

УДК 532.529.5:533.7

© 2000 г. А.Н. ВОЛКОВ, Ю.М. ЦИРКУНОВ

КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПРИМЕСИ В ЗАПЫЛЕННОМ ГАЗЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ

Методами статистической физики выведено основное кинетическое уравнение, описывающее динамику полидисперсной примеси из твердых частиц в течениях слабоконцентрированных газовзвесей. Учитываются вращение частиц, их неупругие столкновения друг с другом и взаимодействие с несущим газом. Из основного кинетического уравнения получено уравнение Больцмановского типа относительно одночастичной функции распределения, для которого сформулированы граничные условия в задаче обтекания тела запыленным газом. На основе развитой кинетической модели методом прямого статистического моделирования получены картины течения и поля макропараметров дисперсной фазы при поперечном обтекании цилиндра однородным потоком газовзвеси для различных размеров частиц и их концентрации в невозмущенном потоке.

При обтекании тел двухфазным потоком газ – твердые частицы в случае монодисперсной примеси может возникать несколько качественно различных типов течения дисперсной фазы [1]. Реализация того или иного типа течения зависит от концентрации частиц в натекающем потоке, их инерционности (числа Стокса) и механизма взаимодействия частиц с поверхностью тела. Все типы течения примеси, кроме одного, могут быть описаны в рамках модели бесстолкновительной среды частиц. Однако во многих задачах столкновения между частицами играют определяющую роль в формировании картины течения как дисперсной фазы, так и несущего газа. Например, при обтекании затупленного тела грубодисперсной газовзвесью столкновения между падающими и отраженными от тела частицами начинают влиять на поле течения дисперсной фазы при очень малой объемной концентрации примеси в набегающем потоке $\alpha_{\text{гос}} \sim 10^{-6}$. Это примерно в 10 раз меньше, чем концентрация частиц, при которой становится заметным обратное влияние дисперсной фазы на течение несущего газа [1]. Такой тип течения представляет большой интерес с точки зрения возникновения экранирующего эффекта, когда часть кинетической энергии падающих частиц "рассеивается" в результате столкновений с отраженными и хаотически движущимися частицами, что ведет к уменьшению интенсивности абразивной эрозии тела [2, 3].

Несмотря на значительный прогресс в кинетической теории газовзвесей за последние два десятилетия (см., например, монографию [4] и ссылки в ней), в настоящее время имеются лишь единичные работы, в которых обтекание тел запыленным газом моделируется с учетом столкновений между частицами примеси [3, 5, 6]. В исторически первой работе [5] уравнения механики столкновительной дисперсной фазы вводятся феноменологически: "газ" частиц, имеющий собственное давление, описывается модифицированными уравнениями Эйлера, содержащими источник членов, которые учитывают межфазный обмен и переход частиц из бесстолкновительной фракции в столкновительную (хаотически движущуюся). Близкие по структуре уравнения для дисперсной фазы как сплошной среды, но выведенные из кинетического

уравнения Больцмановского типа, используются в [6]. В обеих работах фактически принимаются допущения о том, что характерная длина свободного пробега дисперсных частиц между столкновениями друг с другом λ_* много меньше характерного линейного масштаба течения L_* (т.е. число Кнудсена в "газе" частиц $Kn_* = \lambda_*/L_* \ll 1$) и распределение частиц по скоростям является локально-равновесным (максвелловским).

Однако в задаче обтекания тел слабоконцентрированной смесью газа с частицами ни первое, ни второе допущения не выполняются [7]. Во-первых, в невозмущенном потоке движение примеси является, как правило, бесстолкновительным ($Kn_* \gg 1$), в то время как около тела может существовать область, где $Kn_* \sim 1$, а при достаточно высокой концентрации частиц – и область континуального течения ($Kn_* \ll 1$). Во-вторых, при неупругих столкновениях между частицами кинетическая энергия их хаотического движения в изолированной системе все время убывает и не существует равновесного распределения частиц по скоростям максвелловского типа [7].

В [3] для расчета движения примеси используется метод прямого статистического моделирования, основанный на кинетической модели среды частиц, что позволяет избежать отмеченных выше недостатков работ [5, 6]. Однако полученные в [3] результаты относятся только к влиянию столкновений между частицами на эрозию обтекаемой поверхности, вопрос же о структуре течения дисперсной фазы не рассматривается. Кроме того, в [3] не учитывается вращение частиц, которое играет важную роль как при столкновениях частиц между собой и с поверхностью тела, так и при движении частиц в потоке газа.

Целью данной работы является получение методами статистической физики основного кинетического уравнения для разреженной системы полидисперсных твердых частиц, движущихся в несущем газе и неупруго сталкивающихся между собой, а также постановка и численное решение методом прямого статистического моделирования задачи об обтекании тела (цилиндра) однородным потоком запыленного газа, когда газовая фаза рассматривается как сплошная среда, а примесь – как дискретная система частиц.

1. Динамика частиц примеси. Будем считать твердые частицы примеси сферическими и имеющими в общем случае различные размеры. Примем обычное в механике грубодисперсных аэрозолей допущение о том, что несущий газ при обтекании отдельной частицы можно рассматривать как сплошную среду и при этом наследственные и нестационарные эффекты (которые порождают силы типа сил Бассэ, Архимеда и присоединенной массы) несут существенны [8].

Рассмотрим движение системы N частиц в несущем газе. Состояние i -й частицы будем характеризовать точкой x_i фазового пространства, включающего радиус-вектор частицы r_i , ее поступательную v_i и вращательную ω_i скорости, температуру T_i и радиус r_i . Будем считать, что межфазный массообмен, а также дробление частиц при соударениях отсутствуют и, следовательно, радиус каждой частицы не изменяется. При сделанных предположениях эволюция состояния системы частиц описывается уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1, j \neq i}^N F_{ij}(X) + F'_i(X, Q'), \quad X = (x_1, \dots, x_N), \quad i = 1, \dots, N \quad (1.1)$$

$$x_i = \begin{pmatrix} r_i \\ v_i \\ \omega_i \\ T_i \\ r_i \end{pmatrix}, \quad F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{ij}/m_i \\ l_{ij}/I_i \\ q_{ij}/c_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F'_i = \begin{pmatrix} v_i \\ f'_i/m_i \\ l'_i/I_i \\ q'_i/c_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q' = \begin{pmatrix} T' \\ \rho' \\ v' \end{pmatrix}$$

где t – время; $m_i = (4/3)\pi r_i^3 \rho_p^\circ$ – масса, $I_i = (2/5)m_i r_i^2$ – момент инерции, $c_i = m_i c_p^\circ$ – теп-

лоемкость частицы; ρ_p° – плотность, c_p° – удельная теплоемкость материала примеси; T' , ρ' и \mathbf{v}' – поля температуры, плотности и скорости несущего газа. Сила \mathbf{f}_{ij} , вращающий момент \mathbf{l}_{ij} и тепловой поток q_{ij} возникают при механическом воздействии j -й частицы на i -ю в процессе столкновения. Гидродинамические сила \mathbf{f}'_i , момент \mathbf{l}'_i и тепловой поток q'_i возникают вследствие взаимодействия i -й частицы с несущим газом.

При движении системы частиц изменение состояния отдельной частицы может зависеть от состояния других частиц. Физическими причинами этого являются столкновения между частицами и их гидродинамическое взаимодействие. Последнее обычно принимается во внимание для концентрированных систем из стоксовых частиц [9] и не учитывается для разреженных систем. Однако, как показывает физический эксперимент [10], заметное гидродинамическое взаимодействие между частицами может возникнуть и в разреженных грубодисперсных системах в условиях сильной скоростной неравновесности фаз, когда числа Рейнольдса при обтекании частиц превышают нижнее критическое значение (200–300) и следы за частицами, простирающиеся на несколько десятков и даже сотен их диаметров, состоят из долго живущих неоднородностей (оторвавшихся кольцевых вихрей). Пусть R'_* и Θ'_* – линейный и временной масштабы гидродинамических особенностей (например, следов), связанных с движением отдельных частиц, $T_* = L_*/v_*$ – характерное время течения, v_* – характерная скорость потока относительно обтекаемого тела. Если можно ввести физически бесконечно малые масштабы времени t'_{Φ} и длины l'_{Φ} , удовлетворяющие неравенствам [8]

$$R'_* \ll l'_{\Phi} \ll L_*, \quad \Theta'_* \ll t'_{\Phi} \ll T_*$$

то актуальные поля \mathbf{Q}' можно представить в виде суперпозиции $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}$ осредненного по l'_{Φ} и t'_{Φ} поля течения $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$ и добавки $\Delta\mathbf{Q}$, описывающей микроструктуру течения несущего газа, возникающую вследствие присутствия частиц примеси. Аналогично слагаемое \mathbf{F}'_i в правой части (1.1) можно формально представить в виде [11]

$$\mathbf{F}'_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{Q}(\mathbf{r}_i, t), \alpha_p) + \Delta\mathbf{F}_i(\mathbf{X}, \mathbf{Q}, \Delta\mathbf{Q}), \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} T \\ \rho \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

где слагаемое \mathbf{F}_i описывает межфазное взаимодействие частицы с осредненным полем течения несущего газа \mathbf{Q} в локально-однородном приближении (с поправкой на стесненность обтекания при конечных значениях объемной концентрации примеси α_p), а слагаемое $\Delta\mathbf{F}_i$ описывает случайное взаимодействие частицы с флуктуациями поля течения. Для моделирования $\Delta\mathbf{F}_i$ часто используется диффузионное приближение [11].

Пусть c_* – масштаб скорости движения частиц примеси друг относительно друга, w_* – масштаб скорости движения частиц относительно несущего газа. Происходящие при движении дисперсной фазы процессы имеют следующие масштабы: r_* , $\theta_* = r_*/c_*$ – радиус и время действия сил, возникающих при механическом контакте частиц; l_* , $t_* = l_*/c_*$ – расстояние между дисперсными частицами и время, за которое они проходят это расстояние; R_* , $\Theta_* = R_*/w_*$ – длина и время гидродинамической релаксации частицы в осредненном поле течения несущего газа; λ_* , $\tau_* = \lambda_*/c_*$ – длина свободного пробега и время между столкновениями отдельной частицы с другими частицами, являющиеся масштабами столкновительной релаксации в среде примеси; τ'_* – характерное время диффузии частиц за счет взаимодействия с флуктуациями полей параметров течения несущего газа.

Рассматриваемая ниже кинетическая модель дисперсной фазы основана на следующих соотношениях между введенными масштабами:

$$L_* \sim R_*, \quad r_* \ll l_*, \quad l_* \ll \lambda_*, \quad l_* \ll L_* \quad (1.3)$$

$$R_*, \lambda_* \ll c_* \tau_* \quad (1.4)$$

Первое соотношение в (1.3) дает по сути определение грубодисперсности примеси в терминах характерных линейных масштабов задачи. Второе и третье означают разреженность примеси, что позволяет, в частности, пренебречь зависимостью F_i от α_p . Четвертое соотношение соответствует ситуации, когда в рассматриваемой области физического пространства число частиц является достаточно большим, чтобы для описания всей системы можно было использовать методы статистической механики. Неравенство (1.4) позволяет не учитывать взаимодействие частиц с мелкомасштабными флуктуациями в несущем газе (например, со следами других частиц). Таким образом, в данной работе гидродинамическое взаимодействие между частицами не учитывается.

Для грубодисперсной разреженной примеси на основе элементарных рассуждений получаются следующие оценки [1]

$$R_* \sim r_* \frac{\rho_p^\circ}{\rho_*}, \quad l_* \sim \frac{r_*}{\sqrt[3]{\alpha_*}}, \quad \lambda_* \sim \frac{r_*}{\alpha_*} \quad (1.5)$$

где α_* – характерное значение объемной концентрации примеси. Из (1.5) следует, что, например, в задаче обтекания тела с характерным размером $L_* \sim 1$ м и при отношении физических плотностей твердой и газовой фаз $\rho_p^\circ/\rho_* \sim 10^4$ условия (1.3) выполняются при $r_* \sim 100$ мкм и $\alpha_p \leq 10^{-4}$. При $\alpha_p \sim 10^{-4}$ имеем $\lambda_*/L_* \sim 1$, что соответствует переходному по числу Кнудсена в "газе" частиц течению примеси. Заметим, что в случае выполнения неравенств (1.3) обычно имеют место соотношения $c_* \sim w_* \sim v_*$, а значит, аналогичные неравенства справедливы и для соответствующих временных масштабов.

Допущения (1.3) позволяют считать эффекты, описываемые слагаемыми F_{ij} , короткодействующими (расстояния $|r_j - r_i|$, на которых F_{ij} отличны от нуля, много меньше любых других характерных масштабов задачи, в частности характерного линейного масштаба R_* "внешних" сил межфазного взаимодействия F_i) и ограничиться учетом только парных столкновений между частицами. Эти допущения аналогичны условиям, в рамках которых в кинетической теории разреженного газа выводится уравнение Больцмана.

При сделанных допущениях из (1.1) и (1.2) получим

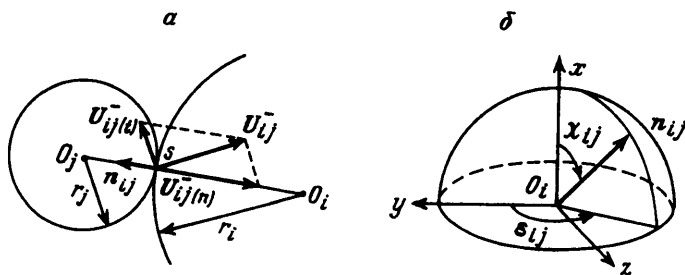
$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{Q}(\mathbf{r}_i, t)), \quad i = 1, \dots, N \quad (1.6)$$

2. Кинетическая модель дисперсной фазы. Как и в кинетической теории разреженного газа, при выполнении условий (1.3) можно перейти к сокращенному – кинетическому описанию дисперсной фазы.

Решение системы (1.6) с начальными условиями $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$ при $t = 0$ эквивалентно решению уравнения переноса

$$\frac{\partial D_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot (\mathbf{F}_i D_N) = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot (\mathbf{F}_{ij} D_N) \quad (2.1)$$

относительно динамической функции распределения $D_N(\mathbf{X}, t, \mathbf{X}_0)$ с начальным условием $D_N(\mathbf{X}, 0, \mathbf{X}_0) = \delta_{11..N}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$, где $\delta_M(\mathbf{x})$ – M -мерная δ -функция Дирака ($\mathbf{x} \in \mathbf{R}^M$, $\int \delta_M(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$) [12]. Решение уравнения (2.1) можно выразить через решение



Фиг. 1. Схема столкновения дисперсных частиц i и j (а) и система координат в интеграле столкновений уравнения (2.4) (б)

$\mathbf{X}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{X}_0, t)$ системы (1.6) следующим образом:

$$D_N(\mathbf{X}, t, \mathbf{X}_0) = \delta_{11 \dots N}(\mathbf{X} - \mathbf{S}(\mathbf{X}_0, t))$$

В отличие от (1.6) уравнение (2.1) удобно для перехода к кинетическому описанию дисперсной фазы.

В силу неравенств (1.3) можно пренебречь длительностью столкновения и изменением в процессе столкновения положения каждой из сталкивающихся частиц по сравнению с характерными временными масштабами любых других процессов в газозвеси. Обозначим индексами минус и плюс параметры пары частиц i и j до и после их столкновения. Тогда соотношения, связывающие параметры $y_k = (v_k, \omega_k, T_k)$ ($k = i, j$) до и после столкновения, могут быть представлены в виде

$$y_k^+ = y_k^+(y_i^-, y_j^-, r_i, r_j, \mathbf{n}_{ij}), \quad k = i, j \quad (2.1)$$

Соотношения (2.2) имеют физический смысл только при $\mathbf{g}_{ij}^- \cdot \mathbf{n}_{ij} \leq 0$, где $\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i$, \mathbf{n}_{ij} — орт, задающий положение центров частиц друг относительно друга в момент столкновения (фиг. 1). В дальнейшем преобразование (2.2) будем считать взаимно однозначным, так что его якобиан J_1 отличен от нуля

$$J_1 = \left| \frac{\partial(y_i^+, y_j^+)}{\partial(y_i^-, y_j^-)} \right| \neq 0$$

и, следовательно, (2.2) можно разрешить относительно параметров частиц до столкновения

$$y_k^- = y_k^-(y_i^+, y_j^+, r_i, r_j, \mathbf{n}_{ij}), \quad k = i, j, \quad \mathbf{g}_{ij}^+ \cdot \mathbf{n}_{ij} \geq 0 \quad (2.3)$$

При условиях (1.3) точно так же, как в кинетической теории разреженного газа [12, 13], в среде примеси можно ввести физически бесконечно малые масштабы длины $l_\Phi = r_* / \sqrt{\alpha_*}$ и времени $t_\Phi = l_\Phi / c_*$, удовлетворяющие при $\alpha_* \ll 1$ неравенствам

$$l_* \ll l_\Phi \ll \lambda_*, L_*, \quad t_* \ll t_\Phi \ll \tau_*, T_*$$

и соответствующий этим масштабам оператор сглаживания P_N

$$P_N G(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{l_\Phi^3} \int_{t-t_\Phi/2}^{t+t_\Phi/2} \int G(\mathbf{r}'_1, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{r}'_N, \mathbf{z}_N, t') d\mathbf{r}'_1 \dots d\mathbf{r}'_N dt'$$

где $G(\mathbf{X}, t)$ — некоторая функция фазовых координат и времени, $\mathbf{z}_i = (y_i, r_i)$, а интегрирование по \mathbf{r}'_i осуществляется по симметричной окрестности точки \mathbf{r}_i , имеющей вид параллелепипеда с длиной ребра l_Φ .

Подействуем оператором P_N на уравнение (2.1). Из полученного осредненного уравнения для разреженного "газа" частиц (формально при $\alpha_* \rightarrow 0$) методом многих масштабов [14] можно получить уравнение кинетического типа относительно сглаженной функции распределения $D_N^{(c)} = P_N D_N$ [12]. Вводя ансамбль макроскопически идентичных систем с плотностью распределения начальных состояний $F_N(\mathbf{X}_0, 0)$ и осредняя полученное уравнение по начальным состояниям, получим так называемое основное кинетическое уравнение

$$\frac{\partial F_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot (\mathbf{F}_i F_N) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \delta_3(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) I_{ij} \quad (2.4)$$

$$I_{ij} = d_{ij}^2 \int_{\mathbf{g}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij} \leq 0} \left(\frac{F_N(\mathbf{X}_{ij}^-, t)}{J} - F_N(\mathbf{X}, t) \right) |\mathbf{g}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}| \sin \chi_{ij} d\chi_{ij} d\epsilon_{ij}$$

$$J = \left| \frac{\mathbf{g}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}}{\mathbf{g}_{ij}^- \cdot \mathbf{n}_{ij}} J_1 \right|, \quad \mathbf{X}_{ij}^- = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i^-, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j^-, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_N)$$

которое описывает эволюцию N -частичной статистической функции распределения частиц

$$F_N(\mathbf{X}, t) = \int D_N^{(c)}(\mathbf{X}, t, \mathbf{X}_0) F_N(\mathbf{X}_0, 0) d\mathbf{X}_0$$

в $(11 \times N)$ -мерном фазовом пространстве. В уравнении (2.4) χ_{ij} и ϵ_{ij} – углы в произвольной сферической системе координат, задающие направление \mathbf{n}_{ij}

$$\mathbf{n}_{ij} = \cos \chi_{ij} \mathbf{i} + \sin \chi_{ij} \cos \epsilon_{ij} \mathbf{j} + \sin \chi_{ij} \sin \epsilon_{ij} \mathbf{k} \quad (2.5)$$

где $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ – базис в декартовой системе координат (x, y, z) (фиг. 1); $d_{ij} = r_i + r_j$; $\mathbf{x}_k^- = (\mathbf{r}_k, \mathbf{y}_k^-(y_i, y_j, r_i, r_j, \mathbf{n}_{ij}), r_i)$, $k = i, j$. Множитель $1/J$ в столкновительном операторе в правой части (2.4) учитывает "сжатие" фазового объема, которое имеет место в том случае, если столкновение частиц не является абсолютно упругим.

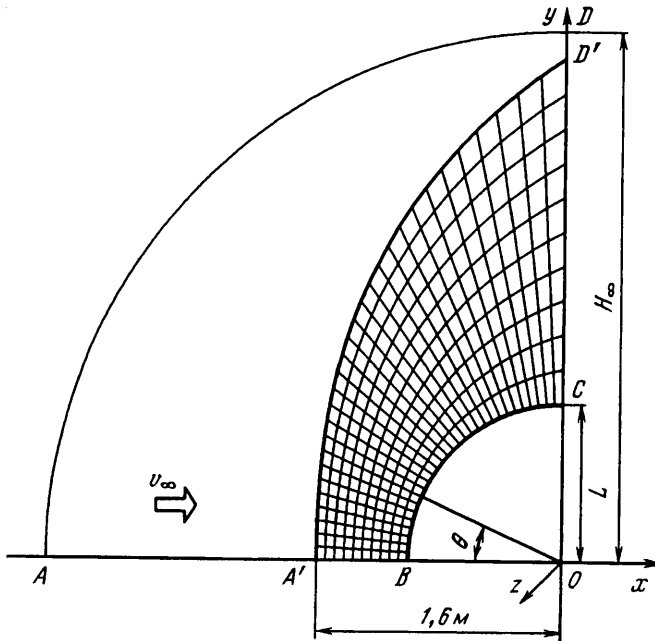
Все представляющие интерес с точки зрения механики макропараметры примеси $\langle \Phi \rangle_1$ и $\langle \Psi \rangle_2$ могут быть выражены через функции параметров одной частицы $\Phi(\mathbf{x}_i)$ или двух $\Psi(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ и одно- и двухчастичные (F_1 и F_2) функции распределения

$$\langle \Phi \rangle_1(\mathbf{r}, t) = \int \sum_{i=1}^N \delta_3(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \Phi(\mathbf{x}_i) F_N(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X} = N \int \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{z}_1) F_1(\mathbf{r}, \mathbf{z}_1, t) dz_1 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi \rangle_2(\mathbf{r}, t) &= \int \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \delta_3(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \delta_3(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) \Psi(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) F_N(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X} \\ &= \frac{N(N-1)}{2} \int \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{z}_1, \mathbf{r}, \mathbf{z}_2) F_2(\mathbf{r}, \mathbf{z}_1, \mathbf{r}, \mathbf{z}_2, t) dz_1 dz_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Например, счетная n_p и объемная α_p концентрации примеси, макроскопическая скорость примеси \mathbf{u}_p , средний квадрат скорости хаотического движения частиц c_p^2 , частота столкновений между частицами ν_p в единице объема газовой смеси могут быть вычислены так

$$\begin{aligned} n_p &= \langle 1 \rangle_1, \quad \alpha_p = \frac{4}{3} \pi \langle r_i^3 \rangle_1, \quad \mathbf{u}_p = \frac{\langle r_i^3 \mathbf{v}_i \rangle_1}{\langle r_i^3 \rangle_1} \\ c_p^2 &= \frac{\langle r_i^3 (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_p)^2 \rangle_1}{\langle r_i^3 \rangle_1}, \quad \nu_p = \langle \pi d_{ij}^2 g_{ij} \rangle_2 \end{aligned}$$



Фиг. 2. Расчетная область в задаче обтекания цилиндра потоком газозвеси

Пусть рассматриваемая система частиц находится в физическом пространстве в области объема V . В термодинамическом пределе, когда количество частиц N вместе с занимаемым ими объемом V стремится к бесконечности при постоянной средней концентрации частиц, т.е.

$$N, V \rightarrow \infty \quad (N/V = \text{const}) \quad (2.8)$$

использование гипотезы "молекулярного" хаоса

$$F_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = F_1(\mathbf{x}_1, t)F_1(\mathbf{x}_2, t) \quad (2.9)$$

позволяет получить из (2.4) уравнение больцмановского типа относительно функции распределения $f_1 = f(\mathbf{x}_1, t) = NF_1(\mathbf{x}_1, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot (\mathbf{v}_1 f_1) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \left(\frac{\mathbf{f}_1}{m_1} f_1 \right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}_1} \cdot \left(\frac{\mathbf{l}_1}{I_1} f_1 \right) + \frac{\partial}{\partial T_1} (q_1 f_1) = \\ = \int_0^\infty d^2_{12} \int_{\mathbf{g}_{12} \cdot \mathbf{n}_{12} \leq 0} \left(\frac{f_1^- f_2^-}{J} - f_1 f_2 \right) |\mathbf{g}_{12} \cdot \mathbf{n}_{12}| \sin \chi_{12} d\chi_{12} d\epsilon_{12} dy_2 dr_2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $f_2 = f(\mathbf{x}_2, t)$, $f_1^- = f(\mathbf{x}_1^-, t)$ и $f_2^- = f(\mathbf{x}_2^-, t)$. Кинетическое уравнение, аналогичное (2.10), но с совершенно другим интегралом столкновений получено феноменологически в [15] для разреженной среды из жидких капель.

Пусть D – расчетная область, ∂D – ее граница, $\mathbf{r}_1 \in \partial D$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r}_1)$ – внутренняя по отношению к D единичная нормаль к ∂D , \mathbf{v}_1 – вектор скорости частиц, движущихся внутрь расчетной области в точке границы \mathbf{r}_1 , т.е. выполняется условие $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} > 0$. Тогда в каждой точке границы ∂D должно быть задано либо явное выражение для функции распределения f_1 при $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} > 0$, либо соотношение, связывающее f_1 при $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} > 0$ с $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{y}'_1, \eta_1, t)$ при $\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{n} < 0$. Считается [16], что такой способ постановки

граничных условий обеспечивает корректность начально-краевой задачи для уравнения типа (2.10).

Схема типичной для плоских задач аэродинамики расчетной области показана на фиг. 2. Расчетная область $ABCD$ ограничена входной границей AD , плоскостью симметрии AB , поверхностью обтекаемого тела BC и выходной границей CD . На AD и CD должна быть задана функция распределения частиц по скоростям \mathbf{v}_i и $\boldsymbol{\omega}_i$, температурам T_i и размерам r_i , поступательная скорость которых направлена внутрь области $ABCD$. Будем считать, что граница AD расположена в области невозмущенного течения, где частицы покоятся относительно газа, равновероятно распределены по объему газозвеси, а их скорости статистически независимы. Тогда на AD следует поставить граничное условие

$$f(\mathbf{x}_1, t) = n_{p\infty} \delta_3(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_\infty) \delta_3(\boldsymbol{\omega}_1) \delta_1(T_1 - T_\infty) f_\infty^\circ(r_1) \quad (2.11)$$

где $n_{p\infty}$ и \mathbf{v}_∞ – числовая концентрация и вектор скорости частиц, $f_\infty^\circ(r_i)$ – функция распределения частиц по размерам r_i в невозмущенном потоке ($\int_0^\infty f_\infty^\circ(r_i) dr_i = 1$).

Если предположить, что выходная граница CD находится достаточно далеко вниз по потоку, так что на этой границе $|\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n}| \gg c_p$, то доля частиц, проникающих через эту границу в расчетную область, будет очень мала и можно приближенно принять $f(\mathbf{x}_1, t) = 0$.

При удалении выходной границы вниз по потоку данное условие будет выполняться, по-видимому, все точнее и точнее вследствие затухания хаотического движения частиц в результате их взаимодействия с несущим газом.

На плоскости симметрии AB ставится условие симметрии

$$f(\mathbf{x}_1, t) = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{y}'_1, r_1, t) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{n}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}), \quad \boldsymbol{\omega}'_1 = \boldsymbol{\omega}_1 - 2\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{n})$$

причем $\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{n} < 0$.

Наиболее сложной является постановка граничных условий на непроницаемой для частиц поверхности обтекаемого тела BC , где необходимо моделировать, как правило, неупругий отскок частицы. Пренебрегая временем взаимодействия частицы с поверхностью и изменением положения ее центра в процессе отражения, граничное условие на неподвижной поверхности можно записать в следующем виде (аналогично кинетической теории разреженного газа [16]):

$$|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}| f(\mathbf{x}_1, t) = \int_{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{n} < 0} |\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{n}| W_w(\mathbf{y}'_1 \rightarrow \mathbf{y}_1 | r_1, \mathbf{n}) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{y}'_1, r_1, t) d\mathbf{y}'_1 \quad (2.13)$$

где $W_w(\mathbf{y}'_1 \rightarrow \mathbf{y}_1 | r_1, \mathbf{n})$ – условная плотность распределения параметров частицы \mathbf{y}_1 после отражения от поверхности при известных параметрах до падения \mathbf{y}'_1 .

3. Модель столкновения двух частиц. Используемая модель столкновения пары дисперсных частиц основана на уравнениях законов изменения импульса и момента импульса пары недеформируемых частиц i и j при их столкновении друг с другом

$$m_i \mathbf{v}_i^- + m_j \mathbf{v}_j^- = m_i \mathbf{v}_i^+ + m_j \mathbf{v}_j^+, \quad I_k(\boldsymbol{\omega}_k^+ - \boldsymbol{\omega}_k^-) = m_k \mathbf{e}_k \times (\mathbf{v}_k^+ - \mathbf{v}_k^-) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{e}_j = -r_j \mathbf{n}_{ij}, \quad \mathbf{e}_i = r_i \mathbf{n}_{ij}, \quad k = i, j$$

Система (3.1) содержит три векторных уравнения, в которые входят четыре неизвестные векторные величины \mathbf{v}_k^+ и $\boldsymbol{\omega}_k^+$, $k = i, j$. Для замыкания (3.1) необходимо ввести дополнительные гипотезы относительно сил, действующих в точке контакта частиц. Обычно [17] такие гипотезы формулируются в виде соотношения между ком-

понентами относительной скорости поверхностей частиц U_{ij} в точке контакта s (фиг. 1)

$$U_{ij} = g_{ij} - w_{ij} \times n_{ij}, \quad w_{ij} = r_i \omega_i + r_j \omega_j \quad (3.2)$$

до и после удара. Часто принимается [17], что связь между U_{ij}^- и U_{ij}^+ имеет следующий вид:

$$U_{ij}^+ = -a_{pn} U_{ij(n)}^- + a_{pt} U_{ij(t)}^- \quad (3.3)$$

где a_{pn} и a_{pt} – коэффициенты восстановления нормальной и касательной составляющих относительной скорости U_{ij} , а нижние индексы (n) и (t) здесь и далее используются для обозначения составляющих произвольного вектора вдоль направления нормали n_{ij} и в касательной плоскости, перпендикулярной n_{ij} (для любого вектора $a = a_{(n)} + a_{(t)}$, $a_{(n)} = (a \cdot n_{ij})n_{ij}$). Считается, что коэффициент a_{pn} учитывает потери кинетической энергии частиц при соударении вследствие неупругих деформаций, а a_{pt} – вследствие шероховатости поверхностей частиц ($0 \leq a_{pn}, |a_{pt}| \leq 1$).

Если задать величины a_{pn} и a_{pt} , то система (3.1)–(3.3) становится замкнутой и ее можно разрешить относительно параметров обеих частиц после столкновения. С использованием обозначений

$$G_{ij} = \mu_i v_i + \mu_j v_j, \quad W_{ij} = \zeta_j \omega_j - \zeta_i \omega_i, \quad \mu_k = \frac{m_k}{m_i + m_j}, \quad \zeta_k = \frac{l_k}{r_k}$$

из (3.1)–(3.3) можно получить

$$G_{ij}^+ = G_{ij}^-, \quad g_{ij}^+ = g_{ij}^- - (1 + a_{pn}) U_{ij(n)}^- - \frac{2}{7} (1 - a_{pt}) U_{ij(t)}^- \quad (3.4)$$

$$W_{ij}^+ = W_{ij}^-, \quad w_{ij}^+ = w_{ij}^- - \frac{5}{7} (1 - a_{pt}) (U_{ij}^- \times n_{ij})$$

Тогда искомые параметры v_k^+ и ω_k^+ могут быть найдены по формулам

$$v_i^+ = G_{ij}^+ - \mu_j g_{ij}^+, \quad v_j^+ = G_{ij}^+ + \mu_i g_{ij}^+ \quad (3.5)$$

$$\omega_i^+ = \mu_j \frac{r_j}{r_i} \left(\frac{w_{ij}^+}{r_j} - \frac{W_{ij}^+}{\zeta_j} \right), \quad \omega_j^+ = \mu_i \frac{r_i}{r_j} \left(\frac{w_{ij}^+}{r_i} + \frac{W_{ij}^+}{\zeta_i} \right)$$

Для определения изменения температуры каждой из частиц предположим, что потери кинетической энергии распределяются между ними в виде тепла пропорционально их массам. Тогда

$$T_k^+ = T_k^- + \frac{\mu_k}{c_k} \Delta E_{ij}, \quad \Delta E_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} (B_{ij}^- - B_{ij}^+) \quad (3.6)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} g_{ij}^2 + \frac{1}{5} w_{ij}^2, \quad k = i, j$$

Теоретическое или экспериментальное определение коэффициентов a_{pn} и a_{pt} сопряжено с большими трудностями и до сих пор в литературе отсутствуют данные о зависимостях a_{pn} и a_{pt} от скоростей сталкивающихся частиц и других параметров, определяющих динамику столкновения. Использование физически правдоподобных предположений о тенденциях изменения a_{pn} и a_{pt} при изменении относительной скорости сталкивающихся частиц [5] приводит к увеличению количества свободных параметров модели, что существенно затрудняет исследование. Поэтому в данной работе значения коэффициентов восстановления приняты постоянными ($a_{pn}, a_{pt} = \text{const}$). В этом случае $J_1 = -a_{pn} a_{pt}^2$ и $J = a_{pn}^2 a_{pt}^2$.

4. Модель отражения частицы от твердой поверхности. Пренебрегая шероховатостью поверхности обтекаемого тела, которая может приводить к случайному рассеянию частиц, предположим, что параметры частицы при отражении от поверхности изменяются детерминированно. Тогда

$$W_w(y'_i \rightarrow y_i | r_i, \mathbf{n}) = \delta_6(y_i - y_w^+(y'_i, r_i, \mathbf{n}))$$

где $y_i^+ = y_w^+(y_i^-, r_i, \mathbf{n})$ – закон изменения параметров y_i частицы в результате отражения (верхними индексами минус и плюс в этом разделе будем обозначать параметры произвольной i -й частицы до и после отражения от поверхности).

Обозначим составляющие скорости частицы вдоль нормали \mathbf{n} и в касательной к поверхности плоскости нижними индексами (n) и (t). Тогда вектор скорости \mathbf{v}_i^+ после отражения невращающейся частицы от поверхности можно выразить через вектор скорости до падения \mathbf{v}_i^- и коэффициенты восстановления a_{wn} и a_{wt} нормальной и касательной к поверхности составляющих скорости частицы

$$\mathbf{v}_{i(n)}^+ = -a_{wn}\mathbf{v}_{i(n)}^-, \quad \mathbf{v}_{i(t)}^+ = a_{wt}\mathbf{v}_{i(t)}^-$$

В настоящей работе для определения коэффициентов восстановления использовались соотношения $a_{wn} = a_{wn}(\varphi, |\mathbf{v}_i^-|)$ и $a_{wt} = a_{wt}(\varphi)$ (φ – угол падения, т.е. угол между векторами \mathbf{v}_i^- и \mathbf{n}), полученные в [18, 19] путем обработки экспериментальных данных по обтеканию преград из мягкой стали Ст3 потоком воздуха с примесью частиц электрокорунда. Эти соотношения справедливы в диапазоне скоростей $50 \text{ м/с} \leq |\mathbf{v}_i^-| \leq 500 \text{ м/с}$.

Падающая на поверхность тела частица может иметь произвольную ориентацию векторов поступательной \mathbf{v}_i^- и угловой $\boldsymbol{\omega}_i^-$ скоростей. Представляется правдоподобным, что распределение сил в пятне контакта частицы и поверхности симметрично относительно плоскости $(\mathbf{n}, \mathbf{U}_i^-)$, содержащей орт нормали \mathbf{n} и вектор скорости нижней точки частицы $\mathbf{U}_i^- = \mathbf{v}_i^- - r_i \boldsymbol{\omega}_i^- \times \mathbf{n}$. Это означает, что главный вектор сил взаимодействия между частицей и поверхностью не будет иметь составляющей в направлении, перпендикулярном плоскости $(\mathbf{n}, \mathbf{U}_i^-)$, а главный момент сил взаимодействия (относительно центра частицы) не будет иметь составляющей, лежащей в данной плоскости. Введем орты локальной системы координат

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{U}_i^-}{|\mathbf{n} \times \mathbf{U}_i^-|}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{n}$$

и соответствующими индексами обозначим проекции векторов на \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\kappa}$. Предположим также, что вся выделяющаяся при ударе тепловая энергия поглощается поверхностью тела. Тогда получим

$$v_{i\boldsymbol{\kappa}}^+ = v_{i\boldsymbol{\kappa}}^-, \quad \omega_{in}^+ = \omega_{in}^-, \quad \omega_{i\boldsymbol{\tau}}^+ = \omega_{i\boldsymbol{\tau}}^-, \quad T_i^+ = T_i^- \quad (4.1)$$

и в процессе отражения частицы от поверхности будут претерпевать изменение лишь составляющие векторов v_{in} , $v_{i\boldsymbol{\tau}}$, $\omega_{i\boldsymbol{\kappa}}$, значения которых после отскока частицы от поверхности будем вычислять по соотношениям [19]

$$v_{in}^+ = -a_{wn}v_{in}^- \quad (4.2)$$

$$v_{i\boldsymbol{\tau}}^+ = \begin{cases} a_{wt}v_{i\boldsymbol{\tau}}^- - (1 - a_{wt})r_i\omega_{i\boldsymbol{\kappa}}^-, & \varphi > \varphi_* \\ a_{wt}v_{i\boldsymbol{\tau}}^- - (2/7)r_i\omega_{i\boldsymbol{\kappa}}^-, & \varphi \leq \varphi_* \end{cases}$$

$$\omega_{ix}^+ = \begin{cases} \frac{5a_{wt} - 3}{2} \omega_{ix}^- + \frac{5}{2r_i} (a_{wt} - 1) v_{it}^-, & \varphi > \varphi_* \\ \frac{2}{7} \omega_{ix}^- - \frac{a_{wt}}{r_i} v_{it}^-, & \varphi \leq \varphi_* \end{cases}$$

где φ – угол падения в плоскости (\mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$), φ_* – корень уравнения $a_{wt}(\varphi_*) = 5/7$ (для стали Ст3 угол $\varphi_* = 79,5^\circ$).

5. Взаимодействие частиц с несущим газом. В соответствии со сделанными допущениями для определения силы \mathbf{f}_i и момента \mathbf{l}_i , действующих на отдельную частицу со стороны несущего газа, воспользуемся известными результатами по обтеканию сферы стационарным однородным безграничным потоком. При вычислении \mathbf{f}_i учтем только две наиболее важные составляющие: \mathbf{f}_{Di} – силу аэродинамического сопротивления и \mathbf{f}_{Mi} – силу Магнуса, так что $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_{Di} + \mathbf{f}_{Mi}$. Силу \mathbf{f}_{Di} представим в виде [8]

$$\mathbf{f}_{Di} = \frac{1}{2} C_D(\text{Re}_i) \pi r_i^2 \rho |\mathbf{v} - \mathbf{v}_i| (\mathbf{v} - \mathbf{v}_i), \quad \text{Re}_i = \frac{2r_i \rho |\mathbf{v} - \mathbf{v}_i|}{\mu}$$

где μ – вязкость несущего газа. Для расчета коэффициента сопротивления C_D при обтекании сферической частицы несжимаемым газом используем систему соотношений [20], которая описывает "стандартную кривую" сопротивления сферы $C_D(\text{Re}_i)$ в несжимаемом газе с погрешностью не более 1–2%.

Поперечная сила Магнуса \mathbf{f}_{Mi} возникает при движении вращающейся частицы [8]

$$\mathbf{f}_{Mi} = \frac{4}{3} C_\omega(\text{Re}_i, \text{Re}_{\omega_i}) \pi r_i^3 \rho (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_i) \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_i), \quad \text{Re}_{\omega_i} = \frac{4r_i^2 \rho |\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_i|}{\mu}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$$

В предельном случае $\text{Re}_i, \text{Re}_{\omega_i} \ll 1$ теоретическое решение [21] дает значение $C_\omega = 3/4$. По экспериментальным результатам [22] коэффициент C_ω при $\text{Re}_{\omega_i} \leq 10^3$ незначительно изменяется по сравнению с предельным значением, поэтому далее при вычислении силы Магнуса принято $C_\omega = 3/4$.

Демпфирующий момент \mathbf{l}_i , действующий на вращающуюся частицу, обычно принято записывать в виде [8]

$$\mathbf{l}_i = \frac{1}{2} C_L(\text{Re}_{\omega_i}) \rho r_i^5 |\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_i| (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_i)$$

причем при $\text{Re}_{\omega_i} \ll 1$ имеем $C_L = 64\pi/\text{Re}_{\omega_i}$. При умеренных и больших числах $\text{Re}_{\omega_i} \leq 1,6 \cdot 10^5$ для расчета C_L будем использовать зависимости из [23], полученные на основе аппроксимации теоретических, численных и экспериментальных данных различных авторов.

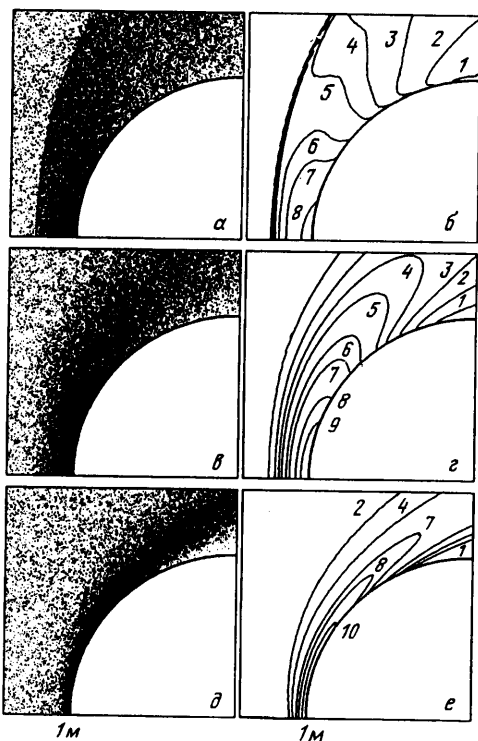
Тепловой поток через поверхность частицы обычно записывают в виде [24]

$$q_i = 2 \text{Nu}_p(\text{Re}_i, M_i) \pi r_i \lambda (T - T_i), \quad M_i = \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_i|}{\sqrt{\gamma R T}}$$

где $\text{Nu}_p = 2r_i \xi / \lambda$, $\lambda = c_p \mu / \text{Pr}$, $\gamma = c_p / c_v$, $R = c_p - c_v$, ξ – коэффициент теплоотдачи через межфазную поверхность, c_p и c_v – удельные теплоемкости совершенного газа при постоянном давлении и объеме, Pr – число Прандтля.

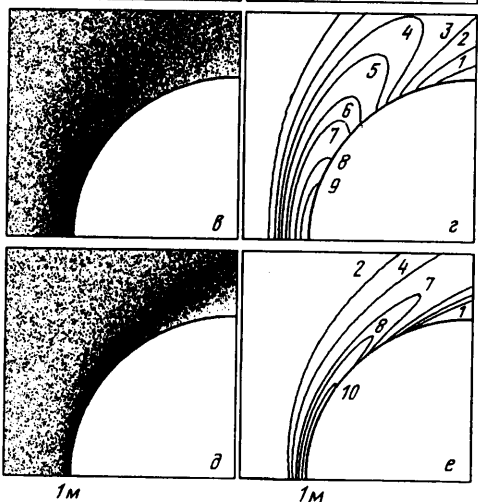
В данной работе для определения Nu_p при обтекании частиц в стоксовом режиме ($M_i \ll \text{Re}_i \ll 1$) использовалось теоретическое решение $\text{Nu}_p = 2$, а при больших числах Re_i – полуэмпирическая формула Кавано – Дрейка [24].

6. Численное исследование течения примеси при поперечном обтекании цилиндра однородным потоком газозвеси. В данной работе расчет макропараметров – функционалов решения $f(\mathbf{x}_i, t)$ уравнения (2.10) – в бесстолкновительном, переходном и



Фиг. 3

Фиг. 3. Картины распределения моделирующих частиц радиуса $r_p = 100 \text{ мкм}$ (а, в, д) и соответствующие им изолинии полей относительной концентрации примеси $\alpha_p/\alpha_{p\infty}$ (б, з, е: 1 - $\alpha_p/\alpha_{p\infty} = 1$, 2 - 1,5, 3 - 2, 4 - 2,5, 5 - 3, 6 - 4, 7 - 5, 8 - 8, 9 - 12, 10 - 20); а, б - $\alpha_{p\infty} = 10^{-5}$; в, з - $\alpha_{p\infty} = 3 \cdot 10^{-5}$; д, е - $\alpha_{p\infty} = 10^{-4}$



Фиг. 4

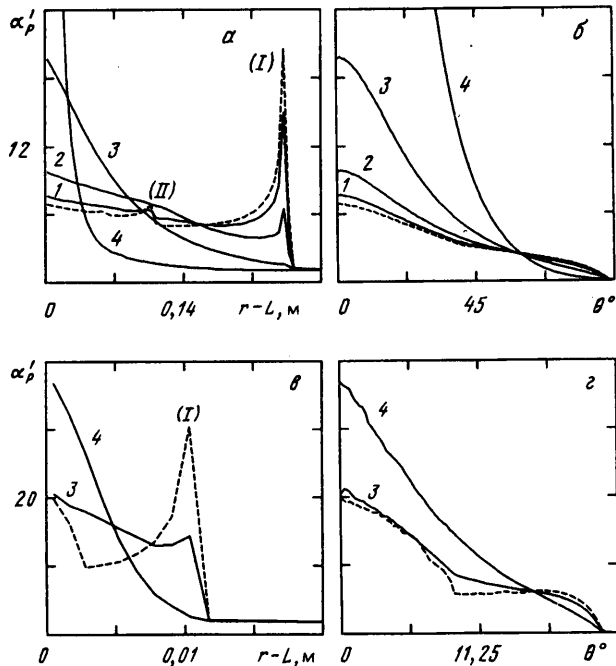
Фиг. 4. Картина распределения моделирующих частиц радиуса $r_p = 10 \text{ мкм}$ (а) и соответствующие ей изолинии поля относительной концентрации примеси $\alpha_p/\alpha_{p\infty}$ (б); $\alpha_{p\infty} = 3 \cdot 10^{-5}$: 1 - $\alpha_p/\alpha_{p\infty} = 1,5$; 2 - 2; 3 - 4

околоконтинуальном режимах течения "газа" частиц осуществлялся с помощью метода прямого статистического моделирования, аналогичного используемому в расчетах течений разреженного газа. Наиболее эффективные в вычислительном плане варианты этого метода восходят к схеме Берда [25] и основаны на прямом моделировании случайного процесса движения и столкновений системы конечного числа N частиц. С теоретической точки зрения такой случайный процесс изменения параметров (X, t) описывается интегральным аналогом уравнения (2.4) [26, 27]. В расчетах (при относительно небольшом числе N) всегда обеспечивается подобие течений "газа" моделирующих частиц и реальной примеси по числу Kn_* .

Описанные ниже результаты были получены с использованием приближенного метода прямого статистического моделирования, основанного на дискретизации расчетной области на ячейки и расщеплении процесса движения частиц в каждой ячейке на два этапа: 1) этап столкновений между частицами и 2) этап их бесстолкновительного перемещения в несущем газе. Расчет столкновений осуществлялся по схеме мажорантной частоты [26]. Используемая численная процедура описана в [7].

Вид расчетной области $A'B'CD'$ и сетки при моделировании движения столкновительной примеси показан на фиг. 2. Распределения параметров примеси на $A'D'$ определялись на основе траекторных расчетов [28] бесстолкновительного движения частиц из невозмущенного потока (от линии AD) до границы $A'D'$.

Несущий газ (воздух: $\gamma = 1,4$, $\text{Pr} = 0,77$, $R = 287 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{моль})$) предполагался несжимаемым, а его течение - потенциальным. В расчетах было принято, что радиус цилиндра $L = 1 \text{ м}$, его материал - незакаленная сталь Ст3; параметры невозмущенного потока газа: скорость $v_\infty = 100 \text{ м/с}$, плотность $\rho = 1,197 \text{ кг/м}^3$, температура $T_\infty = 273 \text{ К}$, вязкость $\mu_\infty = 1,71 \cdot 10^{-5} \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$. Это соответствует числу Маха $\text{M}_\infty = v_\infty / \sqrt{\gamma R T_\infty} = 0,3$ и числу Рейнольдса $\text{Re}_\infty = v_\infty \rho L / \mu_\infty = 7 \cdot 10^6$.



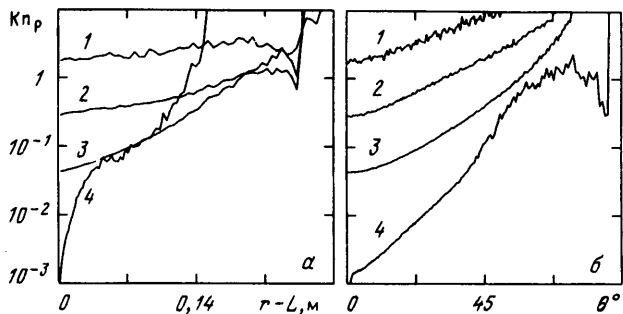
Фиг. 5. Распределения относительной объемной концентрации примеси $\alpha'_p = \alpha_p / \alpha_{p\infty}$ вдоль критической линии тока (а, в) и вдоль поверхности цилиндра (б, г): а, б — $r_p = 100$ мкм; в, г — $r_p = 10$ мкм. Штриховые кривые соответствуют бесстолкновительной примеси; 1 — $\alpha_{p\infty} = 3 \cdot 10^{-6}$; 2 — 10^{-5} ; 3 — $3 \cdot 10^{-5}$; 4 — 10^{-4}

Рассматривались течения газа с примесью монодисперсных частиц электрокорунда, плотность материала которого $\rho_p^\circ = 3950$ кг/м³, удельная теплоемкость $c_p^\circ = 1000$ Дж/(кг · К). Коэффициенты восстановления в модели столкновений частиц между собой $a_{pn} = 0,5$ и $a_{pi} = 0,9$. Варьировались объемная концентрация примеси в невозмущенном потоке $\alpha_{p\infty} = 10^{-6} - 10^{-4}$ и радиус частиц $r_p = 5 - 250$ мкм.

Типичные структуры течения примеси "крупных" ($r_p = 100$ мкм) и "мелких" ($r_p = 10$ мкм) частиц показаны на фиг. 3 и 4 соответственно. Для частиц тех же радиусов и для различных значений $\alpha_{p\infty}$ на фиг. 5 показаны распределения относительной концентрации примеси $\alpha_p / \alpha_{p\infty}$ вдоль критической линии тока и вдоль поверхности цилиндра в плоскости течения, а на фиг. 6 — распределения локальных значений числа Кнудсена в "газе" частиц Kn_p (на фиг. 5, 6 r — полярный радиус)

$$Kn_p = \frac{\lambda_p}{L}, \quad \lambda_p = \frac{n_p}{2v_p} \sqrt{v_p^2}, \quad v_p^2 = \frac{\langle r_i^3 v_i^2 \rangle_1}{\langle r_i^3 \rangle_1}$$

При бесстолкновительном движении частиц распределение $\alpha_p / \alpha_{p\infty}$ (штриховые линии на фиг. 5) не зависит от $\alpha_{p\infty}$. Пики (I) и (II) на фиг. 5, а, в соответствуют положению линий в плоскости течения, которые являются огибающими траекторий движущихся без столкновений частиц после их первичного и вторичного отскока от поверхности [28]. На огибающих траекторий распределение $\alpha_p / \alpha_{p\infty}$ имеет разрыв второго рода [29]. Данные результаты можно рассматривать как соответствующие предельному случаю $\alpha_{p\infty} \rightarrow 0$.

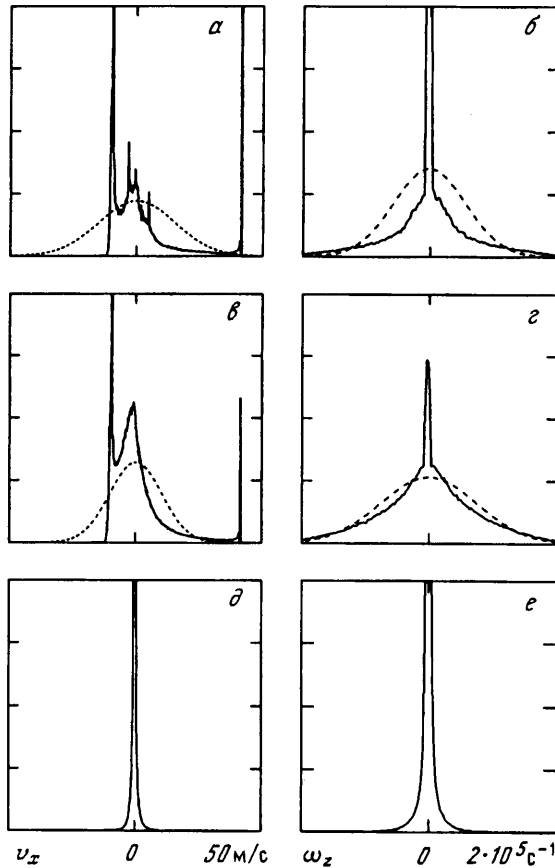


Фиг. 6. Распределения числа Кнудсена Kn_p в "газе" частиц вдоль критической линии тока (а) и вдоль поверхности цилиндра (б). $r_p = 100$ мкм; 1 - $\alpha_{p\infty} = 3 \cdot 10^{-6}$; 2 - 10^{-5} ; 3 - $3 \cdot 10^{-5}$; 4 - 10^{-4}

Влияние столкновений между частицами радиуса $r_p = 100$ мкм становится заметным уже при $\alpha_{p\infty} = 3 \cdot 10^{-6}$ (кривые 1 на фиг. 5, а, б и фиг. 6). Как видно из фиг. 6, в этом случае во всей области $Kn_p > 1$. С увеличением объемной концентрации роль столкновений между частицами, как и следовало ожидать, возрастает. При $\alpha_{p\infty} = 10^{-5}$ (фиг. 3, а, б и кривые 2 на фиг. 5, а, б и б) пики (I) и (II) уменьшаются и наблюдается рост относительной концентрации примеси около точки торможения. На фиг. 3, а еще хорошо видна конфигурация огибающей траекторий после первичного отскока частиц от поверхности цилиндра, в то время как огибающая траектория после вторичного отскока полностью "размыта" из-за столкновений между частицами. При $\alpha_{p\infty} = 3 \cdot 10^{-5}$ (фиг. 3, в, г и кривые 3 на фиг. 5, а, б и фиг. 6) концентрация монотонно увеличивается к поверхности цилиндра. Как следует из фиг. 6 (кривые 2 и 3), в этих двух случаях в приповерхностном слое реализуются переходный по числу Kn_p режим течения примеси. При $\alpha_{p\infty} = 10^{-4}$ (фиг. 3, д, е и кривые 4 на фиг. 5, а, б и б) толщина приповерхностного слоя, в котором существенны столкновения между частицами, становится значительно меньше. При этом на поверхности тела концентрация примеси α_p в сотни раз превышает $\alpha_{p\infty}$ и у самой поверхности вблизи точки торможения реализуется континуальное течение примеси ($Kn_p < 10^{-2}$). Однако по мере удаления от поверхности число Кнудсена быстро растет и при $r - L \approx 0,05$ м течение примеси происходит уже в переходном режиме, а при $r - L \approx 0,25$ м частицы движутся практически без столкновений друг с другом. Число Kn_p в приповерхностном слое также быстро увеличивается вниз по потоку вдоль поверхности цилиндра и при $\theta \approx 60^\circ$ реализуется бесстолкновительное течение примеси.

Таким образом, для заданных исходных параметров задачи при изменении концентрации примеси от $\alpha_{p\infty} = 3 \cdot 10^{-6}$ до 10^{-4} реализуются три качественно различных режима течения "газа" частиц, соответствующие бесстолкновительному, переходному и континуальному течению вблизи обтекаемой поверхности. Как показывают приведенные результаты, с увеличением $\alpha_{p\infty}$ столкновения падающих и отраженных частиц заметно влияют на поле концентрации примеси, начиная с $\alpha_{p\infty} \approx 3 \cdot 10^{-6}$, что подтверждает априорные оценки [1].

Глобальная структура течения примеси частиц существенно меньшего радиуса $r_p = 10$ мкм качественно отличается от таковой для частиц с $r_p = 100$ мкм (см. фиг. 3 и 4). Как показали расчеты, поле плотности дисперсной фазы для $r_p = 10$ мкм даже при $\alpha_{p\infty} = 3 \cdot 10^{-5}$ (фиг. 4, б) практически не отличается от поля плотности примеси при ее бесстолкновительном движении. Последнее связано с тем, что роль столкновений между частицами велика только в приповерхностном слое, очень тонком при $r_p = 10$ мкм (примерно в 15 раз тоньше, чем при $r_p = 100$ мкм). В то же время попереч-



Фиг. 7. Функции распределения компоненты v_x (а, в, в) поступательной скорости и компоненты ω_z (б, з, е) вращательной скорости частиц в точке торможения. $r_p = 100$ мкм; а, б — $\alpha_{p\infty} = 10^{-5}$; в, з — $3 \cdot 10^{-5}$; в, е — 10^{-4} . Штриховые кривые соответствуют максвелловскому распределению

ные структуры приповерхностных слоев при $r_p = 100$ и 10 мкм качественно совпадают (см. кривые 4 на фиг. 5, а, в). По-видимому, с увеличением $\alpha_{p\infty}$ приповерхностный слой в обоих случаях можно рассматривать как бесконечно тонкую "пелену" [30], имеющую конечную поверхностную плотность массы дисперсной фазы.

На фиг. 7 показаны распределения дисперсных частиц по поступательной скорости v_x и вращательной скорости ω_z в точке торможения при различных концентрациях примеси в набегающем потоке. Формально функция распределения $f_\beta(\mathbf{r}, \beta, t)$ некоторого параметра β может быть представлена в виде отношения функционалов типа (2.6)

$$f_\beta(\mathbf{r}, \beta, t) = \frac{N}{n(\mathbf{r}, t)} \int \delta_1(\beta - \beta_1) F_1(\mathbf{r}, \mathbf{z}_1, t) d\mathbf{z}_1, \quad \beta = v_x, \omega_z \quad (6.1)$$

Функции распределения на фиг. 7 построены в масштабе, который однозначно определяется условием нормировки $\int f_\beta d\beta = 1$ и единицами измерения величин v_x и ω_z .

При бесстолкновительном движении примеси траектории частиц могут пересекаться. В результате в области бесстолкновительного движения функции распре-

деления (6.1) имеют вид линейных комбинаций одномерных δ -функций. Столкновения между частицами приводят к "размазыванию" функций распределения. Однако в рассмотренном диапазоне $\alpha_{p\infty}$ заметная доля частиц не претерпевает столкновений с другими частицами. Этой упорядоченно движущейся части примеси соответствуют пики на графиках функций распределения. Из фиг. 7 видно, что доля упорядоченно движущихся частиц в окрестности точки торможения достаточно велика при $\alpha_{p\infty} \leq \leq 3 \cdot 10^{-5}$. В этом случае функции распределения существенно отличаются от показанных штриховыми линиями распределений Максвелла [16] с теми же математическими ожиданиями и дисперсиями.

Заключение. Численными расчетами показано, что столкновения между дисперсными частицами при обтекании затупленного тела запыленным газом начинают играть важную роль в формировании картины течения примеси при очень малой ее концентрации и набегающем потоке. Глобальные структуры течения крупных и мелких частиц качественно различны. Картина течения крупных частиц сильно изменяется в зависимости от их концентрации в невозмущенном потоке $\alpha_{p\infty}$. С ростом $\alpha_{p\infty}$ столкновения между частицами приводят к формированию пристеночного слоя с высокой концентрацией примеси, который не возникает при использовании модели бесстолкновительной примеси. В то же время структура течения мелких частиц слабо меняется при увеличении $\alpha_{p\infty}$ и практически совпадает со структурой течения бесстолкновительной примеси, за исключением очень тонкого слоя, в котором существенны столкновения между частицами.

Данное исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-01-01467 и 99-01-00674).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Циркунов Ю.М. Моделирование течений примеси в задачах двухфазной аэродинамики. Эффекты пограничного слоя // Моделирование в механике. Новосибирск: ИТПМ СО РАН, 1993. Т. 7. № 2. С. 151–193.
2. Матвеев С.К. Математическое описание обтекания тел потоком газозвеси с учетом влияния отраженных частиц // Движение сжимаемой жидкости и неоднородных сред. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. С. 189–201. (Газодинамика и теплообмен. Вып. 7.)
3. Kitron A., Elperin T., Tamir A. Monte Carlo analysis of wall erosion and direct contact heat transfer by impinging two-phase jet // J. Thermophys. and Heat Transfer. 1989. V. 3. № 2. P. 112–122.
4. Цибаров В.А. Кинетический метод в теории газозвесей. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1997. 192 с.
5. Матвеев С.К. Модель газа из твердых частиц с учетом неупругих соударений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 6. С. 12–16.
6. Горбачев Ю.Е., Круглов В.Ю. Расчет параметров течения двухфазной смеси при обтекании сферы с учетом столкновений частиц между собой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 4. С. 93–96.
7. Volkov A., Tsirkunov Yu. Direct simulation Monte-Carlo modelling of two-phase gas-solid particle flows with inelastic particle-particle collisions // Proc. 3rd ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conf., Paris, 1996. Chichester: Wiley, 1996. P. 662–668.
8. Нигматуллин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
9. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
10. Yokuda E., Growe C.T. Effect of Reynolds number and spacing on the dispersion of particles in self-induced turbulence // Turbulence Modification in Multiphase Flows. N.Y.: ASME, 1991. FED. V. 110. P. 7–13.
11. Мясников В.П. Статистическая модель механического поведения дисперсных систем // Механика многокомпонентных сред в технологических процессах. М.: Наука, 1978. С. 70–101.
12. Климонтович Ю.Л. Диссипативные уравнения для многочастичных функций распределения // Успехи физ. наук. 1983. Т. 139. № 4. С. 689–700.

13. Рудяк В.Я. Основное кинетическое уравнение разреженного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 6. С. 154–160.
14. Мак-Кьюн Дж., Сэндри Г., Фримен Е. Новый метод изучения неравновесной статистической механики газов // Некоторые вопросы кинетической теории газов. М.: Мир, 1965. С. 212–225.
15. Васенин И.М., Архипов В.А., Бутов В.Г. и др. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1986. 264 с.
16. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
17. Бабуха Г.Л., Шрайбер А.А. Взаимодействие частиц полидисперсного материала в двухфазных потоках. Киев: Наук. думка, 1972. 176 с.
18. Лашков В.А. Об экспериментальном определении коэффициентов восстановления скорости частиц потока газозвеси при ударе о поверхность // Инж.-физ. журн. 1991. Т. 60. № 2. С. 197–203.
19. Циркунов Ю.М., Панфилов С.В., Клычников М.Б. Полуэмпирическая модель ударного взаимодействия дисперсной частицы примеси с поверхностью, обтекаемой потоком газозвеси // Инж.-физ. журн. 1994. Т. 67. № 5–6. С. 379–386.
20. Morsi S.A., Alexander A.J. An investigation of particle trajectories in two-phase flow systems // J. Fluid Mech. 1972. V. 55. Pt 2. P. 193–208.
21. Rubinow S.I., Keller J.B. The transverse force on a spinning sphere moving in viscous fluid // J. Fluid Mech. 1961. V. 11. Pt. 3. P. 447–459.
22. Наумов В.А., Соломенко А.Д., Яценко В.П. Влияние силы Магнуса на движение сферического твердого тела при большой угловой скорости // Инж.-физ. журн. 1993. Т. 65. № 3. С. 287–290.
23. Dennis S.C.R., Singh S.N., Ingham D.B. The steady flow due to a rotating sphere at low and moderate Reynolds numbers // J. Fluid Mech. 1980. V. 101. Pt. 2. P. 257–280.
24. Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980. 172 с.
25. Bird G.A. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows. Oxford: Clarendon Press, 1994. 458 p.
26. Иванов М.С., Рогазинский С.В. Сравнительный анализ алгоритмов метода прямого статистического моделирования в динамике разреженного газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 7. С. 1058–1070.
27. Иванов М.С., Рогазинский С.В. Экономичные схемы статистического моделирования пространственно-неоднородных течений разреженного газа: Препринт № 29–88. Новосибирск: ИТПМ, 1988. 33 с.
28. Циркунов Ю.М., Волков А.Н., Панфилов С.В. Движение твердых частиц примеси и эрозия поверхности при обтекании тел потоком слабоконцентрированной газозвеси // Тр. 13-й Сессии Междунар. школы по моделям механики сплошной среды, Санкт-Петербург, 1995. СПб: Изд-во СПб. ун-та, 1996. С. 109–116.
29. Осипцов А.Н., Шапиро Е.Г. Обтекание сферы запыленным газом с большой сверхзвуковой скоростью // Исследование газодинамики и теплообмена сложных течений однородных и многофазных сред / Под ред. Стулова В.П. М.: Изд-во МГУ, 1990. С. 89–105.
30. Крайко А.Н., Сулайманова С.М. Двухжидкостные течения смеси газа и твердых частиц с "пеленами" и "шнурами", возникающими при обтекании непроницаемых поверхностей // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 619–630.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
7.IV.1999