = 0, y = B) \quad (2.2)$$

Здесь B – ширина канала.

Решение уравнения (1.15) будем искать в виде

$$\varphi = \varphi_0(x, t) + \sigma \varphi_1(x, y, t) \quad (2.3)$$

Подставим (2.3) в уравнение (1.15) и соберем члены при σ^0 , σ . Нулевое приближение по σ дает уравнение для φ_0

$$c_0^2 \varphi_{0xx} - \varphi_{0tt} = 2\varphi_{0x} \varphi_{0xt} + \varphi_{0t} \varphi_{0xx} - \frac{1}{3} c_0^2 H_0^2 \varphi_{0xxx}$$

Это уравнение не содержит членов, связанных с неровностью дна.

Будем изучать решения, зависящие от $\xi = x - Ut$, $U = \text{const}$. Тогда уравнение для нулевого приближения примет вид

$$(U^2 - c_0^2) p_\xi = \frac{3}{2} U (p^2)_\xi + \frac{1}{3} c_0^2 H_0^2 p_{\xi\xi\xi}, \quad p \equiv \varphi_\xi \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) имеет решение в виде солитона [1]

$$p = \beta c_0 \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{3U\beta}{4H_0^2 c_0}} \xi \right), \quad \beta = \left(\frac{U^2}{c_0^2} - 1 \right) \frac{c_0}{U} > 0 \quad (2.5)$$

Отметим следующие известные свойства этого решения. Максимальное значение p равно βc_0 . В силу исходного предположения о малости амплитуд изучаемых волн величина β имеет порядок ε , поэтому U/c_0 мало отличается от 1, и связь между U и β может быть переписана в виде $U = c_0(1 + \frac{1}{2}\beta)$. За длину волны солитона можно при-

нять величину $2L$, определяемую условием

$$\sqrt{\frac{3U\beta}{4c_0H_0^2}}L \approx 1, \quad \Rightarrow L \sim \frac{H_0}{\sqrt{\beta}} \quad (2.6)$$

Найдем теперь поправку $\sigma\varphi_1$ к решению (2.5), связанную с неровностью дна и влиянием берегов. Для получения уравнения, содержащего φ_1 , приравняем в уравнении (1.15) члены порядка σ нулю

$$\begin{aligned} (c_0^2 + Up)\Delta\varphi_1 + \varphi_{1\xi\xi}(2Up - U^2) + 3d_1\varphi_{1\xi} + \frac{1}{2}U^2H_0^2\Delta\varphi_{1\xi\xi} - \\ - \frac{1}{6}c_0^2H_0^2\Delta^2\varphi_1 + ghd_1 + H_0h(U^2 - \frac{1}{2}c_0^2)d_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$d_1 \equiv p_\xi, \quad d_3 \equiv p_{\xi\xi\xi}$$

Из уравнения (2.7) можно исключить четвертую производную $\varphi_{1,\xi\xi\xi\xi}$. Для этого подставим (2.3) в главную часть (1.13) и соберем члены порядка σ . Имеем

$$c_0^2\Delta^2\varphi_1 = U^2\Delta\varphi_{1\xi\xi} - g\Delta(hd_1)$$

Теперь уравнение (2.7) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} (c_0^2 + Up)\Delta\varphi_1 + \varphi_{1\xi\xi}(2Up - U^2) + 3d_1\varphi_{1\xi} + \frac{1}{3}U^2H_0^2\Delta\varphi_{1\xi\xi} + \\ + ghd_1 + H_0h(U^2 - \frac{1}{2}c_0^2)d_3 + \frac{1}{6}c_0^2\Delta(hd_1) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Это уравнение более удобно, чем уравнение (2.7), оно соответствует наличию двух условий непротекания на бортах канала (2.2).

Рассмотрим решение уравнения (2.8) в области $|\xi| \geq L$, где можно положить $p = d_1 = d_3 = 0$. Имеем

$$c_0^2\Delta\varphi_1 - U^2\varphi_{1\xi\xi} + \frac{1}{3}H_0^2U^2\Delta\varphi_{1\xi\xi} = 0 \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) для φ_1 описывает распространение линейных волн вдали от солитона. При этом, в связи с тем что были учтены только члены порядка σ и, следовательно, малая поправка $\sigma h(y)$ входила в уравнение только в комбинации с φ_0 , решения уравнения (2.9) совпадают с решениями уравнения, описывающего распространение линейных волн в канале с постоянной глубиной. Решениями уравнения (2.9) являются функции $\varphi_1 = Ce^{i(k_x\xi + k_y y)}$, волновые числа k_x , k_y и фазовая скорость U должны удовлетворять дисперсионному соотношению

$$\frac{1}{3}U^2H_0^2k_x^4 + (U^2 - c_0^2 + \frac{1}{3}U^2H_0^2k_y^2)k_x^2 - c_0^2k_y^2 = 0 \quad (2.10)$$

Рассмотрим теперь граничные условия на стенках канала (2.2)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial\Phi_m}{\partial y} \frac{z^m}{m!} = 0 \quad (y=0, \quad y=B) \quad (2.11)$$

Эти условия должны быть выполнены при всех z , поэтому при $y=0, y=B$ требуется

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_m}{\partial y} = 0 \quad \forall m \quad (2.12)$$

Так как φ представляется в виде (2.3), а φ_0 не зависит от y , то первое из условий (2.12) записывается в виде

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0 \quad (y=0, \quad y=B) \quad (2.13)$$

Если $\varphi_1 = Ce^{i(k_x\xi + k_y y)}$, то из (2.13) следует

$$k_y = n\pi/B, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (2.14)$$

Так как изучаются длинные волны, то величина n при заданном B не может быть слишком большой: $n \ll 2B/H_0$.

Рассмотрим условие (2.12) при $m = 1$. Используя выражение (1.9) и учитывая члены порядка не выше σ^2 , имеем

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = -\sigma^2 \left(H_0 \Delta \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{dh}{dy} \partial \varphi_0 \right) \quad (2.15)$$

следовательно, условие (2.12) при $m = 1$ выполнено, если

$$\frac{dh}{dy} = 0, \quad y = 0, \quad y = B \quad (2.16)$$

В силу (1.7), (2.14), (2.16) условия для $m = 2, 3, 4$ выполняются автоматически.

В области, занятой солитоном, представим решение уравнения (2.8) и функцию $h(y)$, задающую дно, в виде рядов

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\xi) \cos(k_y y), \quad h(y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \cos(k_y y), \quad k_y = \frac{n\pi}{B} \quad (2.17)$$

В общем случае ряды Фурье (2.17) содержат также члены, соответствующие $n = 0$. Здесь считается, что эти члены учтены в φ_0 и H_0 . Если условие (2.16) не выполнено, то будем аппроксимировать форму дна функцией h_a

$$h_a = \sum_{n=1}^N h_n \cos(k_y y)$$

Для h_a условие (2.16) выполнено, в то же время при достаточно большом N отличие h_a от h мало.

Подставляя ряды (2.17) в уравнение (2.7), для каждой амплитуды a_n получим следующее линейное уравнение четвертого порядка с коэффициентами, зависящими от ξ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} H_0^2 U^2 a_{n\xi\xi\xi\xi} + (c_0^2 - U^2 + 3Up - \frac{1}{3} H_0^2 U^2 k_y^2) a_{n\xi\xi} + 3Ud_1 a_{n\xi} - \\ & -(c_0^2 + Up) k_y^2 a_n + (1 - \frac{1}{6} H_0^2 k_y^2) g h_n d_1 + (H_0 U^2 - \frac{1}{3} c_0^2 H_0) h_n d_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Будем рассматривать решение уравнения (2.18), удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$a_n \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow +\infty, \quad |a_n| < \infty, \quad \xi \rightarrow -\infty \quad (2.19)$$

Условие при $\xi \rightarrow +\infty$ означает, что впереди солитона сохраняется покой. Это согласуется с тем, что солитон распространяется со скоростью, большей скорости малых возмущений. Ограниченность амплитуды a_n при $\xi \rightarrow -\infty$ связана с отсутствием приходящих из $-\infty$ решений.

Условия (2.19) определяют решение уравнения (2.18) однозначно. В самом деле, рассмотрим поведение решения на больших расстояниях от солитона, где p, d_1, d_3 можно считать равными нулю. Тогда из (2.18) следует

$$\frac{1}{3} H_0^2 U^2 a_{n\xi\xi\xi\xi} + (c_0^2 - U^2 - \frac{1}{3} H_0^2 U^2 k_y^2) a_{n\xi\xi} - c_0^2 k_y^2 a_n = 0 \quad (2.20)$$

Общим решением уравнения (2.20) является

$$a_n = C_1 e^{-\lambda_n \xi} + C_2 e^{\lambda_n \xi} + C_3 \cos q_n \xi + C_4 \sin q_n \xi \quad (2.21)$$

$$q_n^2 = \frac{3}{2H_0^2} \left(1 - \frac{c_0^2}{U^2} + \frac{H_0^2 k_y^2}{3} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{4c_0^2 k_y^2 H_0^2}{1 - c_0^2 / U^2 + H_0^2 k_y^2 / 3}} + 1 \right) \quad (2.22)$$

$$\lambda_n^2 = \frac{3}{2H_0^2} \left(1 - \frac{c_0^2}{U^2} + \frac{H_0^2 k_y^2}{3} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{4c_0^2 k_y^2 H_0^2}{1 - c_0^2 / U^2 + H_0^2 k_y^2 / 3}} - 1 \right) \quad (2.23)$$

Здесь константы C_i различны для областей впереди и позади солитона.

Условия (2.19) означают, что при $\xi \rightarrow \infty$ в решении (2.21) должно быть $C_2 = C_3 = C_4 = 0$, а при $\xi \rightarrow -\infty$ должно быть $C_1 = 0$. Эти четыре условия можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_{n\xi} &= -\lambda_n a_n, \quad a_{n\xi\xi} = \lambda_n^2 a_n, \quad a_{n\xi\xi\xi} = -\lambda_n^3 a_n, \quad \xi \rightarrow \infty \\ a_{n\xi\xi\xi} + \lambda_n a_{n\xi\xi} + q_n^2 a_{n\xi} + \lambda_n q_n^2 a_n &= 0, \quad \xi \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (2.24)$$

Условия (2.24) и использовались при нахождении решений. Для каждого n такие решения далеко позади солитона представляют собой синусоидальные волны, распространяющиеся вдоль канала со скоростью U и имеющие длину $l_n = 2\pi/q_n$.

Профиль хвостовой волны в поперечном направлении определяется из формулы (2.17).

Для построения решений в работе применялся численный метод, аналогичный известному методу прогонки для краевых задач для уравнений второго порядка [9]. Расчеты проводились с использованием двух групп безразмерных переменных. Первая группа безразмерных переменных такова

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{\xi}{H_0}, \quad A_n = \frac{a_n}{c_0 H_0}, \quad U' = \frac{U}{c_0}, \quad p' = \frac{p}{c_0}, \quad k_y' = k_y H_0 \\ B' &= \frac{B}{H_0}, \quad d_1' = \frac{d_1 H_0}{c_0}, \quad d_3' = \frac{d_3 H_0^3}{c_0}, \quad h_n' = \frac{h_n}{H_0} \end{aligned} \quad (2.25)$$

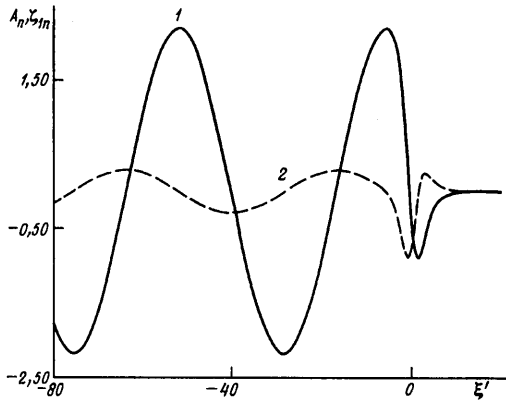
При использовании безразмерных переменных (2.25) уравнение (2.18) принимает вид (штрихи опущены)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} U^2 A_{n\xi\xi\xi\xi} + (1 - U^2 + 3Up - \frac{1}{3} U^2 k_y^2) A_{n\xi\xi\xi} + 3U d_1 A_{n\xi} - \\ -(1 + Up) k_y^2 A_n + (1 - \frac{1}{6} k_y^2) d h_n d_1 + (U^2 - \frac{1}{3}) h_n d_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Так как $d_3/d_1 = O(\beta)$, то при малых β последним членом в уравнении (2.26) можно пренебречь по сравнению с членом, пропорциональным d_1 .

На фиг. 1 в качестве примера приведены графики распределения вдоль канала функций A_n и $\zeta_{1n} = U' A_{n\xi}$ – разделенных на параметрах σ , поправок к амплитудам потенциала и возвышения свободной поверхности солитона при $n = 2$. Если неровность дна определяется формулой $h = \cos(2\pi y/B)$, то за солитоном образуются именно эти волны. На фиг. 2 показан вид свободной поверхности канала при $y = 0$.

Как видно из формулы (2.23), длина хвостовых волн l при фиксированной скорости солитона U увеличивается с увеличением ширины канала B , причем $l \rightarrow \infty$ при $B \rightarrow \infty$. При фиксированной ширине канала величина l увеличивается с увеличением скорости солитона U . При уменьшении U , т.е. при $U \rightarrow c_0$, длина хвостовых волн стремится к



Фиг. 1. $A_n(\xi)$ (1), $\zeta_{1n}(\xi)$ (2) – поправки к амплитудам потенциала и возвышения свободной поверхности, разделенные на параметр σ , $B' = 100$, $U' = 1$, $n = 2$

величине l_0

$$l_0 = \sqrt{\frac{4\pi B H_0}{n\sqrt{3}}} \quad (2.27)$$

На фиг. 3 приведены графики зависимости амплитуды хвостовых волн от скорости солитона при различных значениях ширины канала. При увеличении скорости амплитуда ведет себя немонотонно, достигая максимального значения a_{\max} при некотором $U = U_*$. При увеличении ширины канала B величина U_* уменьшается, а a_{\max} слабо возрастает.

В работе использовались также безразмерные переменные (1.1), в которых в качестве линейного масштаба выступает величина порядка длины солитона $L = H_0/\sqrt{\beta}$

$$\xi'' = \frac{\xi\sqrt{\beta}}{H_0}, \quad A_{\beta n} = \frac{a_n\sqrt{\beta}}{c_0 H_0}, \quad p'' = \frac{p}{\beta c_0}, \quad d_1'' = \frac{d_1 H_0}{\beta\sqrt{\beta} c_0} \quad (2.28)$$

Когда выполнено условие

$$M = \frac{n^2 \pi^2 H_0^2}{B^2 \beta^2} = \frac{k_y^2 H_0^2}{\beta^2} \ll \frac{1}{\beta} \quad (2.29)$$

из (2.18) в переменных (2.28) следует уравнение, содержащее кроме h_n только один параметр M

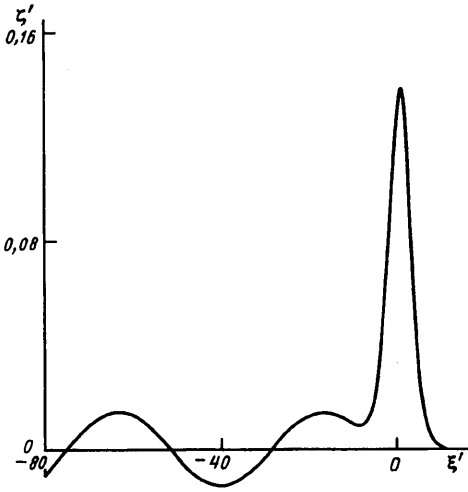
$$\frac{1}{3} A_{\beta n \xi \xi \xi} + (3p - 1) A_{\beta n \xi \xi} + 3d_1 A_{\beta n \xi} - M A_{\beta n} + h_n d_1 = 0 \quad (2.30)$$

При этом в (2.18) величина U была заменена на $c_0(1 + \beta/2)$ и оставлены только главные по β члены, а также использованы приближенные выражения для коэффициентов с учетом условия (2.29). На фиг. 4 показана зависимость величин $A_{\beta n}$ и $A_{\beta n \xi}$ от параметра M . При фиксированной скорости солитона U с ростом ширины канала B величина $A_{\beta n}$ стремится к константе, значение которой близко к $\sqrt{4/3}$, так что

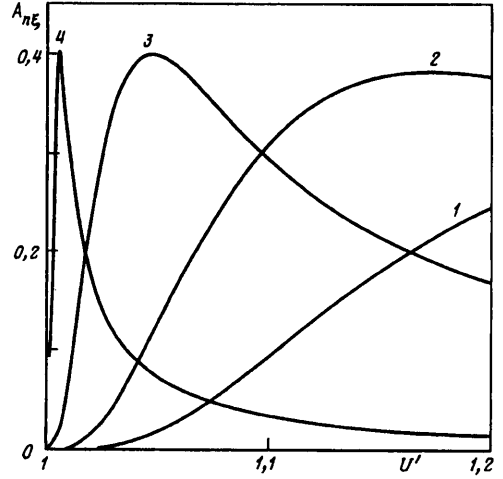
$$a_n \rightarrow \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{c_0 H_0}{\sqrt{\beta}}, \quad B \rightarrow \infty, \quad U = \text{const}$$

Амплитуда хвостовых волн имеет максимум при M , близком к единице. В этом случае длина этих волн близка к длине солитона.

Рассмотрим случай, когда $M = k_y^2 H_0^2 / \beta^2 \gg 1$, что соответствует малым длинам хвос-



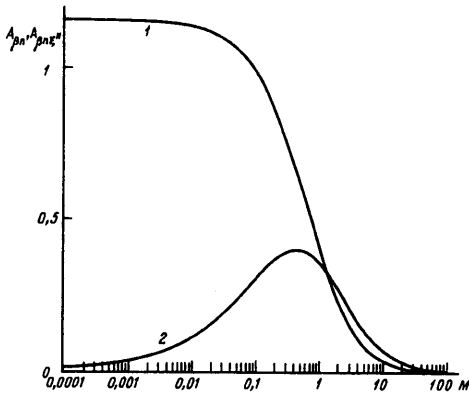
Фиг. 2



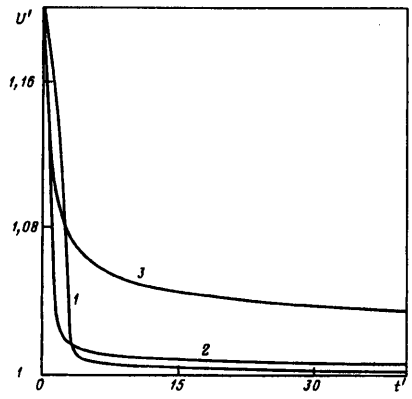
Фиг. 3

Фиг. 2. Вид свободной поверхности в сечении $y = 0$, $B' = 100$, $U' = 1$, $n = 2$, $\sigma = 0,05$

Фиг. 3. Зависимость амплитуды хвостовых волн от скорости солитона при ширине канала $B' = 10, 25, 100, 1000$ (кривые 1-4)



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Зависимость $A_{\beta n}(M)$ (1), $A_{\beta n \xi}(M)$ (2), $M = k_y^2 H_0^2 / \beta^2$

Фиг. 5. Изменение скорости солитона за счет излучения волн при ширине канала $B' = 100, 50, 10$ (кривые 1-3), $t' = (c_0 \sigma^2 / 64 H_0) t$

товых волн. Тогда в уравнении (2.30) можно пренебречь членами, содержащими низшие производные по ξ по сравнению с высшими

$$\frac{1}{3} A_{\beta n \xi \xi \xi \xi} - M A_{\beta n} + h_n d_1 = 0 \tag{2.31}$$

Общее решение уравнения (2.31) имеет вид

$$A_{\beta n}(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} (B_2 e^{r\xi} + B_3 e^{-ir\xi} + B_4 e^{ir\xi}) h_n d_1(x) dx + \int_{\xi}^{\infty} B_1 e^{-r\xi} h_n d_1(x) dx$$

$$B_1 = \frac{-e^{-rx}}{4r^3}, \quad B_2 = \frac{e^{rx}}{4r^3}, \quad B_3 = \frac{e^{irx}}{4ir^3}, \quad B_4 = \frac{e^{-irx}}{-4ir^3}, \quad r = M^{1/4}$$

Таким образом в этом случае решение может быть представлено через гипергеометрические ряды.

В полученном в этой работе стационарном решении происходит потеря энергии солитоном, так как групповая скорость хвостовых волн меньше скорости солитона. Потеря энергии пропорциональна квадрату амплитуды излученной волны. Если амплитуда излученной волны порядка параметра σ , характеризующего неровность дна, то потери энергии происходят чрезвычайно медленно. Поэтому солитон и излученную волну можно рассматривать как квазистационарное решение. Но за длительное время потери энергии приводят к изменению солитона, которое можно учесть следующим образом:

$$\frac{dE}{dt} = - \left(U - \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \right) (T + V) \quad (2.32)$$

Здесь E – энергия солитона, T и V – кинетическая и потенциальная энергия хвостовых волн, приходящиеся на единицу длины канала.

$$E = \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \rho g B H_0^3 \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right)^{3/2}, \quad T = V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho B H_0 a_n^2 (k_x^2 + k_y^2)}{8} \sigma^2 \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \frac{k_x^2 U (1 - (k_x^2 U^2 H_0) / 3g)}{k_x^2 + k_y^2} < U \quad (2.34)$$

Выписанные выражения для T и V представляют собой главные члены энергии хвостовых волн, вычисленные по теории мелкой воды. График изменения скорости солитона за счет уноса энергии хвостовыми волнами, полученный с помощью численного решения уравнения (2.32) при $n = 2$, приведен на фиг. 5. Эффект затухания солитона усиливается с увеличением ширины канала.

Заключение. Выведена новая форма двумерного уравнения Буссинеска для волн над неровным дном. Рассмотрено распространение солитона в длинном горизонтальном канале с неизменным поперечным сечением и неровным дном. Найдены хвостовые волны, порождаемые движением солитона малой амплитуды. Для канала заданной ширины амплитуда хвостовых волн зависит от амплитуды солитона немонокотонно, достигая максимума при некотором значении амплитуды солитона. Оценены потери энергии солитона, связанные с излучением хвостовых волн.

Автор выражает благодарность А.Г. Куликовскому за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00277).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
2. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
3. *Peregrine D.H.* Long waves on a beach // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 27. Pt 4. P. 815–827.
4. *Биченков Е.И., Гарипов Р.М.* Распространение волн на поверхности тяжелой жидкости в бассейне с неровным дном // ПМТФ. 1969. № 2. С. 21–26.
5. *Куликовский А.Г., Реутов В.А.* Распространение нелинейных волн над полубесконечными подводными впадинами и хребтами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 2. С. 53–61.
6. *Бахолдин И.Б.* Разрывы переменных, характеризующих распространение уединенных волн в слое жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 87–93.
7. *Mei C.C.* The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. Singapore: World Scientific, 1989, 764 p.
8. *Mei C.C., Le Méhauté B.* Note on the equations of long waves over an uneven bottom // *J. Geophys. Res.* 1966. V. 71. P. 393–400.