

УДК 532.59

© 2000 г. И.Б. БАХОЛДИН

## СТРУКТУРЫ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ПРЫЖКОВ ПРИ НАЛИЧИИ ЛЕДОВОГО ПОКРЫТИЯ

Исследуются скачки типа боры, возникающие в слое жидкости с ледовым покрытием. Рассматриваются структуры таких скачков, когда определяющим механизмом является дисперсия, обусловленная наличием ледового покрытия. Для этого используется обобщенное уравнение Кортевега – де Вриза [1]. Структура таких скачков представляет собой расширяющуюся со временем волновую зону. На границе волновой зоны имеются переходы между однородными и периодическими состояниями, которые локально можно рассматривать как скачки. Среди них имеются скачки, которые в системе координат, связанной с границей волновой зоны, можно рассматривать как стационарные. Это скачки между последовательностью уединенных волн и однородным состоянием (скачки солитонного типа) на границе волновой зоны и скачки между периодическим и однородным состояниями (скачки с излучением). Кроме того, имеются скачки, нестационарные и при локальном анализе. С целью исследования влияния на рассматриваемые скачки диссипативных процессов выводится система обобщенных уравнений Буссинеска с учетом уклона дна и трения о дно и лед. Численно исследуется процесс затухания скачков. Эта система уравнений позволяет исследовать и незатухающие скачки типа паводковых волн.

В [2] для общего случая симметричных бездиссипативных моделей с дисперсией, а в [3] для моделей типа обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза были проанализированы все возможные типы скачков. При этом под скачками понимаются все возможные переходы между однородными, периодическими, квазипериодическими, стохастическими состояниями. Задачей данной работы являются конкретизация этих результатов применительно к длинным волнам на поверхности жидкости с ледовым покрытием и анализ влияния слабых диссипативных процессов, имеющих место в природе. Скачки могут возникать при выходе приливной волны на шельф (приливная бора) или при начале сброса воды с плотины. Исследование для плотины особенно актуально в связи с тем, что большая величина изгиба может привести к образованию трещин и последующему разрушению льда, что может ухудшить экологию района в зимнее время. Правильно управляя процессом сброса воды, этих трещин можно избежать. С другой стороны, в весеннее время может быть специально организована паводковая волна значительной интенсивности с целью освобождения бассейна ото льда.

**1. Исследование скачков без учета диссипации.** Для описания длинных волн малой амплитуды на поверхности жидкости подо льдом [1] используем обобщенное уравнение Кортевега – де Вриза в размерной форме

$$\eta_t + \frac{3}{2} \frac{\sqrt{gH}}{H} \eta \eta_x + \sqrt{gH} \eta_x + \frac{1}{2} \sqrt{gH} \left( \frac{H^2}{3} + Hh - \frac{\sigma_0}{g\rho} \right) \eta_{xxx} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{H}{g}} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho} \eta_{xxxx} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $x$  – горизонтальная ось,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\eta$  – возвышение поверхности жидкости относительно нулевого уровня,  $H$  – невозмущенная глубина жидкости,  $h$  – толщина слоя льда,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль Юнга,  $\rho$  – плотность,  $\sigma_0$  – начальное натяжение льда по горизонтали.

В результате сброса воды уровень воды у плотины будет отличаться от уровня до начала сброса. Возникает задача о распаде начального разрыва. Для того чтобы применить результаты исследований работы [3] к задаче о боре, возникающей в результате начала сброса воды с плотины, необходимо знать величину повышения уровня после сброса воды. Если известна скорость сбрасываемой воды или расход воды через плотину, то возвышение поверхности можно определить, исходя из условия сохранения инварианта Римана [4]

$$u + \sqrt{2g(H + \eta)} = \sqrt{2gH}, \quad \eta \approx \sqrt{H/g} u$$

где  $u$  – усредненная по глубине скорость жидкости.

Представляет интерес величина  $\eta_{xx}$ , поскольку она связана с величиной напряжений во льду. Максимальные напряжения достигаются на верхней или нижней границе льда и определяются формулой

$$\sigma_{xx} = \pm \frac{Eh}{2R(1 - \nu^2)} + \sigma_{0,xx}, \quad R \approx -\eta_{xx}$$

Здесь  $R$  – радиус кривизны срединной поверхности ледяной пластины, практически можно считать, что это радиус кривизны поверхности жидкости. При  $|\sigma_{xx}| \sim 10^6 \text{ Нм}^{-2}$  происходит разрушение льда.

Будем рассматривать указанные выше задачи как задачи об эволюции начального разрыва, т.е. эволюции начальных данных типа сглаженной ступеньки. С течением времени решение приобретает автомодельный характер и зависит только от амплитуды начального разрыва, поэтому характер сглаживания не принципиален, фактически использовалась функция  $[1 + \tanh(-x/l)]$ .

Для получения численных решений используется трехслойная схема с центральными разностями. С целью уменьшения числа варьируемых параметров задачи, а также для более эффективного использования вычислительных методов сделаем переход к движущейся системе координат  $x \rightarrow x - \sqrt{gH}t$ , а затем перейдем к безразмерным переменным  $t = Tt'$ ,  $x = Xx'$ ,  $\eta = A\eta'$  таким образом, что

$$\frac{3}{2} \frac{\sqrt{gH}}{H} \frac{AT}{X} = 1, \quad \sqrt{gH} \left| \frac{H^2}{6} + \frac{hH}{2} - \frac{\sigma_0 h}{2g\rho} \right| \frac{T}{X^3} = 1, \quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{H}{g}} \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)\rho} \frac{T}{X^5} = 1$$

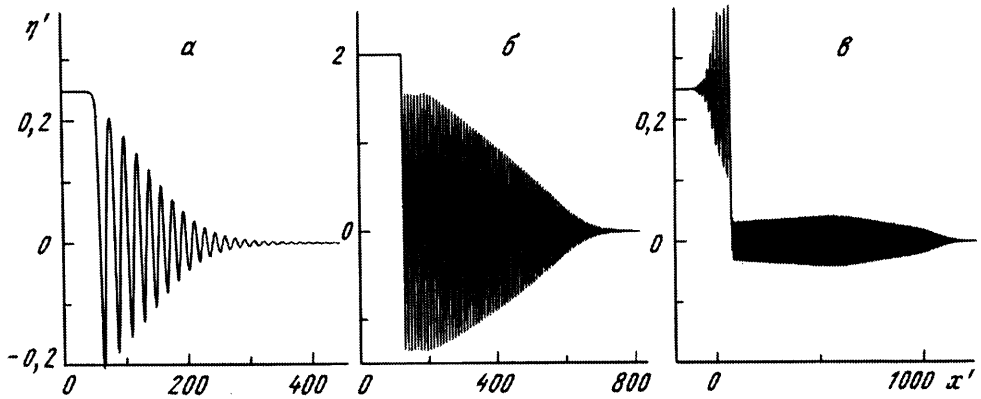
Уравнение примет нормированный вид

$$\eta' + \eta' \eta_{x'} \pm \eta'_{x'x'} + \eta'_{x'x'x'} = 0 \quad (1.2)$$

Из (1.1) видно, что знак при  $\eta'_{x'x'x'}$  в (1.2) зависит от величины начальных напряжений, глубины жидкости и толщины слоя льда. Единственным варьируемым параметром является амплитуда начального разрыва. Для того чтобы нормированный вид уравнения при знаке минус полностью совпал с видом, использовавшимся в [3], необходимо сделать еще преобразование:  $\eta \rightarrow -\eta$ ,  $x \rightarrow -x$ .

Примеры графиков  $\eta'(x)$  для всех возможных типов решений приведены на фиг. 1. Это решения со скачками солитонного типа, со скачками с излучением и со скачками с нестационарной структурой.

В первом случае (фиг. 1, а) участки с постоянными значениями  $\eta$  разделяются волновой зоной. Огибающая волн с течением времени приобретает автомодельный характер (зависит от  $x/t$ ). На одной из границ волновой зоны с течением времени последовательность волн стремится к последовательности уединенных волн.



Фиг. 1. Типичные виды зависимости возвышения поверхности от пространственной координаты: *а* и *б* – знак минус при производной третьего порядка, *в* – знак плюс. Значения амплитуды начального разрыва 2 (*б*,  $t = 150$ ) и 0,25 (*а* и *в*,  $t = 500$ )

Во втором случае (фиг. 1, *б*) волновая зона также автомодельно расширяется со временем, но здесь она состоит из участка центрированной простой волны огибающей и участка с постоянной амплитудой волны. На границе волновой зоны имеется локальный скачок между участком с постоянным значением  $\eta$  и участком с постоянной амплитудой волны огибающей. Структура этого скачка стационарна.

В третьем случае (фиг. 1, *в*) волновую зону можно разделить на два участка, между которыми имеется локальный скачок с нестационарной структурой, с обеих сторон от этого скачка участки волновых зон обладают свойством хаотичности. При уменьшении амплитуды начального разрыва нестационарные свойства скачка ослабевают, амплитуда волн в волновой зоне справа от скачка уменьшается, решение становится сходным с решением со скачком солитонного типа.

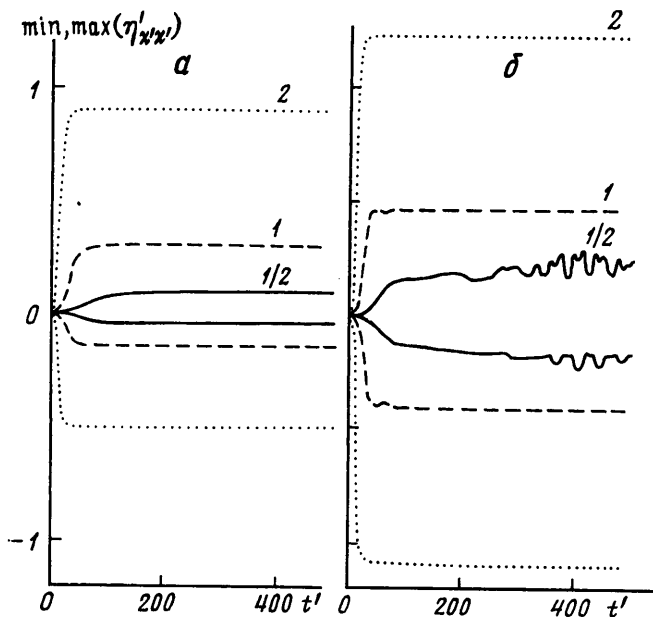
Тип скачка зависит от амплитуды начального разрыва [3]. Пусть  $\eta' \rightarrow 0$  при  $x' \rightarrow +\infty$  и  $\eta' \rightarrow \eta_2$  при  $x' \rightarrow -\infty$ . Для определения типа скачка следует рассмотреть решение системы уравнений, описывающих дисперсионную кривую и прямую, соответствующую фазовой скорости скачка  $U$

$$\omega = \eta_2 k \mp k^3 + k^5, \quad \omega = Uk \quad (1.3)$$

Значение  $U$  определяется из численного эксперимента. В случае скачков с нестационарной структурой подразумевается средняя скорость.

При знаке минус существует некоторое критическое значение  $\eta_{2*} \approx 0,417$ , определяемое из анализа решений (1.3). В случае  $\eta_2 > \eta_{2*}$  значение  $k$  комплексно, возникает скачок с излучением. При  $\eta_2 < \eta_{2*}$  значение  $k$  чисто мнимое, возникает скачок солитонного типа.

В случае знака плюс также возможны два типа решений. При большой амплитуде развивается скачок с излучением, при маленькой – скачок со структурой нестационарного типа. Теоретические исследования устанавливают интервал  $\eta_{2*} < \eta_2 < \eta_{2*}$  в котором могут быть решения обоих типов. Значение  $\eta_{2*} \approx 0,522$  соответствует точке перехода от действительных значений  $k$  к комплексным. При  $\eta_2 > \eta_{2*}$  возможен скачок с излучением [2]. При  $\eta_{2*} \approx 0,887$  скорость скачка совпадает с минимумом групповой скорости. Для  $\eta_2 > \eta_{2*}$  излучение волн в область слева от скачка невозможно, поэтому невозможен скачок с нестационарной структурой. Путем числен-



Фиг. 2. Зависимость от времени максимальных и минимальных значений производной второго порядка. *a* – знак минус при производной третьего порядка, *б* – знак плюс. Нормированная амплитуда начального разрыва указана у кривых

ного анализа было выявлено значение  $\eta_{2**} \approx 0,68$  для точки перехода от скачков с нестационарной структурой к стационарным скачкам с излучением.

На фиг. 2 приведены графики зависимости от времени максимальных и минимальных значений  $\eta'_{x'x'}$  при различных значениях амплитуды начального разрыва в случае знака минус (*a*) и плюс (*б*) при производной третьего порядка. При знаке плюс нормированное значение напряжений выше. Чтобы можно было сопоставить рассчитанные значения напряжений с максимально допустимыми напряжениями во льду, нужно знать размерные значения напряжений. Ниже приводятся коэффициенты пересчета от нормированных значений к физическим для случая  $\sigma_0 = 0$  и  $h \ll H$

$$X = \sqrt{\frac{Eh^3}{4H^2(1-\nu^2)\rho g}}, \quad T = \frac{6X^3}{H^2\sqrt{gH}} = \sqrt{\frac{9E^3h^9}{16(1-\nu^2)^3H^{10}\rho^3g^3}}\sqrt{gH}^{-1}$$

$$A = \frac{2XH}{3T\sqrt{gH}} = \frac{4H^5(1-\nu^2)\rho g}{9Eh^3}, \quad \sigma_{xx} = \Sigma \eta'_{x'x'}, \quad \Sigma = \frac{8H^7(1-\nu^2)(\rho g)^2}{9h^5E}$$

Значения физических постоянных:  $E \approx 3 \cdot 10^9 \text{ Нм}^{-2}$ ,  $\nu \approx 0,3$ ,  $\rho \approx 10^3 \text{ кгм}^{-3}$ ,  $g \approx 9,8 \text{ мс}^{-2}$ .

Рассмотрим типичные значения глубины и толщины льда для шельфовой зоны:  $H = 10 \text{ м}$ ,  $h = 1 \text{ м}$ . Имеем следующие значения для коэффициентов пересчета:  $X = 29 \text{ м}$ ,  $T = 149 \text{ с}$ ,  $A = 0,132 \text{ м}$ ,  $\Sigma = 2,59 \cdot 10^5 \text{ Нм}^{-2}$ . Это означает, что для случаев, показанных на фиг. 2, разрушение льда не происходит. Критическое значение  $|\sigma_{xx}| \sim 10^6 \text{ Нм}^{-2}$  достигается при больших значениях нормированной амплитуды  $\eta'_2 \sim 4,24$  (расчет величины  $\eta'_{x'x'}$  при больших значениях  $\eta'_2$  можно провести, воспользовавшись тем, что при  $\eta'_2 = 2$  максимальное значение  $\eta'_{x'x'} \approx 1,25$ , см. фиг. 2 *б*, и асимптотикой, приведенной ниже).

Физическая скорость скачка  $V$  определяется формулой

$$V = \sqrt{gH} + UX/T$$

Поскольку рассматриваются скачки малой амплитуды, то для практических целей (не для определения типа скачка теоретическим способом [2]) нелинейной добавкой можно пренебречь и считать, что  $V = \sqrt{gH}$ . Если же нелинейную добавку для скачков достаточно большой интенсивности ( $\eta'_2 > 1$ ) все же необходимо учесть, то можно применять формулу  $U = c\eta_2$ ,  $c \approx 0,405$ . Эта численно выявленная асимптотическая зависимость связана с тем, что при увеличении амплитуды скачка можно пренебречь членом с производной третьего порядка и применять уравнение с производной только пятого порядка. Для такого уравнения при любом значении амплитуды скачки оказываются подобны друг другу:  $\eta_2 \rightarrow K\eta_2$ ,  $x \rightarrow K^{-1/4}x$ ,  $t \rightarrow K^{-1/4}t$ ,  $\eta_{xx} \rightarrow K^{3/2}\eta_{xx}$ .

**2. Включение в постановку задачи дополнительных природных факторов.** Рассмотрим задачу о сбросе воды с плотины в такой постановке, чтобы в рамках длинноволнового приближения максимально учесть все реальные эффекты. Для этого будем использовать аналог уравнений Буссинеска с учетом льда и с дополнительными членами, описывающими энергетические потери на турбулентные процессы

$$\eta_t + (u(H + \eta))_x = 0 \quad (2.1)$$

$$u_t + uu_x + g\eta_x + c_f \frac{u|u|}{(H + \eta)} - g\alpha + \left[ -du_x + \left( \frac{1}{3}gH^2 - \frac{h\sigma_{0xx}}{\rho} + gHh \right) \eta_{xx} + \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)\rho} \eta_{xxxx} \right]_x = 0 \quad (2.2)$$

Здесь  $c_f$  – коэффициент трения,  $\alpha$  – уклон речного русла, эта величина предполагается малой,  $d$  – коэффициент турбулентной вязкости. Данная система уравнений представляет собой обобщение различных систем уравнений приближения длинных волн (уравнения Буссинеска для волн подо льдом [1], обычные уравнения Буссинеска [4, 5], уравнения Сен-Венана [4, 6, 7], уравнения мелкой воды с учетом турбулентной диссипации [8]).

Уравнение (2.1) представляет собой уравнение сохранения массы, усредненное по глубине, способ его вывода очевиден, (2.2) – усредненный закон сохранения импульса. Поясним, как оно выводится. Пусть имеется система координат  $x, y$ , ось  $x$  которой направлена вдоль дна, а ось  $y$  перпендикулярна дну,  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  – компоненты скорости жидкости. Имеем закон изменения импульса в направлении оси  $x$  в интегральной форме

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \int_0^{H + \eta} \rho u dx dy = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \int_0^{H + \eta} \rho g \alpha dx dy - \int_0^{H + \eta} P dy |_{x=x_0 + \Delta x} + \int_0^{H + \eta} P dy |_{x=x_0} + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \tau dx$$

где  $\tau$  – сила трения, определяемая по закону Шези. Если уклона нет, то будем предполагать, что диссипативные процессы происходят только в пограничном слое и не оказывают влияния на распределение скорости в остальном объеме и в рассматриваемом длинноволновом приближении [4]

$$(u, v) = \text{grad}(f - y^2 / 2f_{xx}), \quad f = f(x)$$

При наличии уклона можно говорить о потенциальности поля скоростей возмущений относительно медленно меняющегося в пространстве и во времени установившегося течения, считая, что влиянием диссипативных процессов на эти

возмущения можно пренебречь. Из закона изменения импульса в направлении оси  $y$  находим

$$P = P_0 + \rho g(H + \eta - y) + \int_y^{H+\eta} \rho \nu_i dy, \quad P_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \eta_{xxxx} - h\sigma_{0,xx} \eta_{xx} + \rho h \eta_{tt}$$

где  $P_0$  – давление подо льдом [1].

После перехода к скорости, усредненной по глубине, устремляя величину  $\Delta x$  к нулю, получаем искомое уравнение. При этом было принято во внимание, что в приближении, используемом при стандартном выводе уравнений Буссинеска [4],  $\eta_{tt}$  и  $u_{xt}$  можно заменять на  $gH\eta_{xx}$  и  $-g\eta_{xx}$ . При этом требуется дополнительное предположение, что членами со вторыми производными от  $u$  и  $\eta$ , умноженными на малые коэффициенты  $\alpha$  или  $c_f$  можно пренебречь.

Член с турбулентной вязкостью в эти уравнения включен формально. Здесь, как и в общем случае дисперсионно-диссипативных моделей, включение слабой вязкости ведет со временем к замещению нестационарных волновых зон стационарными структурами колебательного типа.

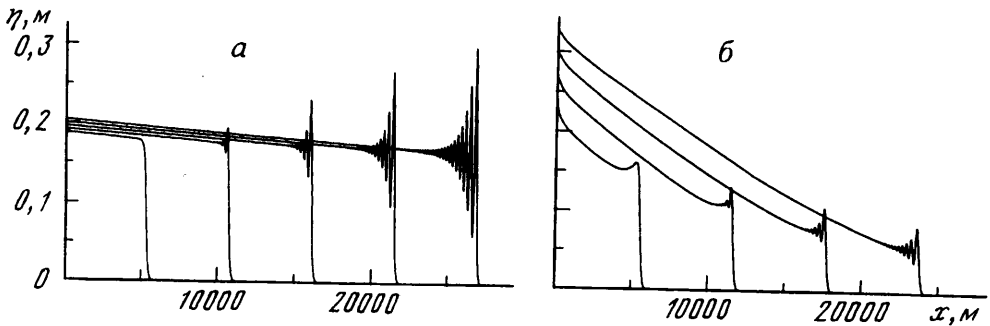
Система (2.1), (2.2) решалась численно с применением центральных пространственных разностей. При аппроксимации по времени применялась явная двухслойная схема первого порядка точности, а также явная двухслойная схема с пересчетом второго порядка точности (терминологию см. в [9]). Уравнение Буссинеска без смешанных пространственно-временных производных обладают свойством неустойчивости коротких волн [5]. Эта неустойчивость не имеет физического смысла в силу длинноволнового характера модели и носит чисто математический характер. Поэтому для расчетов таких уравнений приходится применять схемы с диссипативными свойствами. Численные эксперименты показали, что при расчетах с достаточно большим пространственным шагом схемной вязкости используемых численных схем оказывается достаточно для стабилизации расчета. Расчеты с мелким шагом возможны только с включением слабой турбулентной вязкости. Такой подход к вязкости как к средству стабилизации расчета в работе [8] рассматривается как общепринятый в практических расчетах уравнений длинных волн на воде.

Рассмотрим задачу о плотине с заданным расходом воды. Предполагается, что в начальный момент времени имеется некоторый установившийся расход воды. Затем этот расход плавно увеличивается до некоторого нового значения. Начальные и граничные условия

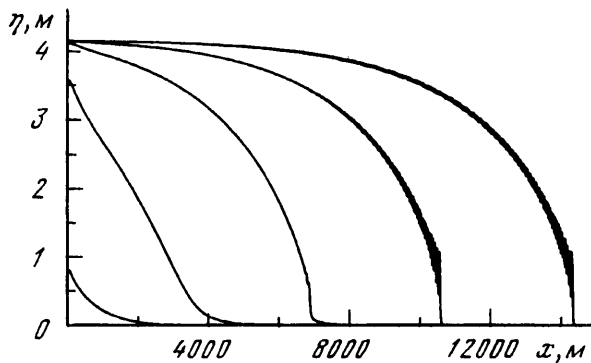
$$\begin{aligned} t = 0 : \eta = 0, \quad u = u_0 = \sqrt{gH\alpha/c_f} \\ x = 0 : u(H + \eta)|_{x=0} = q(t), \quad q(t) = u_0 H + \Delta q \{ \tanh[(t - \Delta)/\delta] + 1 \} / 2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Правая граница удалена на такое расстояние, чтобы распространяющиеся от левой границы волны с ней не взаимодействовали. На этой границе формально были выставлены условия симметрии  $(u, \eta)_{k+i} = (u, \eta)_{k-i}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $k$  – пространственный номер последнего рассчитываемого сеточного узла. Программный комплекс был снабжен средствами увеличения размеров расчетной области по мере надобности.

Аналогичная формальная установка недостающих граничных условий возможна и на левой границе. Возможна установка некоторых дополнительных условий и из физических соображений, например жесткое закрепление ледяной кромки или отсутствие такого закрепления. С целью более корректной постановки задачи дисперсионные эффекты вблизи левой границы были исключены: коэффициенты при производных третьего и пятого порядка в уравнении (2.2) были выбраны стремящимися к нулю при  $x \rightarrow 0$ . Это предположение не оказывает существенного влияния на решение, дисперсия актуальна только для исследования скачков. С физической точки зрения это можно интерпретировать как наличие полыньи вблизи плотины. С математической точки зрения при таком предположении система вблизи границы становится гиперболической и в случае "дозвукового" (аналогия с газовой динамикой) течения одного граничного условия (2.3) достаточно. Однако численная схема с центральными разностями в



Фиг. 3. Влияние уклона дна на затухание скачка;  $H = 10$  м,  $h = 0,5$  м,  $\Delta q = 2$  м<sup>2</sup>/с,  $c_f = 0,0025$ . Уклон: а –  $\alpha = 0$ , б –  $\alpha = 0,0001$ . Интервал времени между графиками 500 с



Фиг. 4. Формирование паводковой волны большой интенсивности;  $c_f = 0,0025$ ,  $\alpha = 0,001$ ,  $H = 1$  м,  $h = 0,5$  м,  $\Delta q = 30$  м<sup>2</sup>/с. Интервал времени между графиками 500 с

случае производных первого порядка требует знания двух значений на границе:  $u$  и  $\eta$ . Для получения дополнительной связи между этими величинами использовалось характеристическое соотношение [4]

$$(u + 2\sqrt{g(H + \eta)})_t + (u - \sqrt{g(H + \eta)})(u + 2\sqrt{g(H + \eta)})_x = g\alpha - c_f u |u| / (H + \eta)$$

На фиг. 3 приведены графики возвышения поверхности с интервалом времени 500 с, иллюстрирующие зависимость решений от изменения  $\alpha$ ,  $c_f = 0,005$ . Коэффициент  $c_f = 0,0025$  соответствует бетонным каналам [4]. При наличии льда следует учесть и трение о лед, поэтому этот коэффициент был удвоен. Как видно из фиг. 3, а, при отсутствии уклона дна (в частности, в случае исследования распространения приливной волны на шельфе) затухание скачка незначительно, поэтому можно применять теорию разд. 1. При наличии уклона (фиг. 3, б) затухание скачка, распространяющегося со скоростью, близкой к  $u + \sqrt{gH}$ , существенно. В обоих случаях после выхода на постоянный расход происходит плавный подъем воды у плотины. Если имеется конечный уклон, то этот подъем заканчивается по достижении стационарного уровня  $H + \eta = [q^2 c_f / (g\alpha)]^{1/3}$  (для получения этой формулы следует в (2.2) подставить  $u = q / (H + \eta)$  и приравнять к нулю все производные) и начинается распространение скачка другого, незатухающего типа – моноклиальной паводковой

волны [4]. В рассматриваемом случае стационарный уровень ( $\eta \approx 0,93$  м) достигается через большой промежуток времени, поэтому на фиг. 3, б тенденция к стабилизации не видна. В силу того что структура паводковой волны имеет большую длину, эффектами дисперсии при ее распространении в рассматриваемом случае можно пренебречь. Таким образом, обычный скачок является предвестником более сильной паводковой волны и целью его исследования может быть раннее предупреждение паводка. Зная амплитуду скачка в некоторой точке наблюдения, величины  $H$ ,  $h$ ,  $c_f$ ,  $\alpha$  и расстояние от плотины, можно определить изменение расхода и амплитуду паводковой волны.

Паводковые волны большой интенсивности, т.е. распространяющиеся со скоростью большей, чем характеристическая скорость в невозмущенной области, при стандартном анализе в рамках уравнений Сен-Венана имеют стационарную структуру с внутренним скачком с диссипацией (борой) [4]. В этом случае влияние дисперсии от ледяного покрытия можно учесть и получить структуру таких паводковых волн. Структура внутреннего скачка в случае преобладания дисперсии приобретает колебательный характер и неотделима от структуры всей паводковой волны. Пример такого решения приведен на фиг. 4 (графики с интервалом времени 500 с). Данный пример следует рассматривать как качественную иллюстрацию, поскольку он выходит за рамки допущений, сделанных при выводе исходных уравнений, например не выполняется условие  $\eta \ll H$ .

**Заключение.** Нестационарные аналоги гидравлического "прыжка" подо льдом могут играть существенную роль при образовании трещин и разрушении ледового покрытия. В зависимости от масштабов явления и от того, приливные это волны на шельфе или же волны в канале, целесообразно применять различные асимптотические модели длинных волн без учета или же с учетом диссипативных процессов.

Автор благодарит А.А. Бармина за ценные замечания, А.В. Марченко за рекомендации и предоставленную литературу. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 99-01-01150) и грантом поддержки ведущих научных школ № 96-15-96035.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко А.В. О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 230–234.
2. Бахолдин И.Б. Структуры эволюционных скачков в обратимых системах // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 52–62.
3. Бахолдин И.Б. Скачки, описываемые обобщенными уравнениями Кортевега – де Вриза // Изв. РАН МЖГ. 1999. № 4. С. 95–109.
4. Уизем Дж.Б. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
5. Марчук Ан.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование волн цунами. Новосибирск: Наука, 1983. 175 с.
6. Стокер Дж.Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.
7. Кучмент Л.С. Модели процессов формирования речного стока. Л., Гидрометеоздат, 1980. 143 с.
8. Методы расчета турбулентных течений / Под ред. В. Колльмана. М.: Мир, 1984. 464 с.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

Москва

Поступила в редакцию  
9.VI.1999