

УДК 532.529:534.2

© 2000 г. И.Ш. АХАТОВ, Д.Б. ХИСМАТУЛЛИН

## ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДЛИННЫХ И КОРОТКИХ ВОЛН В ПУЗЫРЬКОВЫХ ЖИДКОСТЯХ

Рассматривается взаимодействие длинных и коротких волн в разреженной монодисперсной смеси слабосжимаемой вязкой жидкости с пузырьками газа. Для учета диссипативных эффектов используется схема с эффективной вязкостью. Выделяются четыре случая диссипации: сильный, средний, слабый и очень слабый. В случаях средней, слабой и очень слабой диссипации с применением метода многих масштабов выводятся уравнения нерезонансного и резонансного взаимодействия волн. В некоторых из построенных моделей обнаруживается эффект "вырождения" взаимодействия. В случае "вырождения" строится и численно исследуется класс новых моделей диссипативного резонансного взаимодействия.

Пузырьковая жидкость наряду с плазмой и многослойной жидкостью в поле сил тяжести является физической системой, обладающей ярко выраженными нелинейными волновыми свойствами. Эволюция слабых возмущений в этой среде в зависимости от вида возмущений описывается классическими уравнениями теории нелинейных волн – уравнением Кортевега – де Вриза [1–3], нелинейным уравнением Шредингера [4], уравнениями генерации второй гармоники [5, 6].

Из-за наличия пузырьков газа дисперсионная кривая для пузырьковой жидкости разделяется на две ветви – низкочастотную и высокочастотную [3]. Поэтому в этой среде возможно одновременное распространение длинноволновых и коротковолновых возмущений. Наиболее сильно взаимодействие между длинной и короткими волнами проявляется при совпадении групповой скорости коротких волн с фазовой скоростью длинной волны (длиннокоротковолновый резонанс [7]). Резонансное недиссипативное взаимодействие между длинной и короткой волнами в плазме, на поверхности воды и в пузырьковой жидкости описывается системой уравнений Захарова [8–10]. Для пузырьковой жидкости в отличие от других физических систем коэффициенты взаимодействия одновременно обращаются в нуль при определенной частоте короткой волны [10]. В случае такого "вырождения" взаимодействия были построены и численно исследованы новые модели резонансного взаимодействия [10].

Влиянию диссипации на нелинейную эволюцию слабых возмущений в пузырьковой жидкости посвящена обширная литература (см. [2, 4, 5, 11]). В частности, в книге [2] проводится теоретическое и экспериментальное исследование динамики длинноволновых возмущений в диссипативной пузырьковой среде, для описания эволюции длинных волн предлагается использовать уравнение Бюргерса – Кортевега – де Вриза. В случае слабой нелинейности, а также с учетом вязкости несущей жидкости и процессов теплообмена в газе коротковолновая модуляция в пузырьковой среде может быть описана уравнением Гинзбурга – Ландау [4]. Более общий случай диссипативной модуляции нелинейных волн рассматривается в [11]. В статье [5] исследуется эффект вынужденного рассеяния звука в жидкостях с пузырьками газа.

В настоящей работе проводится изучение взаимодействия между длинноволновыми и коротковолновыми возмущениями в пузырьковой жидкости при наличии диссипации.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим дисперсную среду, состоящую из небольшого количества газовых пузырьков, пространство между которыми заполнено однородной жидкостью. Будем считать, что несущая жидкость является слабосжимаемой, все пузырьки имеют одинаковый радиус, давление газа в пузырьках меняется по политропическому закону. Положим также, что среда является бесстолкновительной, т.е. не учитываются непосредственные взаимодействия и столкновения между пузырьками и отсутствуют процессы дробления, слипания и образования новых пузырьков. Пренебрежем действием внешних сил и капиллярными эффектами. Движение такой пузырьковой жидкости описывается уравнениями [3]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{dn}{dt} + n \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\rho_l \left[ a \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 \right] + \frac{4\mu_{ef}}{a} \frac{da}{dt} = p_g - p \quad (1.1)$$

$$\rho_l - \rho_{l0} = \frac{p - p_0}{C_l^2}, \quad \rho = \rho_l (1 - \alpha_g), \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi a^3 n$$

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3\kappa}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

Здесь  $p$ ,  $\rho$ ,  $u$  – давление, плотность и скорость смеси;  $\rho_l$  – истинная плотность жидкости;  $C_l$  – скорость звука в чистой жидкости;  $p_g$ ,  $\alpha_g$ ,  $a$  – давление, объемное содержание и радиус пузырьков;  $n$  – число пузырьков в единице объема смеси;  $\kappa$  – показатель политропы; нулевой индекс означает невозмущенное состояние смеси. Рассматриваемые процессы предполагают колебательный режим радиального движения пузырька. Поэтому для учета диссипативных эффектов используется схема с эффективной вязкостью [3], в которой коэффициент вязкости несущей среды  $\mu_l$  заменяется некоторым эффективным коэффициентом  $\mu_{ef}$ , учитывающим не только обычную физическую вязкость жидкости, но и все другие диссипативные механизмы:  $\mu_{ef} = \mu_l + \mu^{(T)} + \dots$ , где  $\mu^{(T)}$  – коэффициент тепловой диссипации среды.

Система уравнений (1.1) может быть безразмерна заменами

$$a' = \frac{a}{a_0} - 1, \quad p' = \frac{p}{p_0} - 1, \quad \rho' = \frac{p - p_0}{\rho_*}, \quad u' = \frac{u}{v_*}, \quad t' = \frac{t}{t_*}, \quad x' = \frac{x}{l_*}$$

$$\rho_* = \rho_0 \alpha_{g0}, \quad v_* = \sqrt{\frac{\alpha_{g0} p_0}{\rho_0}}, \quad t_* = a_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}}, \quad l_* = \frac{a_0}{\sqrt{\alpha_{g0}}}$$

что в пренебрежении величинами порядка  $\alpha_g$  по сравнению с единицей приводит к уравнениям на возмущения (штрихи опущены) [4]

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x'^2} = 0, \quad \rho' - 1 - b^2 p' + (1 + a)^3 = 0$$

$$(1 + a) \frac{\partial^2 a}{\partial t'^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial a}{\partial t'} \right)^2 + \frac{\mu^*}{1 + a} \frac{\partial a}{\partial t'} - (1 + a)^{-3\kappa} + p' + 1 = 0 \quad (1.2)$$

$$b = \sqrt{\frac{p_0 C_l^{-2}}{\rho_{l0} \alpha_{g0}}}, \quad \mu^* = \frac{4\mu_{ef}}{a_0 \sqrt{p_0 \rho_0}}$$

Нелинейные волновые уравнения, описывающие взаимодействие длинноволновых и коротковолновых возмущений, можно получить с использованием метода много-

масштабных разложений [12]. Согласно этому методу вектор решения  $\mathbf{z} = (a, p, \rho)$  системы (1.2) разлагается по степеням некоторого малого параметра  $\varepsilon$  (характеризующего амплитуду возмущения) на длинноволновую и коротковолновые составляющие

$$\mathbf{z} = \varepsilon^l \sum_{m \geq 1} \varepsilon^{m-1} \mathbf{z}_m^{(0)} + \varepsilon^s \sum_{m, n \geq 1} \varepsilon^{(m-1)n + (n-1)s} [\mathbf{z}_m^{(n)} e^{in\Theta} + \text{c. c.}] \quad (1.3)$$

вводятся быстрые  $(t_0, x_0)$  и медленные переменные  $(t_n, x_n) = \varepsilon^n(t_0, x_0)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , из-за чего операторы дифференцирования заменяются асимптотическими рядами

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t_0} + \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial t_n}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (1.4)$$

Здесь  $\Theta = k_s x_0 - \omega_s t_0$  – фаза короткой волны;  $\mathbf{z}_m^{(0)}, \mathbf{z}_m^{(n)}$ ,  $m, n = 1, 2, \dots$ , – длинноволновые и коротковолновые компоненты решения, зависящие только от медленных переменных;  $l, s$  – некоторые числа, которые вместе с  $\varepsilon$  характеризуют степени малости амплитуд возмущений соответственно длинной и короткой волн.

Для вывода уравнений взаимодействия будем использовать разложения (1.3), (1.4), предполагая в нерезонансном случае  $(l, s) = (2, 1)$ , а при резонансе  $(l, s) = (2, 3/2)$ . При указанных значениях  $(l, s)$  длиннокоротковолновое взаимодействие является нетривиальным, что можно подтвердить анализом членов, возникающих при подстановке разложений в систему уравнений (1.2)<sup>1</sup>.

**2. Уравнения длиннокоротковолнового взаимодействия.** Безразмерный коэффициент эффективной вязкости  $\mu^*$  существенно различается для разных пузырьков жидкостей.

Так, коэффициенты вязкости и тепловой диссипации [3] при нормальных условиях для глицерина с гелиевыми пузырьками радиуса  $a_0 = 0,1$  мм и для воды с воздушными пузырьками радиуса  $a_0 = 1$  мм соответственно составляют

$$\mu_l^* = \frac{4\mu_l}{a_0 \sqrt{\rho_0 \rho_0}} \approx 0,496, \quad \mu^{(T)*} = \frac{4\mu^{(T)}}{a_0 \sqrt{\rho_0 \rho_0}} \approx 0,632 \sqrt{\omega_s}$$

$$\mu_l^* \approx 4 \cdot 10^{-4}, \quad \mu^{(T)*} \approx 0,039 \sqrt{\omega_s}, \quad \omega_s = \Omega a_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0}}$$

Тогда  $\mu^* = \mu_l^* + \mu^{(T)*}$  для глицерина с пузырьками гелия больше примерно в 22 раза (при безразмерной частоте  $\omega_s = 9$ ) соответствующего коэффициента для воды с пузырьками воздуха. Если пренебречь тепловой диссипацией, то это отношение станет еще больше – 1240.

Поэтому можно выделить следующие ситуации: сильная диссипация  $\mu^* = O(1)$ ; средняя диссипация  $\mu^* = O(\varepsilon)$ ; слабая диссипация  $\mu^* = O(\varepsilon^2)$ ; очень слабая диссипация  $\mu^* = O(\varepsilon^3)$ ,  $\varepsilon$  – рассмотренный выше параметр малости. При выборе степени диссипации, взаимодействие длинных и коротких волн будет проявляться по-разному.

В случае сильной диссипации ( $\mu^* = O(1)$ ) линеаризация системы (1.2) приводит к уравнениям, содержащим вязкостный член

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad \rho = b^2 p + 3a, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \mu^* \frac{\partial a}{\partial t} + 3\kappa a + p = 0 \quad (2.1)$$

Дисперсионное соотношение для уравнений движения (1.2), которое возникает при подстановке в уравнения (2.1) решения в виде плоской гармонической волны  $\mathbf{z} =$

<sup>1</sup> Хисматуллин Д.Б. Математическое моделирование резонансных явлений в динамике пузырьков жидкостей: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Уфа, 1998. 143 с.

$= \mathbf{Z} \exp\{i(kx - \omega t)\}$ , где  $\mathbf{Z} = (A, P, R)$  – неизменяющийся вектор амплитуд решения;  $k, \omega$  – волновое число и частота, имеет вид

$$\omega^4 + i\mu^* \omega^3 - \left(3\kappa + \frac{k^2 + 3}{b^2}\right) \omega^2 - \frac{i\mu^* k^2}{b^2} \omega + \frac{3\kappa k^2}{b^2} = 0 \quad (2.2)$$

Анализ уравнения (2.2) показывает [13], что его вещественная часть разделяется на низкочастотную и высокочастотную компоненты. Обнаружено [13], что диссипация оказывает наибольшее влияние на сигналы высокочастотного спектра. Ввиду этого короткая волна (акустический предвестник) затухает по мере своего распространения гораздо сильнее, чем длинная волна.

Так как диссипация коротких волн имеет место уже в линейной задаче, то при рассмотрении более медленных времен, например  $t_1(t = \varepsilon^{-1}t_1)$ , величины коротковолновых возмущений быстро затухают и не в состоянии влиять на эволюцию длинных волн.

При учете средней диссипации ( $\mu^* = O(\varepsilon)$ ) дисперсионное соотношение системы (1.2) не содержит диссипативных слагаемых

$$\omega_{\pm}^2(k) = \frac{1}{2} \left\{ 3\kappa + \frac{k^2 + 3}{b^2} \pm \sqrt{\left[ 3\kappa - \frac{k^2 + 3}{b^2} \right]^2 + 36 \frac{\kappa}{b^2}} \right\} \quad (2.3)$$

Соотношение (2.3) допускает существование длиннокоротковолнового резонанса. Это следует из анализа его длинноволновых и коротковолновых асимптотик

$$\omega_l = c_e k_l - \chi k_l^3 + O(k_l^5) \quad (k_l \rightarrow 0)$$

$$\omega_s = c_f k_s + O(k_s^{-1}) \quad (k_s \rightarrow \infty)$$

$$c_e = \frac{\omega_l}{k_l} \Big|_{k_l \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{\kappa}{1 + \kappa b^2}}, \quad (2.4)$$

$$c_f = \frac{d\omega_s}{dk_s} \Big|_{k_s \rightarrow \infty} = \frac{1}{b}, \quad \chi = \frac{c_e^5}{6\kappa^2}$$

где  $c_e$  и  $c_f$  – равновесная и замороженная скорости звука в смеси.

Так как групповая скорость короткой волны

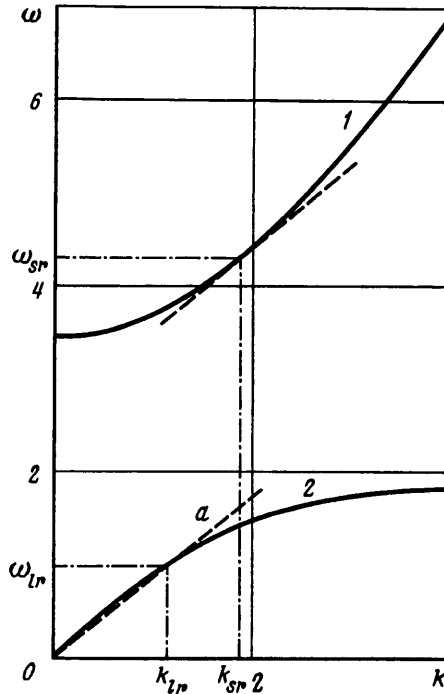
$$c_g = \frac{d\omega_s}{dk_s} = \frac{k_s(\omega_s^2 - 3\kappa)}{\omega_s(2b^2\omega_s^2 - 3(1 + \kappa b^2) - k_s^2)}$$

при стремлении  $k_s$  к нулю является бесконечно малой величиной, а из (2.4) следует, что  $c_f > c_e$ , то для любого достаточно малого  $k_l = k_{lr}$  найдется такое  $k_s = k_{sr}$ , что будет выполнено условие длиннокоротковолнового резонанса  $c_g(k_{sr}) = c_p(k_{lr})$ . В случае бесконечно длинных волн ( $k_l \rightarrow 0$ ) это условие сводится к равенству

$$c_g(k_{sr}) = c_e \quad (2.5)$$

Дисперсионная кривая (2.3) для смеси воды с воздушными пузырьками при нормальных условиях ( $p_0 = 0,1$  МПа,  $\rho_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>) и объемном газосодержании  $\alpha_{g0} = 1,1 \cdot 10^{-4}$  представлена на фиг. 1.

При  $(l, s) = (2, 1)$  и  $\mu^* = \varepsilon\mu$  ( $\mu = O(1)$ ) подстановка многомасштабных разложений (1.3), (1.4) в систему уравнений (1.2) после несложных алгебраических операций приводит к следующим уравнениям на профиль длинной волны  $L = p_1^{(0)}$



Фиг. 1. Дисперсионная кривая для пузырьковой жидкости, 1 и 2 – верхняя и нижняя ветви кривой, соответствующие "+" и "-" в (2.3)

и огибающую коротких волн  $S = p_1^{(1)}$  :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t_1^2} + (c_g^2 - c_e^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = \alpha_1 \frac{\partial^2 |S|^2}{\partial t_1^2} + \alpha \frac{\partial^2 |S|^2}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t_1} + \Gamma S = 0, \quad L = L_0(\eta_1) + L_0(\eta_2) + \Phi(t_1, \xi) \quad (2.6)$$

$$\xi = x_1 - c_g t_1, \quad \eta_1 = x_1 - c_e t_1, \quad \eta_2 = x_1 + c_e t_1$$

$$\Gamma = \frac{\mu \omega_s c_g (b^2 \omega_s^2 - k_s^2)}{2k_s (\omega_s^2 - 3\kappa)}, \quad \alpha_1 = -\frac{6 + b^2 [\omega_s^2 - 3\kappa(3\kappa + 1)]}{3(1 + \kappa b^2)}$$

$$\alpha = -\frac{c_e^2 c_g^2}{\kappa (\omega_s^2 - 3\kappa)^2} [\omega_s^2 - 9\kappa(\kappa + 1)]$$

Здесь  $L_0(x_1)$  – начальное распределение длинной волны.

Второе уравнение (2.6) имеет решение  $S = f(\xi) \exp\{-\Gamma t_1\}$ , после подстановки которого в первое уравнение и в предположении  $\Phi = \Psi(\xi) \exp\{-2\Gamma t_1\}$  получим

$$4\Gamma^2 \Psi + (c_g^2 - c_e^2) \frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} = 4\alpha_1 \Gamma^2 |f|^2 + \alpha \frac{d^2 |f|^2}{d\xi^2} \quad (2.7)$$

Длиннокоротковолновый резонанс характеризуется существенным ростом амплитуд возмущений. Этот рост должен приводить к уменьшению хотя бы одного из пара-

метров малости ( $l, s$ ). Изменение этих параметров возможно только тогда, когда одно из уравнений взаимодействия становится некорректным, например имеет бесконечные коэффициенты. Однако при условии (2.5) уравнение (2.7) сводится к не-сингулярному виду

$$\Psi = \frac{\alpha}{4\Gamma^2} \frac{d^2 |f|^2}{d\xi^2} + \alpha_1 |f|^2$$

Таким образом, при учете средней диссипации длиннокоротковолновой резонанс не проявляется.

В случае слабой диссипации  $\mu^* = O(\varepsilon^2)$  подстановка разложений (1.3), (1.4) с ( $l, s$ ) = (2, 1) в систему (1.2) приводит к более сложным уравнениям на профиль длинной волны  $L = p_1^{(0)}$  и огибающую коротких волн  $S = p_1^{(1)}$ . В предположении

$$L = L_0(\eta_1) + L_0(\eta_2) + \Phi(\xi), \quad S = F(\tau, \xi) \exp\{-i\delta L_0 \tau\}$$

в порядках  $\varepsilon^4$  для  $L$  и  $\varepsilon^3$  для  $S$  возникнут следующие уравнения:

$$\Phi(\xi) = \frac{\alpha}{c_g^2 - c_e^2} |F|^2, \quad i \frac{\partial F}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \gamma |F|^2 F + i\Gamma F = \delta \Phi F \quad (2.8)$$

$$\beta = \frac{c_g}{2k_s} \left\{ 1 + \frac{c_g [4k_s \omega_s + c_g (k_s^2 + 3(1 + \kappa b^2) - 6b^2 \omega_s^2)]}{\omega_s^2 - 3\kappa} \right\}$$

$$\delta = -\frac{c_g \omega_s^2}{2\kappa k_s (\omega_s^2 - 3\kappa)^2} [\omega_s^2 - 9\kappa(\kappa + 1)]$$

$$\gamma = -\frac{[\omega_s^2 - 3\kappa(3\kappa + 1)]\delta}{(\omega_s^2 - 3\kappa)^2} + \frac{c_g (b^2 \omega_s^2 - k_s^2) (\omega_s^4 - 27\kappa^2 (\kappa + 1) \omega_s^2 - 27\kappa^2 (\kappa + 1)^2)}{4k_s \omega_s^2 (\omega_s^2 - 3\kappa)^3}$$

где  $\tau = t_2$ ; остальные коэффициенты приведены в (2.6).

Система уравнений (2.8) легко сводится к известному уравнению Гинзбурга – Ландау [4, 14]

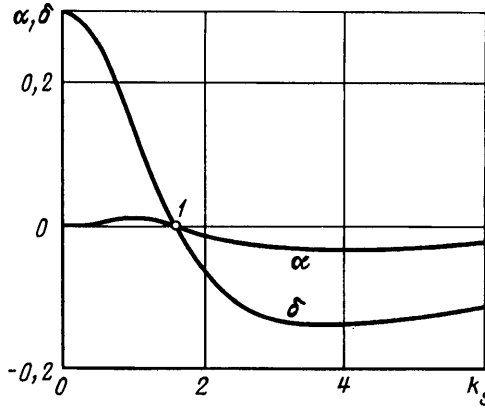
$$i \frac{\partial F}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \gamma' |F|^2 F + i\Gamma F = 0, \quad \gamma' = \gamma - \frac{\alpha \delta}{c_g^2 - c_e^2}$$

При выполнении условия резонанса (2.5) система уравнений (2.8) становится некорректной. Поэтому, как было сказано выше, уравнения резонансного взаимодействия требуют иного выбора степеней малости ( $l, s$ ). При ( $l, s$ ) = (2, 3/2), если рассматривать неизвестные  $L = p_1^{(0)}$  и  $S = p_1^{(1)}$  в виде  $L = L(\tau, \xi)$ ,  $S = S(\tau, \xi)$ ,  $\tau = t_2$ ,  $\xi = x_1 - c_g t_1$ , подстановка разложений (1.3), (1.4) в систему (1.2) приводит в порядке  $\varepsilon^5$  для  $L$  и  $\varepsilon^{7/2}$  для  $S$  к уравнениям

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} + \frac{\alpha}{2c_e} \frac{\partial |S|^2}{\partial \xi} = 0, \quad i \frac{\partial S}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + i\Gamma S = \delta L S \quad (2.9)$$

Эти уравнения представляют собой диссипативный аналог системы уравнений Захарова [8].

Модели взаимодействия вида (2.8) и (2.9) возникают для многих слабонелинейных систем со слабой диссипацией, в частности для волн на поверхности жидкости, в плазме и нелинейной оптике. Тем не менее длиннокоротковолновое взаимодействие в пузырьковой жидкости имеет свою, можно сказать, уникальную специфику. Она обнаруживается при анализе коэффициентов  $\alpha$  и  $\delta$  в уравнениях (2.8) и (2.9).



Фиг. 2. Зависимость коэффициентов взаимодействия  $\alpha$  и  $\delta$  от волнового числа  $k_s$  в нерезонансном случае ( $\kappa = 1,4$ ,  $b = 0,447$ ). Вырождение взаимодействия отмечено точкой 1

Оказывается, при частоте короткой волны

$$\omega_s = 3\sqrt{\kappa(\kappa + 1)} \quad (2.10)$$

оба эти коэффициента обращаются в нуль ("вырождение взаимодействия", фиг. 2).

При таком "вырождении" взаимодействия модели (2.8) и (2.9) превращаются в системы несвязанных уравнений. Тем не менее взаимодействие между волнами существует. Оно возникает в следующих порядках  $\epsilon$  и поэтому проявляется значительно слабее, чем в невырожденном случае.

Так, вырожденное нерезонансное взаимодействие будет описываться системой уравнений

$$\Phi(\xi) = \frac{i\lambda}{c_g^2 - c_e^2} \left( F \frac{\partial F^*}{\partial \xi} - F^* \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)$$

$$i \frac{\partial F}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \gamma |F|^2 F + i\Gamma F = 0$$

$$L_1 = L_{01}(\eta_1) + L_{01}(\eta_2) + \Phi(\xi), \quad F = F(\tau, \xi)$$

где  $L_1 = p_2^{(0)}$ ;  $L_{01}$  – начальный профиль второй длинноволновой компоненты  $L_1$ .

Наибольший интерес представляет исследование вырождения в резонансном случае. Дело в том, что при обращении коэффициентов  $\alpha$  и  $\delta$  в нуль система уравнений (2.9) сводится к двум независимым и линейным уравнениям

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} = 0, \quad i \frac{\partial S}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + i\Gamma S = 0 \quad (2.11)$$

Из первого уравнения (2.11) следует неизменность начального профиля длинной волны с течением времени. Второе уравнение является дисперсионным и диссипативным. Поэтому волновой пакет коротких волн будет расплываться по пространству и затухать по амплитуде с течением времени.

Для построения модели вырожденного резонансного взаимодействия при подстановке (1.3), (1.4) в систему (1.2) учтем все члены до порядка  $\epsilon^6$  для длинной и  $\epsilon^{9/2}$  для короткой волн. Будем предполагать, что  $L = p_1^{(0)}$  и  $S = p_1^{(1)}$  являются функциями

$\xi = x_1 - c_g t_1$ ,  $\tau = t_2$ . Остальные компоненты обозначим как  $L_1 = p_2^{(0)}$ ,  $L_2 = p_3^{(0)}$  и  $S_1 = p_2^{(1)}$ ,  $S_2 = p_3^{(1)}$  и положим, что  $L_1$  и  $S_1$  эволюционируют согласно уравнениям (2.11), а  $L_2 = L_2(\xi)$ ,  $S_2 = S_2(\xi)$ . Тогда в условиях вырождения (2.10) и резонанса (2.5) длиннокоротковолновое взаимодействие будет описываться следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} + \varepsilon \left\{ \chi \frac{\partial^3 L}{\partial \xi^3} + \sigma \frac{\partial L^2}{\partial \xi} - i \lambda \left[ S^* \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} - S \frac{\partial^2 S^*}{\partial \xi^2} \right] \right\} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} - i \beta \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + \Gamma S + \varepsilon \left\{ \eta \frac{\partial^3 S}{\partial \xi^3} + i \gamma S^2 S^* + \Gamma' \frac{\partial S}{\partial \xi} - \nu L \frac{\partial S}{\partial \xi} - \frac{\nu}{2} S \frac{\partial L}{\partial \xi} \right\} = 0 \quad (2.12)$$

$$c_g = c_e = \frac{\kappa(3\kappa + 2)}{(3\kappa + 1)(\kappa + 1)^{1/2}}, \quad \sigma = \frac{\kappa(3\kappa + 2)^3}{4(3\kappa + 1)^3(\kappa + 1)^{1/2}}$$

$$\lambda = \frac{\kappa^{3/2}}{6(3\kappa + 1)^4(3\kappa + 2)(\kappa + 1)^{3/2}} [27\kappa^3 + 18\kappa^2 + 18\kappa + 4]$$

$$\beta = \frac{3\kappa^{5/2}(3\kappa + 2)}{2(\kappa + 1)^{3/2}(3\kappa + 1)^3} [3\kappa^2 + 3\kappa + 2]$$

$$\eta = \frac{\kappa^3(3\kappa + 2)}{6(3\kappa + 1)^5(\kappa + 1)^{3/2}} [81\kappa^4 + 54\kappa^3 + 81\kappa^2 + 60\kappa + 28]$$

$$\gamma = \frac{(\kappa + 1)^{1/2}(9\kappa - 2)}{12\kappa^{1/2}(3\kappa + 1)(3\kappa + 2)^2}, \quad \chi = \frac{\kappa^3(3\kappa + 2)^5}{6(\kappa + 1)^{3/2}(3\kappa + 1)^5}$$

$$\nu = \frac{\kappa(3\kappa + 2)}{(3\kappa + 1)^2(\kappa + 1)^{1/2}}, \quad \Gamma = \frac{3\kappa\mu}{2(3\kappa + 1)}$$

$$\Gamma' = \frac{\kappa^{3/2}\mu(189\kappa^4 + 405\kappa^3 + 288\kappa^2 + 79\kappa + 4)}{2(\kappa + 1)^2(3\kappa + 1)^3(3\kappa + 2)}$$

Все коэффициенты системы (2.12) зависят только от параметра  $\kappa$  и при  $\kappa \geq 1$  положительны.

Легко показать, что при  $S = 0$  система (2.12) сводится к уравнению Кортевега – де Вриза

$$\frac{\partial L}{\partial \tau_1} + \sigma \frac{\partial L^2}{\partial \xi} + \chi \frac{\partial^3 L}{\partial \xi^3} = 0, \quad \tau_1 = \varepsilon \tau = t_3 \quad (2.13)$$

Ввиду наличия диссипативного члена  $\Gamma S$  в более низком порядке по  $\varepsilon$  по сравнению с членами взаимодействия будет происходить быстрое затухание коротковолнового сигнала. Воздействие длинной волны на короткую может сказываться только при больших длинноволновых амплитудах. Это противоречит теории возмущений, согласно которой профиль длинной волны  $L$  должен быть намного меньше величины  $1/\varepsilon$ . С другой стороны, так как огибающая коротких волн быстро затухает, она не успевает воздействовать на длинную волну. Более того, член взаимодействия первого уравнения (2.12) обращается в нуль при синусоидальных начальных условиях [10], т.е. при этом короткая волна вообще не влияет на длинную. Поэтому можно утверждать, что при учете слабой диссипации вырожденное резонансное взаимодействие (при



( $l, s$ ) = 2, 3/2) не проявляется: коротковолновое возмущение затухает, а длинноволновое распространяется в согласии с уравнением КдВ (2.13).

Своеобразие "вырождения" взаимодействия состоит не только в существовании системы (2.12). Оказывается, при условии (2.10) резонансное взаимодействие может быть описано другими моделями. Одна из таких моделей возникает при выборе ( $l, s$ ) = (1, 1).

Когда ( $l, s$ ) = (1, 1), невырожденное взаимодействие тривиально

$$L = L_0(\xi), \quad i \frac{\partial S}{\partial t_1} = \delta L S$$

Однако при выполнении условий вырождения (2.10), т.е. в случае  $\delta = 0$ , резонанса (2.5) и предположения о слабой диссипации, справедливые следующие уравнения (в порядке  $\epsilon^3$  для  $L$  и  $S$ ), описывающие процесс во времени  $\tau = t_2$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} + \sigma \frac{\partial L^2}{\partial \xi} + \epsilon \left\{ \chi \frac{\partial^3 L}{\partial \xi^3} + \xi \frac{\partial L^3}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial L |S|^2}{\partial \xi} + \Gamma_1 |S|^2 - i \lambda \left( S^* \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} - S \frac{\partial^2 S^*}{\partial \xi^2} \right) \right\} = 0 \quad (2.14)$$

$$i \frac{\partial S}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} - \gamma S^2 S^* + i \Gamma S = i \nu L \frac{\partial S}{\partial \xi} + i \frac{\nu}{2} S \frac{\partial L}{\partial \xi} + \delta_1 L^2 S$$

$$\Gamma_1 = \frac{2\mu}{3\kappa(3\kappa+1)(3\kappa+2)^2}, \quad \delta_1 = \frac{(3\kappa+2)^2}{36\kappa^{1/2}(\kappa+1)^{1/2}(3\kappa+1)}$$

$$\zeta = \frac{(3\kappa+2)^3}{36(\kappa+1)^{3/2}(3\kappa+1)^5} [27\kappa^4 + 62\kappa^3 + 45\kappa^2 + 7\kappa - 2]$$

$$\rho = \frac{1}{6(\kappa+1)^{1/2}(3\kappa+1)^5(3\kappa+2)} [27\kappa^3 + 36\kappa^2 - 4]$$

остальные коэффициенты определяются, как ранее.

В первом уравнении (2.14) учтены члены порядка  $\epsilon$ , так как без них профиль длинной волны будет подчиняться уравнению Хопфа

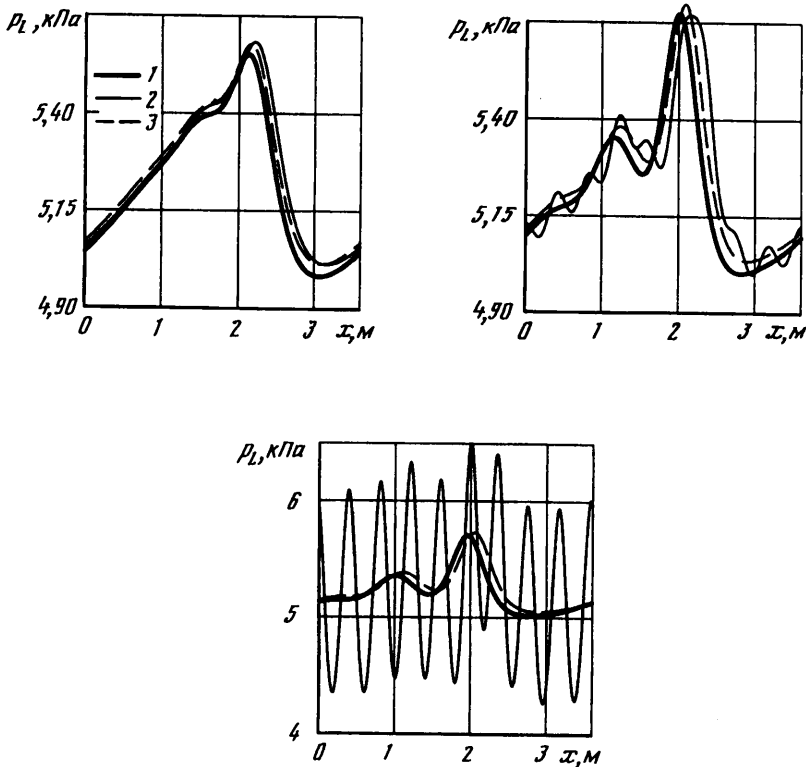
$$\frac{\partial L}{\partial \tau} + \sigma \frac{\partial L^2}{\partial \xi} = 0 \quad (2.15)$$

Это уравнение описывает процесс образования ударной волны из первоначально гладкого профиля. Математически это означает, что в некоторый момент времени в определенной точке пространства  $\xi = \xi_*$  производная  $L$ , а значит, и  $S$ , по  $\xi$  должна стать бесконечной. Поэтому члены следующего порядка  $\epsilon$ , содержащие эти производные, в том числе более высоких порядков, становятся настолько большими, что в состоянии повлиять на динамику длинно-коротковолнового взаимодействия.

Очень слабая диссипация  $\mu^* = O(\epsilon^3)$  может быть учтена только в порядке  $\epsilon^{9/2}$  для первой гармоники короткой волны. Единственный случай, когда она влияет на динамику возмущений, – это вырождение резонансного взаимодействия при ( $l, s$ ) = (2, 3/2). Тогда модель вырожденного резонансного взаимодействия имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} + \epsilon \left\{ \chi \frac{\partial^3 L}{\partial \xi^3} + \sigma \frac{\partial L^2}{\partial \xi} - i \lambda \left[ S^* \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} - S \frac{\partial^2 S^*}{\partial \xi^2} \right] \right\} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} - i \beta \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + \epsilon \left\{ \eta \frac{\partial^3 S}{\partial \xi^3} + i \gamma S^2 S^* + \Gamma S - \nu L \frac{\partial S}{\partial \xi} - \frac{\nu}{2} S \frac{\partial L}{\partial \xi} \right\} = 0 \quad (2.16)$$



Фиг. 3. Эволюция профиля длинноволнового возмущения  $p_L = \epsilon p_0 L$  согласно модели (2.14) в воде с воздушными пузырьками радиуса  $a_0 = 1$  мм при нормальных условиях и  $\epsilon = 0,1$ ,  $\alpha_{g0} = 3,02 \cdot 10^{-4}$ ,  $L_0 = 5$ ,  $S_0 = 5$ ,  $\Delta L = \Delta S = 0,05$ ; линия 1 – с учетом диссипации ( $\mu_{ef} = 2,5 \cdot 10^{-5}$  кг/(м · с)), 2 – без учета диссипации, 3 – без учета диссипации при нулевой амплитуде короткой волны

**3. Численное моделирование вырожденного резонансного взаимодействия.** Для численного интегрирования моделей (2.14) и (2.16) используется трехслойная явная схема с четвертым порядком аппроксимации по координате, предложенная ранее [15] для численного решения уравнения КдВ. Применяются периодические краевые условия и начальные условия вида

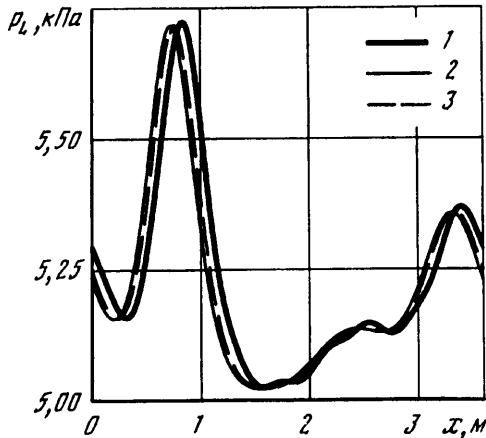
$$L|_{\tau=0} = L_0(1 + \Delta L[1 - \cos \xi])$$

$$S_r|_{\tau=0} = S_0(1 + \Delta S[1 - \cos \xi]), \quad S_i|_{\tau=0} = 0 \quad (3.1)$$

где  $S_r = \text{Re}(S)$ ;  $S_i = \text{Im}(S)$ ;  $L_0, S_0, \Delta L, \Delta S$  – вещественные постоянные.

Без учета диссипации ( $\mu = 0$ ) система (2.14) численно исследовалась в [10]. Было показано, что с течением времени происходит укрупнение, а затем и разрушение длинноволнового профиля. Это разрушение возникало при ненулевой амплитуде короткой волны и поэтому было названо нелинейной неустойчивостью.

На фиг. 3 показано распределение длинноволнового возмущения по пространственной переменной  $x = (a_0 \alpha_{g0}^{-1/2} / \epsilon) \xi$  в различные моменты времени при учете слабой диссипации (линия 1) и без ее учета (линии 2 и 3, соответствующие случаю ненулевой и нулевой амплитуды короткой волны). В диссипативном случае нелинейная неустойчивость не развивается и длинноволновое возмущение распространяется почти в



Фиг. 4. Зависимость профиля длинноволнового возмущения  $p_L = \epsilon p_0 L$  от пространственной координаты  $x = (a_0 \alpha_{g0}^{-1/2} / \epsilon) \xi$  согласно модели (2.14) в воде с воздушными пузырьками при тех же параметрах, что на фиг. 3, в момент времени  $t = 0,8$  с для  $\mu_{ef} = 0,5 \cdot 10^{-5}$ ;  $1,25 \cdot 10^{-5}$ ,  $2,5 \cdot 10^{-5}$  кг/(м · с) (линии 1–3)

согласии с сильно нелинейным уравнением КдВ

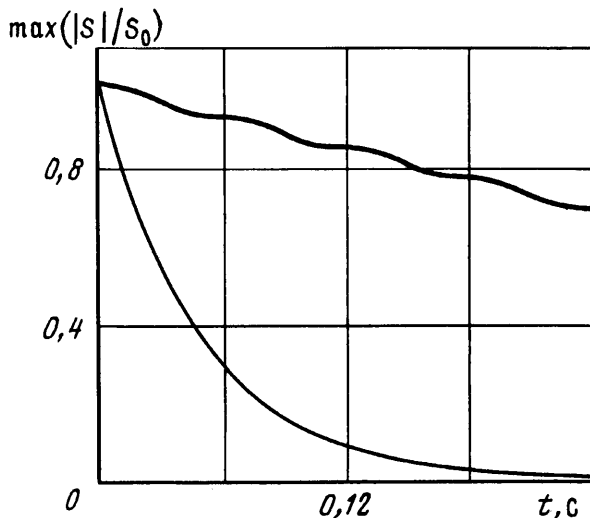
$$\frac{\partial L}{\partial \tau} + \sigma \frac{\partial L^2}{\partial \xi} + \epsilon \zeta \frac{\partial L^3}{\partial \xi} + \epsilon \chi \frac{\partial^3 L}{\partial \xi^3} = 0$$

Диссипация приводит лишь к незначительному уменьшению амплитуды и скорости уединенной длинной волны. Исчезновение неустойчивости связано с быстрым затуханием коротковолнового сигнала, из-за чего вклад  $S$  в  $L$  становится малым даже при укрупнении коротковолнового распределения. Тем не менее с уменьшением коэффициента диссипации  $\mu$  нелинейная неустойчивость снова возникает (фиг. 4, линия 1). Это объясняется тем, что при малой диссипации амплитуда короткой волны падает медленно и нелинейные искажения коротковолнового сигнала достаточны для разрушения длинноволнового профиля.

Недиссипативный вариант системы (2.16) был численно проанализирован в [10] с применением численной схемы и краевых и начальных условий, указанных выше. Было обнаружено, что длинноволновое возмущение распространяется в согласии с уравнением КдВ (2.13). При этом в момент образования солитона КдВ наблюдался значительный переток энергии из длинной волны в короткую, приводящий, несмотря на сильную дисперсию, к росту амплитуды коротковолновой синусоиды с незначительными нелинейными искажениями ее формы.

Переток энергии обеспечивается наличием членов взаимодействия  $L \partial S / \partial \xi$  и  $S \partial L / \partial \xi$ . В случае, когда  $L$  растет или хотя бы не уменьшается в некоторой точке пространства  $\xi = \xi_*$ , эти члены обеспечивают положительность производной  $\partial S / \partial \tau$  в  $\xi_*$ , а значит, и возрастание со временем амплитуды коротких волн в данной точке.

Как показывает численный расчет, учет очень слабой диссипации в модели (2.16) приводит к затуханию коротковолновых возмущений. Если значение  $\mu$  достаточно велико, то амплитуда короткой волны с течением времени экспоненциально уменьшается (фиг. 5, линия 2). Взаимодействие между длинными и короткими волнами проявляется при более малом коэффициенте диссипации. Оно приводит к тому, что кривая падения коротковолновой амплитуды принимает ступенчатый вид (фиг. 5,



Фиг. 5. Кривая падения максимального значения амплитуды короткой волны с течением времени согласно модели (2.16) ( $\mu_{ef} = 0,5 \cdot 10^{-6}$ ;  $2,5 \cdot 10^{-6}$  кг/(м · с) – линии 1,2). Рассматривается вода с воздушными пузырьками радиуса  $a_0 = 1$  мм при нормальных условиях и  $\epsilon = 0,1$ ,  $\alpha_{g0} = 3,02 \cdot 10^{-4}$ ,  $L_0 = 1$ ,  $S_0 = 1$ ,  $\Delta L = 0,25$ ,  $\Delta S = 0,01$

линия 1). Такое периодическое замедление процесса затухания обеспечивается указанными выше членами взаимодействия и происходит в моменты сильного перетока энергии из длинной волны в короткую.

**Заключение.** Проанализировано влияние сильной (эффективный коэффициент диссипации  $\mu^* = O(1)$ ), средней ( $\mu^* = O(\epsilon)$ ), слабой ( $\mu^* = O(\epsilon^2)$ ) и очень слабой диссипации ( $\mu^* = O(\epsilon^3)$ ) на взаимодействие длинных и коротких волн в пузырьковой жидкости. Для построения уравнений взаимодействия использован метод многомасштабных разложений. В случае сильной диссипации взаимодействие между длинноволновыми и коротковолновыми возмущениями не возникает, а при средней диссипации исчезает длиннокоротковолновой резонанс.

В слабодиссипативном случае модель нерезонансного взаимодействия сводится к уравнению Гинзбурга – Ландау относительно огибающей короткой волн, а резонансное взаимодействие описывается диссипативным вариантом системы уравнений Захарова. Выявлено существование эффекта "вырождения" взаимодействия, который возникает при определенной частоте короткой волны и характеризуется одновременным обращением коэффициентов взаимодействия в нуль. При наличии слабой диссипации вырожденное резонансное взаимодействие может быть описано двумя новыми моделями. Одна из них соответствует порядкам малости  $\epsilon^2$  для длинных волн и  $\epsilon^{3/2}$  для коротких, а другая – соответственно  $\epsilon^1$ ,  $\epsilon^1$ . Недиссипативные варианты этих моделей были представлены и численно исследованы в работе [10]. Наличие слабой диссипации в уравнениях взаимодействия, соответствующим ( $\epsilon^2$ ,  $\epsilon^{3/2}$ ), приводит к быстрому затуханию коротковолновых возмущений и распространению длинных волн в соответствии с уравнением КдВ. Как показывает численный анализ модели с ( $\epsilon^1$ ,  $\epsilon^1$ ), слабая диссипация подавляет нелинейную неустойчивость недиссипативного взаимодействия.

Очень слабая диссипация влияет только на вырожденное резонансное взаимодействие в случае ( $\epsilon^2, \epsilon^{3/2}$ ). Она приводит к затуханию коротковолновых возмущений. Но при анализе недиссипативного взаимодействия было обнаружено, что в определенные моменты времени происходит сильная перекачка энергии из длинной волны в короткую. Поэтому временная кривая падения коротковолновой амплитуды является ступенчатой, характеризующаяся участками быстрого и медленного затухания возмущений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wijngaarden L., van.* On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 33. Pt. 3. P. 465–474.
2. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: Институт теплофизики СО АН СССР, 1983. 237 с.
3. *Нигматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.; Ч. 2. 360 с.
4. *Гумеров Н.А.* О квазимонохроматических слабонелинейных волнах в пузырьковой среде с малой диссипацией // *ПММ.* 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 58–67.
5. *Заболотская Е.А.* Нелинейные волны в жидкости с пузырьками газа // *Тр. ИОФАН.* 1989. Т. 18. С. 121–155.
6. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 237 с.
7. *Benney D.J.* A general theory for interactions between short and long waves // *Stud. Appl. Math.* 1997. V. 56. № 1. P. 81–94.
8. *Захаров В.Е.* Коллапс ленгмюровских волн // *ЖЭТФ.* 1972. Т. 62. Вып. 5. С. 1745–1759.
9. *Djordjevic V.D., Redekopp L.G.* On two-dimensional packets of capillary-gravity waves // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 79. Pt. 4. P. 703–714.
10. *Ахатов И.Ш., Хисматуллин Д.Б.* Длиннокоротковолновое взаимодействие в пузырьковых жидкостях // *ПММ.* 1999. Т. 63. Вып. 6. С. 980–990.
11. *Gumerov N.A.* Equations describing the propagation of nonlinear modulation waves in bubbly liquids // *Bubble Dynamics and Interface Phenomena / Dordrecht: Kluwer, 1994. P. 131–140.*
12. *Jeffrey A., Kawahara T.* Asymptotic methods in nonlinear wave theory. London, etc.: Pitman, 1982. 256 p.
13. *Шагапов В.Ш.* Распространение малых возмущений в жидкости с пузырьками // *ПМТФ.* 1977. № 1. С. 90–101.
14. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
15. *Березин Ю.А.* Численное исследование нелинейных волн в разреженной плазме. Новосибирск: Наука, 1977. 109 с.

Уфа

Поступила в редакцию  
13.VII.1999